VARIABLE COMPLEJA

Prof. Raúl Castillo S.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE LA SERENA

Ediciones Digitales
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
Cisternas 1200, La Serena, Chile
edicionesdmatuls@userena.cl
http://www.dmatuls.cl

DMATULS@2020

DMATULS

TEXTOS ACADÉMICOS

EDICIÓN 2020

DMATULS

TEXTOS ACADÉMICOS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE LA SERENA

Ediciones Digitales
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
Cisternas 1200, La Serena, Chile
edicionesdmatuls@userena.cl
http://www.dmatuls.cl

VARIABLE COMPLEJA

Autor: Prof. Raúl Castillo Sierra

Primera Edición 2020

ÍNDICE

-Los Números Complejos pág 6

-Funciones pág. 34

-Integración pág. 54

-Series pág 73

-Complementos Varios pág 89

Prólogo

Presentamos aquí un texto de problemas resueltos de variable compleja destinado a estudiantes de Ingeniería . La parte teórica se supone conocida por el lector . Este libro es de distribución gratuita con fines netamente docentes .Se prohíbe su comercialización.

EL AUTOR

Capítulo 1

Los Números Complejos

Recordatorio

Definición .- Los números complejos se pueden definir como un par ordenado de números reales

$$\mathbb{C}=\{(x,y)\,/\;x,y\in\Re\}$$

Con las operaciones

Adición $(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)$

Multiplicación $(x,y)(a,b)=(xa-yb,xb+ya)$

Se demuestra que

1) $\forall(x,y),(a,b)\in\mathbb{C}:(x,y)+(a,b)\in\mathbb{C}$

2) $\forall(x,y),(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}:((x,y)+(a,b))+(c,d)=(x,y)+((a,b)+(c,d))$

3) $\forall(x,y),(a,b)\in\mathbb{C}:\ (x,y)+(a,b)=(a,b)+(x,y)$

4) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}:\ (x,y)+(0,0)=(x,y)$

5) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}:\ (x,y)+(-x,-y)=(0,0)$

6) $\forall(x,y),(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}:\ (x,y)((a,b)+(c,d))=(x,y)(a,b)+(x,y)(c,d)$

7) $\forall(x,y),(a,b)\in\mathbb{C}:\ (x,y)(a,b)\in\mathbb{C}$

8) $\forall(x,y),(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}:((x,y)(a,b))(c,d)=(x,y)((a,b)(c,d))$

9) $\forall(x,y),(a,b)\in\mathbb{C}:(x,y)(a,b)=(a,b)(x,y)$

10) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}:(x,y)(1,0)=(x,y)$

11) $\forall(x,y)\in\mathbb{C}-\{(0,0)\}:(x,y)(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})=(1,0)$

12) (0,1)(0,1)=(-1,0)

Una notación alternativa es z=x+iy donde $i^2=-1$,cosa que se desprende de la identidad 12) x es la parte real Rez , y es la parte imaginaria Imz de z

Los números complejos se pueden representar en el plano cartesiano como vectores , así si z=x+iy entonces el módulo de z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

donde $x = r\cos\theta, y = rsen\theta$ son las coordenadas polares de z y así z se escribe

$z = r(\cos\theta + isen\theta)$ que es su forma polar y $\arg z = \theta$ (el argumento de z)

Por otra parte si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + sen\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + sen\theta_2)$ entonces

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)$, en particular si $z = r(\cos\theta + isen\theta)$ entonces

$z^n = r^n(\cos\theta^n + isen\theta^n)$ (Teorema de De Moivre)

Además

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + isen(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\phi) + isen(-\phi)) = \frac{1}{r}(\cos(-\phi) - \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + isen(\phi_1 - \phi_2)isen(\phi))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}),\ k = 0,1,2...n-1$$

Definición : $e^{i\phi} = \cos\phi + isen\phi$

De aquí resultan las siguientes propiedades: $\forall \phi, \phi_1, \phi_2 \in \Re$

a) $e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

b) $1/e^{i\phi} = e^{-i\phi}$

c) $e^{i(\phi + 2\pi)} = e^{i\phi}$

d) $|e^{i\phi}| = 1$

e) $\frac{d}{d\phi} e^{i\phi} = ie^{i\phi}$

El conjugado de z es $\overline{z} = x - iy$ de donde resulta

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_2}$

c) $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$

d) $\overline{(\bar{z}\ )} = z$

e) $|\bar{z}| = |z|$

f) $(\bar{z})^2 = z\,\bar{z}$

g) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$

h) $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

i) $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

j) $|\pm z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$

k) $|\pm z_1 \pm z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

l) $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Problema 1.-

Resolver la ecuación

$$z^9 + z^5 - z^4 = 1$$

Solución:

escribimos

$$z^5(z^4+1) = 1 + z^4$$

o $\quad z^5(z^4+1) - (z^4+1) = 0$

o $\quad (z^4+1)(z^5-1) = 0$

o $\quad z^4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow z^4 = -1 \quad , \quad z^5 - 1 = 0 \quad \Rightarrow z^5 = 1$

Es decir, debemos calcular las raíces cuartas de -1 y las raíces quintas de 1

Aplicamos la fórmula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0,1,2...n-1$$

Ahora $\quad -1 = 1(\cos\pi + isen\pi) \quad$ y entonces

$Una \ \ raíz \ \ es \quad \cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4} \quad , \quad k = 0$

$Otra \ \ raíz \ \ es \quad \cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4} \quad , \quad k = 1$

$Otra \ \ raíz \ \ es \quad \cos\frac{5\pi}{4} + isen\frac{5\pi}{4} \quad , \quad k = 2$

$Otra \ \ raíz \ \ es \quad \cos\frac{7\pi}{4} + isen\frac{7\pi}{4} \quad , \quad k = 3$

Ahora

$$1 = 1(\cos 0 + isen 0)$$

Entonces

$$\sqrt[5]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{5} + isen\frac{0+2k\pi}{5} \quad k = 0,1,2,3,4$$

$$Una \quad raíz \quad es \quad \cos\frac{0}{5} + isen\frac{0}{5} = 1 \quad , \quad k = 0$$

$$Otra \quad raíz \quad es \quad \cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5} \quad , \quad k = 1$$

$$Otra \quad raíz \quad es \quad \cos\frac{4\pi}{5} + isen\frac{4\pi}{5} \quad , \quad k = 2$$

$$Otra \quad raíz \quad es \quad \cos\frac{6\pi}{5} + isen\frac{6\pi}{5} \quad , \quad k = 3$$

$$Otra \quad raíz \quad es \quad \cos\frac{8\pi}{5} + isen\frac{8\pi}{5} \quad , \quad k = 4$$

Así entonces tenemos nueve raíces en total , lo que se corresponde con

el grado 9 de la ecuación

Problema 2,-

Demostrar la "igualdad del paralelogramo "

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Solución:

Tenemos

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) =$$

$$= z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} + z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w} = 2|z|^2 + 2|w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Así entonces se cumple la igualdad

Problema 3.-

Dados a,b complejos encuentre el valor de z para que la expresión

$|z-a|^2+|z-b|^2$ tenga un valor mínimo.

Solución:

En la igualdad del paralelogramo reemplazamos z por z-a y w por z-b entonces

$$|(z-a)+(z-b)|^2+|(z-a)-(z-b|^2=2(|z-a|^2+|z-b|^2)$$

o

$$|2z-(a+b)|^2+|b-a|=2(|z-a|^2+|z-b|^2)$$

La expresión de la izquierda depende de z y su valor es cuando el primer término es cero , o sea

2z-(a+b)=0 de donde z=(a+b)/2

Problema 4.-

Si $\left|\dfrac{1}{e^{i\phi}+e^{i\varphi}}\right|=3 \quad 0\le\phi\le 2\pi\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi$

¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar $\phi-\varphi$

Solución:

Escribimos

$$1=3\left|e^{i\phi}+e^{i\varphi}\right|=3\left|\cos\phi+\cos\varphi+i(sen\phi+sen\varphi)\right|=3\sqrt{(\cos\phi+\cos\varphi)^2+(sen\phi+sen\varphi)^2}=$$

$$=3\sqrt{2+2(\cos\phi\cos\varphi+sen\phi sen\varphi)}=3\sqrt{2+2\cos(\phi-\varphi)}$$

de donde

$$1=9(2+2\cos(\phi-\varphi))=18+18\cos(\phi-\varphi)$$

y

$$\cos(\phi-\varphi)=-\frac{17}{18} \quad \Rightarrow \quad \phi-\varphi\approx\pm160{,}81^{o} \quad o \quad \pm199{,}18^{o}$$

Problema 5.-

Si $\quad z=\cos\theta+isen\theta \quad$ calcule

$$itg\frac{\theta}{2}+\frac{2}{1+z} \quad , \; z\neq-1$$

Solución:

Escribimos $\quad i\dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{2}{1+\cos\theta+isen\theta}=i\dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{2(1+\cos\theta-isen\theta)}{(1+\cos\theta)^2+sen^2\theta}=$

$$=i\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}+\frac{2+2\cos\theta-2isen\theta}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+sen^2\theta}=i\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}+\frac{2+2\cos\theta-2isen\theta}{2+2\cos\theta}=$$

$$=1+i\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}-i\frac{sen\theta}{1+\cos\theta}=1$$

Problema 6.-

A,B y C son tres puntos colineales en el plano complejo tales que AB=BC .

Si a, b y c son los complejos asociados a A ,B y C , expresar c en función de a y b

Solución:

B es el punto medio de AC y así b-a= c-b y así c=2b-a

Problema 7.-

Si $z^3 = 1$, $z \neq 1$ calcule $(1+2z+3z^2)(1+3z+2z^2)$

Solución:

Es claro que $1+z+z^2=0$ que es el factor de la ecuación cúbica que contiene las otras dos raíces de la misma , ahora y teniendo en cuenta esto tenemos

$$(1+2z+3z^2)(1+3z+2z^2) = (1+z+z^2+z+2z^2)(1+z+z^2+2z+z^2) =$$

$$= (z+2z^2)(2z+z^2) = 2z^2+4z^3+z^3+2z^4 = 2z^2+5+2z =$$

$$= 3+2(1+z+z^2) = 3$$

Resultado final 3

Problema 8.-

Sea un cuadrado OABC en el plano complejo donde O es el origen y los siguientes vértices siguen el sentido positivo de rotación . Si A corresponde al complejo 108+ 656i ¿Cuáles son las coordenadas de B ?

Solución:

B es el vértice opuesto a O por la diagonal del cuadrado cuya longitud es $\sqrt{2}$ veces el módulo de OA . Además el argumento de OB es 45 grados mayor que el de OA . En resumen debemos multiplicar OA por un vector de argumento 45 grados y módulo $\sqrt{2}$. Dicho vector es $\sqrt{2}(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}) = 1+i$, entonces

$$(108+656i)(1+i)=-548+764i$$

Entonces las coordenadas de B son (-548,764) .

Problema 9.-

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 4z^2+3z^2w+w^3 \;\; =8 \\ 2z^3-2z^2w+zw^2=1 \end{array}\right|$$

Solución:

Hacemos w=mz , reemplazamos en ambas ecuaciones y dividimos

Se obtiene

$$\frac{4+3m+m^3}{2-2m+m^2}=8 \quad \Rightarrow \quad m^3-8m^2+19m-12=0$$

de donde resulta

$$(m-1)(m-3)(m-4)=0 \quad \Rightarrow \quad m=1,3,4$$

$$Si\;\; m=1 \Rightarrow \;\; z^3=1 \;\Rightarrow\;\; z=\sqrt[3]{1}=w \;\; (3\; soluciones)$$

$$Si\;\; m=2 \Rightarrow \;\; z^3=\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \;\;,\;\; w=3\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \quad (3\; soluciones)$$

$$Si\;\; m=3 \Rightarrow \;\; z^3=\sqrt[3]{\frac{1}{10}} \;,\;\; w=4\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \quad (3\;\; soluciones)$$

Problema 10.-

Si z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero probar que

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

Solución:

El lado $z_2 - z_1$ se puede obtener por la rotación en 60 grados del lado $z_3 - z_1$

y análogamente el lado $z_3 - z_1$ se obtiene por la rotación en 60 grados del lado

$z_2 - z_3$. Así

$$z_2 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_3 - z_1)$$

$$z_1 - z_3 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_3)$$

Dividiendo

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

y desarrollando se obtiene

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

Problema 11.-

Los números complejos w_1, w_2, w_3 pertenecen a la circunferencia $|z| = 5$

y su suma es cero .Calcule la longitud de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos w_1, w_2, w_3 .

Solución:

Los lados del triángulo son $|w_2 - w_1|$, $|w_3 - w_1|$, $|w_3 - w_2|$

Ahora

$$|w_3 - w_1|^2 = |2w_1 + w_2|^2 = (2w_1 + w_2)(2\overline{w_1} + \overline{w_2}) = 125 + 2(w_1\overline{w_2} + \overline{w_1}w_2)$$

$$|w_3 - w_2|^2 = |2w_2 + w_1|^2 = (2w_2 + w_1)(2\overline{w_2} + \overline{w_1}) = 125 + 2(w_1\overline{w_2} + \overline{w_1}w_2)$$

Luego

$|w_3 - w_1| = |w_3 - w_2|$ y análogamente $|w_2 - w_1| = |w_3 - w_2|$

y entonces el triángulo es equilátero y su lado es $a = 5\sqrt{3}$,r=5/2 y $L = 2\pi r = 5\pi$

Problema 12.-

¿Qué curva en el plano complejo representa la ecuación $|z-a||z+a| = a^2$?

Solución:

$$|z-a||z+a| = |z^2 - a^2| = a^2$$

$$z = r(\cos\theta + isen\theta)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + isen2\theta)$$

$$z^2 - a^2 = r^2\cos 2\theta - a^2 + ir^2 sen2\theta$$

$$\left|z^2-a^2\right|=(r^2\cos 2\theta-a^2)^2+r^4 sen2\theta=a^4$$

$$r^4\cos^2 2\theta-2r^2a^2\cos 2\theta+a^4+r^4 sen^2 2\theta=a^4$$

$$r^4(\cos^2 2\theta+sen^2 2\theta)-2r^2a^2\cos 2\theta=0$$

$$r^4=2r^2a^2\cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad r^2=2a\cos 2\theta$$

Se trata de una Lemniscata

Problema 13.-

Si a,b,c son complejos , $|a|<1$, $|b|<1$ y

$c=\dfrac{(1-|a|^2)b+(1-|b|^2)a}{1-|ab|^2}$ y si P=(4,3) y d(P,c) es la distancia entre c y P

¿Cuál es el intervalo real de menor longitud que contiene todos los valores posibles de d(P,c) ?

Solución:

$$|c|\leq\frac{(1-|a|^2)|b|+(1-|b|^2)|a|}{1-|ab|^2}=\frac{|a|+|b|-|ab|(|a|+|b|)}{1-|ab|^2}=$$

$$=\frac{(|a|+|b|)(1-|ab|)}{(1-|ab|)(1+|ab|)}=\frac{|a|+|b|}{1+|a||b|}<1$$

Ahora si P=(4,3) y d(P,c) es la distancia entre P y c , entonces

$d(P,c)\in\{x/4<x<6\}$

Nota:

$1-|a|>0$, $1-|b|>0 \;\Rightarrow\; (1-|a|)(1-|b|)>0 \;\Rightarrow$

$$1-|a|-|b|+|ab|>0 \;\Rightarrow\; 1+|ab|>|a|+|b| \;\Rightarrow\; \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|}<1$$

Problema 14.-

Si a es un número real positivo y $M_a=\left\{ z\in \quad -\{0\} \,/\, \left|z+\frac{1}{z}\right|=a \right\}$

Encuentre el máximo valor de $|z|$ cuando $z\in M_a$

Solución:

$$a=\left|z+\frac{1}{z}\right| \;\Rightarrow\; a^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=(z+\frac{1}{z})(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}})=|z|^2+\frac{z^2+(\bar{z})^2}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^2}=$$

$$=\frac{|z|^4+(z+(\bar{z}))^2-2|z|^2+1}{|z|^2} \;\Rightarrow\; |z|^4-|z|^2(a^2+2)+1=-(z+\bar{z})^2\leq 0$$

$$|z|^2\in\left[\frac{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}\,,\,\frac{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}\right]$$

de donde se obtiene

$$|z|\in\left[\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\,,\,\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right] \;\Rightarrow\; \max|z|=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

Problema 15.-

Si $|z|=1$ pruebe que $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$

Solución:

Como $|z|=1 \Rightarrow z=\left(\overline{z}\right)^{-1}$, entonces

$$\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}=\frac{az+b}{\left(\overline{b}\right)+\left(\overline{z}\right)\left(\overline{a}\right)}\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=\left|\frac{az+b}{\left(\overline{b}\right)+\left(\overline{z}\right)\left(\overline{a}\right)}\right|\left|\frac{1}{z}\right|=1$$

pues

$$|az+b|=\left|\overline{az+b}\right|=\left|\left(\overline{b}\right)+\overline{za}\right|$$

Problema 16.-

Encuentre algebraicamente el menor valor que puede tomar la expresión

$$A=|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1| \quad si \quad |z_1|=|z_2|=1$$

Solución:

$$A\geq|z_1+1|+|z_1z_2+1-(z_2+1)|\geq|z_1+1|+|z_1z_2-z_2|\geq$$

$$\geq|z_1+1|+|z_2||z_1-1|=|z_1+1|+|z_1-1|\geq|z_1+1+z_1-1|=2|z_1|=2$$

Problema 17.-

Si z está determinado por la intersección de la curva $x^2 + y^2 = 1 \quad (x, y) \neq (-1, 0)$

y la recta que une el punto (-1,0) con el punto $(0, \lambda)$, $\lambda \in \Re$, exprese z en función de λ

Solución:

La recta en cuestión tiene por ecuación

$$y - \lambda = m(x - 0) = \lambda x \Rightarrow y = \lambda x + \lambda$$

además $x^2 + y^2 = 1$

resolviendo este sistema se obtiene

$$x = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad , \quad y = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

Así

$$z = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

Problema 18.-

Si la ecuación $z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$ con coeficientes reales no nulos tiene una raíz imaginaria pura exprese a_4 en función de los otros coeficientes

Solución:

Sea ki la raíz , entonces

$$k^4 i^4 + a_1 k^3 i^3 + a_2 k^2 i^2 + a_3 ki + a_4 = 0$$

o $\quad k^4 - a_2 k^2 + a_4 + i(-a_1 k^3 + a_3 k) = 0$

o $\quad k^4 - a_2 k^2 + a_4 = 0 \quad , \quad -a_1 k^3 + a_3 k = 0 \;\Rightarrow\; k^2 = \dfrac{a_3}{a_1}$

de donde $\quad \dfrac{a_3{}^2}{a_1{}^2} - a_2 \dfrac{a_3}{a_1} + a_4 = 0$

y $\quad a_4 = \dfrac{a_1 a_2 a_3 - a_3{}^2}{a_1{}^2}$

Problema 19.-

En el plano complejo consideremos un triángulo equilátero tal que el radio de la circunferencia circunscrita vale 1 . Si los vértices son A ; B ; C y P es un punto cualquiera de dicha circunferencia calcule el valor de $PA^2 + PB^2 + PC^2$

Solución:

Sin perder generalidad consideremos el triángulo formado por las raíces cúbicas de la unidad

1 , $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

además en la circunferencia $|z| = 1$

Así , $PA^2 + PB^2 + PC^2 = |z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + |z-\varepsilon^2|^2 =$

$= (z-1)(\overline{z}-1) + (z-\varepsilon)(\overline{z}-\overline{\varepsilon}) + (z-\varepsilon^2)(\overline{z} - \overline{\varepsilon^2})$

$= 3|z|^2 - (1+\varepsilon+\varepsilon^2)\overline{z} - (1+\overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon^2})z + 1 + |\varepsilon|^2 + |\varepsilon^2|^2 =$

$= 3 - 0\overline{z} - 0z + 1 + 1 + 1 = 6$

Problema 20.-

Demostrar que si $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1 z_2 \neq -1$, entonces

$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ =A es un número real

Solución:

Tenemos

$$z_1\overline{z_1}=|z_1|^2=1 \quad , \quad \overline{z_1}=\frac{1}{z} \quad , \quad \overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$$

$$\overline{A}=\frac{(\overline{z_1})+(\overline{z_2})}{1+\overline{z_1z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=A$$

luego A es un número real

Problema 21.-

Encuentre todos los complejos z tales que $|z|=1$ y $\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=1$

Solución:

Sea $z=\cos x+isenx \quad x\in[0,\pi)$ entonces

$$\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=\frac{\left|z^2+\overline{z}\right|}{|z|^2}=|\cos 2x+isen2x+\cos 2x-isen2x|=2|\cos 2x|$$

Entonces $\cos 2x=\frac{1}{2}$ o $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

Si $\cos 2x=\frac{1}{2}$

entonces $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$, $x_3=\frac{7\pi}{6}$, $x_4=\frac{11\pi}{6}$

Si $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

entonces $x_5 = \frac{\pi}{3}$, $x_6 = \frac{2\pi}{3}$, $x_7 = \frac{4\pi}{3}$, $x_8 = \frac{5\pi}{3}$

Problema 22.-

Escriba la ecuación de una recta en el plano complejo en función de las coordenadas complejas conjugadas

Solución:

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ de donde $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

La ecuación de una recta en el plano es Ax+By+C=0

entonces escribimos

$A\frac{z+\bar{z}}{2} - Bi\frac{z-\bar{z}}{2} + C = 0$ o equivalentemente $\bar{z}(\frac{A+Bi}{2}) + z(\frac{A-Bi}{2}) + C = 0$

Hacemos $a = \frac{A-Bi}{2}$, $a \neq 0$, $b = C \in \Re$

Así nos queda $\overline{a}\bar{z} + az + b = 0$

Problema 23.-

Escriba la ecuación de la circunferencia en el plano complejo en coordenadas complejas conjugadas.

Solución:

En el plano la ecuación de una circunferencia es $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$

Ahora pasando a coordenadas conjugadas

$$Az\bar{z}+B\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+C\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+D=0$$

o $$Az\bar{z}+\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2i}\right)z+\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2i}\right)\bar{z}+D=0$$

hacemos $A=\alpha$, $\frac{B}{2}+\frac{C}{2i}=\beta$, $=D=\gamma$

Entonces

$$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$$

Problema 24.-

Pruebe que si n=2,3,4....., entonces

$$a)\quad \cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+.......\cos\frac{2(n-1)}{n}=-1$$

$$b)\quad sen\frac{2\pi}{n}+sen\frac{2\pi}{n}+........sen\frac{2(n-1)}{n}=0$$

Solución:

Consideremos la ecuación $z^n - 1 = 0$ cuyas soluciones son las raíces n-ésimas de la unidad , como el segundo coeficiente de la ecuación es cero y éste es la suma de las raíces tenemos

$$1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\frac{4\pi i}{n}} + \ldots\ldots\ldots\ldots e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} = 0$$

de donde resulta

$$(1\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \ldots\ldots.\cos\frac{2(n-1)}{n}) + i(sen\frac{2\pi}{n} + sen\frac{2\pi}{n} + \ldots\ldots..sen\frac{2(n-1)}{n}) = 0$$

y de aquí se deduce claramente el resultado pedido.

Problema 25.-

Escriba en la forma a+bi el complejo $\dfrac{1}{1 + \cos t + isent}$

Solución:

$$\frac{1}{1+\cos t + isent} = \frac{1+\cos t - isent}{(1+\cos t)^2 + sen^2 t)} = \frac{1+\cos t - isent}{2(1+\cos t)} = \frac{1}{2} - i\frac{sent}{2(1+\cos t)}$$

Problema 26.-

El polinomio $z^4 - 5z^3 + 18z^2 - 17z + 13 = 0$ tiene la raíz z= 2+3i . Encuentre las otras raíces.

Solución:

Como z=2+3i es raíz y el polinomio tiene coeficientes reales , entonces z=2-3i también es raíz entonces podemos dividir por

$$(z-(2+3i))(z-(2-3i)) = z^2 - 4z + 13$$

Efectuando la división resulta

$$z^2 - z + 1$$

Igualando a cero y resolviendo resultan las restantes soluciones

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Problema 27.-

Resolver la ecuación

$$z^4 + 1 = 0$$

Solución:

Podríamos darle la forma polar al complejo -1 y aplicar la fórmula de la raíz n-ésima de un número complejo, pero esta vez lo haremos algebraicamente , tenemos

$$z^4 + 1 = z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$$

hay que resolver las dos ecuaciones que resultan:

$$z=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=z=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$$

$$z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=z=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$$

Cuatro soluciones

Problema 28.-

$A_1\ A_2\ \ A_3......A_n$ sea un polígono regular inscrito en la circunferencia $x^2+y^2=1$ y sea

$A_1=(1,0)$. Calcular $A_1A_2+A_1A_3+........+A_1A_n$

Solución:

Podemos considerar los vértices del polígono como los números complejos

$z_1, z_2,....z_n$

Ahora la suma en cuestión se puede escribir como la suma de los términos

$$A_1A_2=z_2-z_1, A_1A_3=z_3-z_1...........A_1A_n=z_n-z_1$$

sumando tenemos

$z_2+z_3+.....+z_n-(n-1)z_1$

o $\quad z_1+z_2+z_3+.....+z_n-nz_1$

pero los vértices de este polígono regular se pueden considerar como las raíces n-ésimas de la unidad y por lo tanto su suma es cero , luego el resultado final es

$-nz_1=-n(1,0)=(-n,0)$

o en forma vectorial $-ni$ donde i es el vector unitario del sistema i,j,k de los vectores en el espacio

Problema 29 .-

Demuestre que $|z_1| = |z_2| = 1$ y $|z_1 + z_2| = 2 \Rightarrow z_1 = z_2$

Solución:

Sean $z_1 = \cos\theta + i sen\theta$, $z_2 = \cos\varphi + i sen\varphi$, entonces

$$2 = |z_1 + z_2| = \sqrt{(\cos\theta + \cos\varphi)^2 + (sen\theta + sen\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{2 + 2(\cos\theta\cos\varphi + sen\theta sen\varphi)} = \sqrt{2 + 2\cos(\theta - \varphi)} = 2$$

de donde resulta

$$\cos(\theta - \varphi) = 1 \Rightarrow \theta = \varphi + 2k\pi \quad , \text{ luego } \quad z_1 = z_2$$

Problema 30.-

¿Qué curva en el plano representa la ecuación

$$|z - 1| + |z + 3| = 10$$

Escribimos la ecuación en coordenadas cartesianas

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

despejamos una raíz y elevamos al cuadrado

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 = 100 + (x+3)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

reordenando

$$2x + 27 = 5\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

eliminando la raíz y reordenando

$$21(x+1)^2 + 25y^2 = 525$$

o

$$\frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{y^2}{21}=525$$

Se trata de una elipse

Problema 31.-

Exprese en forma compacta las siguientes expresiones

$$A=\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha+2\theta)+......+\cos(\alpha+n\theta) \quad ,\theta\neq 2\pi k \quad k \ entero$$

$$B=sen(\alpha+\theta)+sen(\alpha+2\theta)+......+sen(\alpha+n\theta) \quad ,\theta\neq 2\pi k \quad k \ entero$$

Solución:

Escribimos $A+iB=\sum_{r=1}^{n}e^{i(\alpha+r\theta)}=e^{i\alpha}\sum_{r=1}^{n}e^{ir\theta}$

La última suma es una serie geométrica de razón $e^{i\theta}$

Así $A+iB=e^{i\alpha}e^{i\theta}\dfrac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{i\alpha+\frac{n+1}{2}i\theta}\dfrac{e^{\frac{in\theta}{2}}-e^{-\frac{in\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}}$

o $A+iB=e^{i\alpha+\frac{n+1}{2}i\theta}\dfrac{sen\frac{n\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}}$

y separando las partes real e imaginaria tenemos

$$A = \cos(\alpha + \frac{n+1}{2}\theta)\frac{sen\frac{n\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}} \quad , \quad B = sen(\alpha + \frac{n+1}{2}\theta)\frac{sen\frac{n\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}}$$

Nota: $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad , \quad sen\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Problema 32.-

Describa el conjunto de puntos que representan las ecuaciones

$a)\ \ |z+2| = |z-1|$

$b)\ \ |z-1 = \operatorname{Re} z + 1|$

Solución:

$a)\ \ |z+2| = |z-1| \ \Rightarrow\ |x+iy+2| = |x+iy-1|$

o $\quad (x+2)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$

o $\quad 4x+4 = -2x+1$

de donde $\quad x = -\frac{1}{2}$

una recta vertical

$b)\ \ |z-1 = \operatorname{Re} z + 1| \ \Rightarrow\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x+1$

Desarrollando resulta $\quad y^2 = 4x$

una parábola que se abre hacia la derecha.

Problema 33.-

Exprese $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta \quad y \quad sen\theta$

Solución:

Tenemos $\cos 3\theta = \mathrm{Re}(\cos 3\theta + isen3\theta) = \mathrm{Re}(\cos\theta + isen\theta)^3$

$$\cos 3\theta = \mathrm{Re}(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta sen\theta - 3\cos\theta sen^2\theta - isen^3\theta)$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta sen^2\theta$$

Además también resulta

$$sen3\theta = \mathrm{Im}(\cos\theta + isen\theta)^3 = 3\cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta$$

CAPÍTULO 2

FUNCIONES

Recordatorio

Definición.- Si $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 es un punto de acumulación de G y si $\exists w_0$

tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $tal\ que$ $\forall z \in G, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$

entonces escribimos

$$\lim_{x \to z_0} f(z) = w_0$$

Observación.- Si el límite existe es único.

Definición.- Sea $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si $z_0 \in G$ o es un punto aislado del dominio y $\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0$, entonces decimos que la función es continua en z_0 . Además la función es continua en G si es continua en cada punto de G .

Lema.- Si $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en w_0 y $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_0$ entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(g(z)) = f(w_0) = f(\lim_{z \to z_0} g(z))$$

Definición.- Sea $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 un punto interior de G . La derivada de f en z_0 es

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y decimos que la función es diferenciable en ese punto. Si la función es diferenciable en un disco abierto centrado en ese punto decimos que es analítica en el punto. La función es analítica en el dominio si lo es en cada punto de éste.

Si la función es analítica en todo el plano complejo se llama entera

También podemos escribir

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

(h no es real necesariamente)

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

a) Sea f diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces las derivadas parciales de f

satisfacen $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

b) Supongamos con derivadas parciales f_x , f_y existen en un disco abierto

centrado en z_0 y son continuas en z_0 .Si estas derivadas satisfacen la ecuación en a)

entonces f es diferenciable en z_0 . En ambos casos a) y b) se cumple

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Si $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i(x, y)$ entonces

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad , \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Estas ecuaciones son condición necesaria para que la función sea diferenciable , pero la función es analítica en un abierto G si y solo si u, v tienen derivadas parciales continuas que satisfacen estas ecuaciones de Cauchy-Riemann .

Problema 1.-

Demuestre que $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ no existe

Solución:

En efecto , si nos vamos por el eje x (y=0) tenemos

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\bar{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

y por otro lado si nos vamos por el eje y (x=0) tenemos

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

El límite debe ser único , luego este límite no existe.

Problema 2.-

Demuestre que la función $f(z) = z^3$ es entera.

Solución:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_{0)}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^3 - z_0{}^3}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z^3 + zz_0 + z_0{}^2)(z - z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} (z^3 + zz_0 + z_0{}^2) = 3z_0{}^2$$

Problema 3.-

Demuestre que la función $f(z)=(\overline{z})^2$ es diferenciable en 0 solamente (esto significa que la función no es analítica en 0)

Solución:

Escribimos $z=z_0+re^{i\phi}$, entonces

$$\frac{(\overline{z})^2-(\overline{z_0})^2}{z-z_0}=\frac{(\overline{z_0+re^{i\phi}})-(\overline{z_0})}{z_0+re^{i\phi}-z_0}=\frac{((\overline{z_0})+re^{-i\phi})^2-(\overline{z_0})^2}{re^{i\phi}}=$$

$$=\frac{(\overline{z_0})^2+2\overline{z_0}re^{-i\phi}+r^2e^{-2i\phi}-(\overline{z_0})^2}{re^{i\phi}}=\frac{2\overline{z_0}re^{-i\phi}+r^2e^{-2i\phi}}{re^{i\phi}}=$$

$$=2\overline{z_0}e^{-2i\phi}+re^{-3i\phi}$$

Si $z_0\neq 0$ entonces el límite del lado derecho cuando $z\to z_0$ no existe pues si $r\to 0$ obtenemos diferentes respuestas para la aproximación horizontal $(\phi=0)$ y para la vertical $(\phi=\frac{\pi}{2})$. Por otro lado si $z_0=0$, entonces el lado derecho es igual a $re^{-3i\phi}=|z|e^{-3i\phi}$

Ahora

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{(\overline{z})^2}{z}\right|=\lim_{z\to 0}\left||z|e^{-3i\phi}\right|=\lim_{z\to 0}|z|=0$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{(\overline{z})^2}{z}=0$$

Problema 4.-

Demuestre que $f(z)=\overline{z}$ no es diferenciable en ninguna parte

Solución:

Tenemos

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{w}}{w}$$

este último límite no existe (Problema 1.-)

Problema 5.-

Verifique si la función $f(z)=z^{\overline{z}}$ es analítica o no

Solución:

$$f(z)=(x+iy)e^{x-iy}=(x+iy)e^{x}(\cos x-seny)$$

Ahora

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y+xe^{x}\cos y+ye^{x}seny$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y-ye^{x}seny-xe^{x}\cos y$$

Vemos que $\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$, luego la función no es analítica en general

Problema 6.-

Estudie la continuidad de la función $f(z)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{z^2-1}{z-1} & , \ z\neq 1 \\ 3 & , \ z=1 \end{array}\right\}$

Solución:

Claramente la función es continua en aquellos puntos diferentes de 1.

Ahora si $z=1$ tenemos

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}(z+1)=2$$

pero $f(1)=3\neq 2$, luego la función no es continua en el punto 1

Así entonces la función es continua en $\mathbb{C}-\{1\}$

Problema 7.-

Estudie la continuidad de la función

$$f(z)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{z^3-1}{z^2-1} & , \ z\neq \pm 1 \\ \dfrac{3}{2} & , \ z=\pm 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Si $z \neq \pm 1$ f es continua claramente

Ahora $\dfrac{z^3-1}{z^2-1} = \dfrac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{z^2+z+1}{z+1} = A$

y $\lim\limits_{z\to 1} A = \dfrac{3}{2}$, pero $\lim\limits_{z\to -1} A$ no existe en

Así, la función es continua en $-\{-1\}$

Problema 8.-

Demuestre que $w = \dfrac{z-a}{z-b}$, $a \neq b$ es 1-1 y sobre $\mathbb{C} = \mathbb{C}\ \{\infty\}$

Solución:

$$w(z_1) = w(z_2) \Rightarrow \frac{z_1-a}{z_1-b} = \frac{z_2-a}{z_2-b} \Rightarrow (z_1-a)(z_2-b) = (z_1-b)(z_2-a)$$

desarrollando y arreglando

$(b-a)(z_2-z_1) = 0$, $a \neq b \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w$ es $1-1$

Ahora sea $w = w_0$ debemos encontrar z tal que $w(z) = w_0$

$$\frac{z-a}{z-b} = w_0 \Rightarrow z-a = w_0(z-b) \Rightarrow z = \frac{a-bw_0}{1-w_0}$$

o sea existe z tal que $w(z) = w_0$. luego la función es sobre $\mathbb{C}$ y si z=b , $w_0 = \infty$

y la función es sobre $\mathbb{C}$.

Problema 9.-

Transforme las ecuaciones de Cauchy-Riemann a coordenadas polares.

solución:

Tenemos $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$

$x_r = \cos\theta$, $x_\theta = -rsen\theta$

$y_r = sen\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$

$u = u(x,y) \Rightarrow u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x\cos\theta + u_y sen\theta$ (1)

$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x rsen\theta + u_y r\cos\theta$ (2)

$v_r = v_x\cos\theta + v_y sen\theta$ (3)

$v_\theta = -v_x rsen\theta + v_y r\cos\theta$ (4)

de (1) $ru_r = u_x r\cos\theta + u_y rsen\theta = v_y r\cos\theta - v_x rsen\theta = v_\theta$

de donde $u_r = \dfrac{1}{r}v_\theta$

Análogamente de (2)

$$\frac{u_\theta}{r} = -u_x sen\theta + u_y\cos\theta = -v_y sen\theta - v_x\cos\theta = -v_r$$

de donde $\dfrac{u_\theta}{r} = -v_r$

Problema 10.-

Pruebe que si $f(z)=u+iv$, $\overline{f}(z)=u-iv$ son analíticas entonces la función es constante

Solución:

Tenemos

f *analítica* $\Rightarrow$ $u_x=v_y$ (1) , $u_y=-v_x$ (2)

$\overline{f}$ *analítica* $\Rightarrow$ $u_x=-v_y$ (3) , $u_y=v_x$ (4)

de (1) y (3) se deduce $u_x=-u_x \Rightarrow u_x=0$

y de (2) y (4) se tiene $u_y=-u_y \Rightarrow u_y=0$

o sea u no depende ni de x ni de y o es decir es constante

Análogamente v es constante y por lo tanto la función es constante

Problema 11.-

Demuestre que si $f(z)=u+iv$ es analítica y $uv=cte$, entonces la función es constante

Solución:

Tenemos $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ (1) y además $uv=cte \Rightarrow u_xv+uv_x=0$, $u_yv+uv_y=0$

entonces $\frac{u}{v}=-\frac{u_x}{v_x}$, $\frac{u}{v}=-\frac{u_y}{v_y}$ $\Rightarrow$ $\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}$ y por (1) $\frac{v_y}{v_x}=-\frac{v_x}{v_y}$ $\Rightarrow$ $v_y{}^2+v_x{}^2=0$

$\Rightarrow v_y=v_x=0 \Rightarrow v=cte.$

análogamente se obtiene que u es constante y por lo tanto la función es constante.

Problema.- 12

Pruebe $f = u + iv \quad analítica \quad y \quad v = u^2 \quad \Rightarrow \quad f = cte$

Solución:

$$f = u + iu^2 \;\Rightarrow\; u_x = (u^2)_y = 2uu_y \;,\; u_y = -2uu_x$$

$$\frac{u_x}{u_y} = -\frac{u_y}{u_x} \;\Rightarrow\; u_x{}^2 + u_y{}^2 = 0 \;\Rightarrow u_x = u_y = 0 \Rightarrow u = cte$$

$$\therefore \quad f = cte$$

Problema 13.-

Pruebe $f = u + iv \quad analítica \quad y \quad v^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad f = cte$

Solución:

$$u_x = v_y \quad , \; u_y = -v_x \;\Rightarrow\; 2uu_x = 2vv_x \;,\; 2uu_y = 2vv_y$$

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{v_x}{v_y} \;\Rightarrow\; \frac{v_y}{u_y} = -\frac{u_y}{v_y} \;(Por\ Cauchy - Rieman)$$

$\Rightarrow v_y{}^2 + u_y{}^2 = 0 \Rightarrow\; v_y = u_y = 0$ y análogamente se deduce

$u_x = v_x = 0$ luego $u, v\, ctes \;\Rightarrow f = cte$

Problema 14.-

Pruebe que si f es analítica y toma valores reales en G, entonces f es constante en G

Solución:

$$u_x = v_y = 0 \quad , \; u_y = -v_x = 0 \Rightarrow\; u = cte \Rightarrow f = cte$$

Problema 15.-

Nota : Definición .-Una transformación de Möbius en de la forma

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad-cb\neq 0$$

Sea una transformación de Möbius como la que se muestra . Calcule su inversa

Solución:

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad-cb\neq 0 \;\Rightarrow\; w(cz+d)=az+b$$

$$\Rightarrow cwz+wd=az+b\Rightarrow cwz-az=b-wd$$

$$\Rightarrow z(cw-a)=b-wd$$

$$z=\frac{b-wd}{cw-a}\Rightarrow \quad f^{-1}(z)=\frac{b-dz}{cz-a}=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

Problema 16.-

Pruebe que la derivada de una transformación de Möbius nunca es cero

Solución:

Sea $\quad f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad-cb\neq 0$

Entonces $\quad f'(z)=\dfrac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\dfrac{ad-cb}{(cz+d)^2}$

y como $\quad ad-cb\neq 0 \quad$, la derivada nunca es cero

Problema 17.-

Demuestre que una transformación de Möbius diferente de la transformación identidad puede mapear a lo más dos puntos fijos .

Solución:

Sea $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-cb\neq 0$

$f(z)=z=\dfrac{az+b}{cz+d}$, desarrollando resulta

$cz^2(d-a)z-b=0$

Ecuación de segundo grado que puede tener a lo más dos soluciones.

Problema 18.-

Demuestre que la transformación de Möbius $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ mapea la circunferencia unidad (excepto z=1) en el eje imaginario.

Solución:

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}}=\frac{z-\overline{z}}{2-(z+\overline{z})}=\frac{iy}{1-x}$$

Así entonces $f(z)\in eje\, y$ $(z\neq 1)$

Problema 19.-

Encuentre una transformación de Möbius tal que $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=\infty$

Solución:

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$f(1)=0 \Rightarrow \frac{a+b}{c+d}=0 \Rightarrow b=-a$$

$$f(2)=1 \Rightarrow \frac{2a+b}{2c+d}=1 \Rightarrow a=2c+d$$

$$f(3)=\infty \Rightarrow \frac{2a+b}{2c+d}=\infty \Rightarrow 3c+d=0 \Rightarrow d=-3c$$

$$\Rightarrow a=-c$$

$$a=a\ ,\ b=-a\ ,\ c=-a\ ,\ d=3a$$

$$f(z)=\frac{az-a}{-az+3a}=\frac{z-1}{-z+3}$$

Problema 20.-

Sea $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$. Calcule $f(i)\ ,\ f(-2i)\ ,\ f(\infty)$

Solución:

$$f(i)=\frac{i-1}{i+1}=\frac{i-1}{i+1}\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$$

$$f(-2i)=\frac{-2i-1}{-2i+1}=\frac{-2i-1}{-2i+1}\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

$$f(\infty)=\frac{1-\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=1$$

Problema 21.-

Encuentre una transformación de Möbius que transforme el círculo $|z-i|=1$ en el círculo $|w-1|=2$

Solución:

Si le aplicamos la transformación $\zeta=z-i$, el círculo se centra ahora en el origen si luego le aplicamos la transformación $\psi=2\zeta$, el círculo tiene ahora radio 2, por último si le aplicamos ahora la transformación $\xi=\psi+1$,el círculo tiene su centro ahora en en punto $(1,0)$. Entonces

$$\xi=\psi+1=2\zeta+1=2(z-i)+1=2z+(i-1)$$

es la transformación pedida

Problema 22.-

Encuentre la transformación de Möbius que mapee los puntos 1, i , -1 en los puntos 2 , 3 , 4 respectivamente.

Solución;

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$f(1)=\frac{a+b}{c+d}=2 \;\Rightarrow\; a+b=2c+2d$$

$$f(i)=\frac{ai+b}{ci+d}=3 \Rightarrow ai+b=3ci+3d$$

$$f(-1)=\frac{-a+b}{-c+d}=4 \;\Rightarrow\; -a+b=-4c+4d$$

$a=2-4i$, $b=2+4i$, $c=1-i$, $d=1+i$

$$f(z)=\frac{(2-4i)z+(2+4i)}{(1-i)z+(1+i)}$$

Problema 23.-

Sea $\quad f(z)=w=\dfrac{z}{1+|z|}$

a) Demuestre que la función es 1-1

b) Encuentre su inversa

Solución:

a) w es un múltiplo de z en su misma dirección y sentido w=kz k>0 ,entonces si

$$\frac{w}{1+|w|}=\frac{z}{1+|z|}\Rightarrow \frac{kz}{1+k|z|}=\frac{z}{1+|z|}\Rightarrow \frac{k}{1+k|z|}=\frac{1}{1+|z|}$$

$$\Rightarrow k+k|z|=1+k|z| \Rightarrow k=1 \Rightarrow w=z \Rightarrow f \;\; es \;\; 1-1$$

b) Análogamente si $\quad z=k'w \quad k'>0 \quad$ entonces

$$w=\frac{z}{1+|z|}\Rightarrow w=\frac{k'w}{1+k'|w|}\Rightarrow 1+k'|w|=k'$$

$$\Rightarrow k' = \frac{1}{1-|w|} \Rightarrow \; z = \frac{w}{1-|w|} \Rightarrow \quad f^{-1}(z) = \frac{z}{1-|z|}$$

Problema 24.-

Nota.- Una función f(x,y) se llama armónica si satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = 0$$

Nota.- Si f(z)=u(x,y)+iv(x,y) es analítica , entonces u , v son armónicas .

Demuestre que $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ es armónica y calcule su conjugada

Solución:

Tenemos $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 6x + (-2x) = 0 \Rightarrow f \;\; es \;\; Armónica$

sea f=u(x,y) ,debemos encontrar su conjugada v(x,y) tal que w=u+iv es analítica

y por Cauchy-Riemann tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 2 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Entonces

$$v = \int (3x^2 - 3y^2)dy = 3x^2 y - y^3 + C(x)$$

Ahora derivamos respecto a x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + +C'(x) = 6xy - 2 \Rightarrow \; C'(x) = -2 \Rightarrow C(x) = -2x + A$$

Así entonces

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 - 2x + A$$

Problema 25.-

Encuentre un vector unitario normal a la curva $x^2 - xy + y^2 - 7 = 0$ en cualquier punto.

Solución:

Aplicamos el operador Nabla

$$n = \frac{\nabla(x^2 - xy + y^2 - 7)}{\left|\nabla(x^2 - xy + y^2 - 7)\right|} = \frac{2x - y + i(2y - x)}{\sqrt{5x^2 - 8xy + 5y^2}}$$

Problema 26.-

Sea $f(z) = u + iv$, $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ $f(1+i) = \dfrac{1}{2}$

Calcule la función si es analítica

Solución:

$$u_x - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = v_y \Rightarrow v = \frac{x}{x^2+y^2} + C(x)$$

$$u_y = -v_x \;\Rightarrow\; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) \Rightarrow C(x) = A$$

$$v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + A$$

$$f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{x}{x^2+y^2} + A\right)$$

$$f(1+i) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + A\right)i = \frac{1}{2} \Rightarrow\; A = -\frac{1}{2}$$

$$f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\right)$$

Problema 27.-

Encuentre una transformación de Möbius que mapee la circunferencia $|z-(3+4i)|=5$

en la circunferencia $|z-(5+3i)|=6$

Solución:

Trasladamos la circunferencia con centro en el origen por z-(3+4i) y le damos radio 1por (z--(3+4i))/5 y la trasladamos a 5+3i con radio 6 por

$$f(z)=\frac{6(z-(3+4i))}{5}+5+3i=\frac{6z+(7-9i)}{5}$$

Problema 28.-

Sea $f(z)=u+iv$, f *analítica* , $f(0,\pi)=-1+i$, Re $f(z)=e^{-x}\cos y$

Encuentre la función

Solución:

$$u=e^{-x}\cos y\Rightarrow\ u_x=-e^{-x}\cos y=v_y\Rightarrow v=-e^{-x}seny+C(x)$$

$$u_y=-e^{-x}seny$$

$$v_x=e^{-x}seny+C'(x)=-u_y=e^{-x}seny\Rightarrow C'(x)=0\Rightarrow C=A$$

$$f(z)=e^{-x}\cos y+i(-e^{-x}seny+A)$$

$$f(0,\pi)=-1+i=-1+Ai=-1+i\Rightarrow\ A=1$$

$$f(z)=e^{-x}\cos y+i(-e^{-x}seny+1)$$

CAPÍTULO 3

INTEGRACIÓN

RECORDATORIO.-

Definición: Sea $\phi:[a,b]\subset\Re\to\mathbf{C}$, entonces

$$\int_a^b \phi(t)dt=\int_a^b \operatorname{Re}\phi(t)dt+i\int_a^b \operatorname{Im}\phi(t)dt$$

Para funciones con argumento complejo integramos sobre una curva γ que se debe parametrizar : $\gamma(t)$, $a\le t\le b$

Definición: Supongamos que γ es una curva suave parametrizada por $\gamma(t)$, $a\le t\le b$ y f una función compleja continua en γ entonces definimos

$$\int_\gamma f=\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Nota: Podemos extender esta definición para curvas diferenciables por tramos y resulta una suma de integrales por tramos.

Nota.-

Sea γ una curva suave , f,g funciones complejas continuas en γ y $c\in\mathbf{C}$ entonces

$$a)\int_\gamma (f+cg)=\int_\gamma f+c\int_\gamma g$$

b) Si γ se parametriza por $\gamma(t)$, $a\le t\le b$ definimos la curva $-\gamma$ como

$-\gamma(t)=\gamma(a+b-t)$, $a\le t\le b$ entonces

$$\int_{-\gamma} f=-\int_\gamma f$$

c) Si γ_1 y γ_2 tales que γ_2 empieza donde γ_1 termina , entonces definimos $\gamma_1\gamma_2$ siguiendo por γ_1 hasta su final y continuando por γ_2 hasta su final . Entonces

$$\int_{\gamma_1\gamma_{2\partial}} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz$$

d) $\left|\int_{\gamma} f\right| \leq \max_{z\in\gamma}|f(t)|\, Longitud\ \ de\, \gamma$

e) Longitud(γ)= $\int_{a}^{b}|\gamma'(t)|dt$

Nota.- Sea $G\subset \mathbb{C}$ abierto y γ una curva suave en G parametrizada por

$\gamma(t)$, $a\leq t\leq b$, f continua en G y F una primitiva de f en G

entonces $\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. En particular $\int_{\gamma} f$ es independiente del camino

$\gamma\subset G$ entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$

De aquí se tiene también que si $G\subset \mathbb{C}$ abierto , γ una curva cerrada en G y que tiene una

antiderivada en G , entonces

$\int_{\gamma} f = 0$

Nota.- Integral de Cauchy para un círculo

Sea C_R un círculo de radio R con centro en w dirigido en sentido contrario a las

manecillas del reloj y supongamos que f es analítica en cada punto del disco cerrado D

limitado por C_R . Entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-w}dz$$

Nota.- Integral de Cauchy

Sea f analítica en la región G , $w\in G$ y γ positivamente orientada ,simple, cerrada

suave, $G-contractible$ tal que w está dentro de γ .Entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-w}dz$$

Generalización

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz \quad n = 0,1,2,....$$

si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa y que contiene la curva cerrada simple γ y w un punto interior de γ.

Nota.- (Teorema del residuo) Si f es analítica en la región G, excepto en singularidades aisladas y si γ es una curva simple cerrada ,suave positivamente orientada, $G-contractible$

Entonces $\int_{\gamma} f = 2\pi i\sum_{k}\operatorname{Re} s_{z=z_k}(f(z))$ donde la sumatoria se toma sobre todas las singularidades z_k dentro de γ.

Nota.- Sea z_0 un polo de orden n , entonces

$$\operatorname{Re} s_{z=z_0}(f(z)) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_0)^n f(z))$$

Problema 1.-

Evalúe $\int_C z^2 dz$ a lo largo de la trayectoria de -1+i a 5+3i , formada por los segmentos de recta de -1+i a 5+i y de 5+i a 5+3i

Solución:

Como la función $f(z) = z^2$ es analítica , la integral es independiente de la trayectoria entonces

$$\int_C z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 /_{-1+i}^{5+3i} = -4 + \frac{196}{3} i$$

Otra forma sería evaluar la integral por tramos y sumar

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad , \quad dz = dx + idy$$

Sean $A = -1 + i$, $B = 5 + i$, $C = 5 + 3i$

A lo largo de AB y=1 , dy=0 luego

$$I_{AB} = \int_{-1}^{5} (x^2 - 1)dx + i\int_{-1}^{5} 2xdx = 36 + 24i$$

A lo largo de BC x=5 , dx=0 luego

$$I_{BC} = \int_{1}^{3} -10ydy + i\int_{1}^{3} (25 - y^2)dy = -40 + \frac{124}{3} i$$

Entonces $I = I_{AB} + I_{BC} = -4 + \dfrac{196}{3} i$

Problema 2.-

Consideremos la integral $\int_C \frac{dz}{z}$

Considere los casos el origen dentro de C y fuera de C

Solución:

El integrando tiene una singularidad en z=0 (polo simple) entonces la integral alrededor de cualquier contorno que contenga el origen es igual a la integral alrededor del círculo γ centrado en el origen y radio R entonces

$$z = \mathrm{R}e^{i\theta} \ , \ dz = i\,\mathrm{R}e^{i\theta}\, d\theta$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,\mathrm{R}e^{i\theta}}{\mathrm{R}e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i$$

Ahora si el origen no está dentro de C , por Cauchy la integral vale cero pues el integrando es una función analítica dentro y sobre cualquier curva que no encierre al origen.

Problema 3.- Evalúe $\int_C \frac{dz}{z^n}$, $n \neq 1$

Solución:

Si el contorno no encierra al origen vale cero (por Cauchy)

Si el contorno encierra al origen entonces consideramos un círculo de radio R centrado en el origen $z = Re^{i\theta}$, entonces

$$\int_C \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,Re^{i\theta}}{R^n e^{n\theta i}} d\theta = iR^{1-n}\left[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Problema 4.-

Evalúe la integral $\int_C \frac{z^4}{(z-1)^3} dz$ donde C encierra al punto z=1

Solución:

El integrando tiene un polo de orden 3 en z=1 , entonces $\int_C f(z)dz = \int_\gamma \frac{z^4}{(z-1)^3} dz$ donde

γ es un círculo centrado en z=1

escribimos $f_1 = z^4$ que es analítica dentro y sobre el círculo γ entonces

$$\int_C f(z)dz = \int_\gamma \frac{z^4}{(z-1)^3} dz = \int_\gamma \frac{f_1(z)}{(z-1)^3} = 2\pi i \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2 f_1(z)}{dz^2}\right]_{z=1} = 12\pi i$$

Problema 5.-

Evalúe $\int_C \frac{dz}{z(1+z)}$, donde C es a) el círculo $|z|=\frac{1}{2}$ b) el círculo $|z|=2$

Solución:

$$\operatorname{Re} s_{z=0} = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z+1)} = 1$$

$$\operatorname{Re} s_{z=-1} = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z(z+1)} = -1$$

a) En este caso la curva contiene el polo en z=0 pero no el polo en z=-1 , luego

$$\int_C \frac{dz}{z(1+z)} = 2\pi i(\operatorname{Re} s_{z=0}) = 2\pi i$$

b) Ahora ambos polos están dentro de la curva , entonces

$$\int_C \frac{dz}{z(1+z)} = 2\pi i(1-1) = 0$$

Problema 6.-

Evalúe $\int_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z}dz$ donde C es a) $|z|=1$, b) $|z|=3$

Solución:

El integrando tiene polos en z=0 , z= 2i , z=-2i

Tenemos

$$\operatorname{Re} s_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{z(z^3 - z^2 + z - 1)}{z(z^2+4)} = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Re} s_{z=2i} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z+2i)(z^3 - z^2 + z - 1)}{z(z-2i)(z+2i)} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{4} i$$

$$\operatorname{Re} s_{z=-2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)(z^3 - z^2 + z - 1)}{z(z-2i)(z+2i)} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{4} i$$

a) Si C es $|z| = 1$, entonces el único polo en z=0 está dentro del contorno , luego

$$\int_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz = 2\pi i(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}\pi i$$

b) Si C es $|z| = 3$, entonces todos los polos están dentro del contorno , luego

$$\int_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz = 2\pi i(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{4} i - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} i) = -2\pi i$$

Problema 7.-

Evalúe $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^3(z^2+2z+2)}$ donde C es el círculo $|z| = 3$

Solución:

Los polos del integrando son , un polo de orden 3 en z=0 y dos polos simples en z=-1+i

z=-1-i , todos dentro de C . Ahora en z=0 el residuo es

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^2+2z+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{-(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}\right)=\frac{1}{4}$$

en z=-1-i tenemos

$$\lim_{z\to -1-i}(z+1+i)\frac{1}{z^3(z+1+i)(z+1-i)}=-\frac{1}{8}+\frac{i}{8}$$

en z=-1+i tenemos

$$\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{1}{z^3(z+1+i)(z+1-i)}=-\frac{1}{8}-\frac{i}{8}$$

Sumando los residuos tenemos finalmente

$$\oint_C\frac{dz}{z^3(z^2+2z+2)}=2\pi i(0)=0$$

Problema 8.-

Usando una integral de contorno evalúe $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

Solución:

Tomamos $z=e^{i\theta}$, de donde $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $sen\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$

de donde se tiene

$$I = \oint_C \frac{dz}{iz(2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

donde C es el círculo unitario $|z| = 1$

El integrando tiene singularidades en $z = -2 \pm \sqrt{3}$, pero la única singularidad dentro de C

es $z = -2+\sqrt{3}$, Ahora

$$\operatorname{Re}s_{z=-2+\sqrt{3}} = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} (\frac{2}{i}(z+2-\sqrt{3})\frac{1}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

$$I = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

luego $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Problema 9.-

Calcule $\oint_\gamma \frac{z^{\frac{1}{m}}}{(z-1)^m}dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(1) = \frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)....(\frac{1}{m}-(m-2))$,

donde $\gamma(t) = 1+\frac{1}{2}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

Solución:

Sabemos que $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$

Entonces

$$f^{(m-1)}(z_0)=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z_0)^m}dw$$

Sea $f(z)=z^{\frac{1}{m}}\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}\Rightarrow f''(z)=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)z^{\frac{1}{m}-2}$,........

$$f^{(m-1)}(w)=\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)........(\frac{1}{m}-(m-2))z^{\frac{1}{m}-(m-1)}$$

Entonces

$$\int_{\gamma}\frac{z^{\frac{1}{m}}}{(z-1)^m}dz=\frac{2\pi i}{(m-1)!}f^{(m-1)}(1)=\frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)(\frac{1}{m}-2)....(\frac{1}{m}-(m-2))$$

Problema 10.-

Evalúe $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$

Solución:

Solo el polo de orden dos cae sobre el disco unidad , así

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz=2\pi i\operatorname{Res}_{z=0}=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(\frac{z^2e^z}{z^2(z^2-9)})=-\frac{2\pi i}{9}$$

Problema 11.-

Evalúe $\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{ze^z}{(z-a)^3}dz \quad , \quad a \ \ dentro \ \ de \ C$

Solución:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)}dw\ ,\quad f\,'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw,\ f\,''(z)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw$$

Entonces

$$f(a)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^3}$$

con $\quad f(w)=we^w \Rightarrow f\,'(w)=e^w+we^w \Rightarrow \ f\,''(w)=2e^w+we^w$

Así $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{ze^z}{(z-a)^3}dz=\dfrac{2e^a+ae^a}{2}=(1+\dfrac{a}{2})e^a$

Problema 12.-

Evalúe $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}}dz \quad , \quad n\geq -1$

Solución:

$$e^w=1+w+\frac{w^2}{2!}+....$$

$$e^{\frac{2}{z}}=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{2!z^2}+......$$

$$z^n e^{\frac{2}{z}} = z^n + 2z^{n-1} + \frac{2^2 z^{n-2}}{2!} + \ldots\ldots + \frac{2^k z^{n-k}}{n!} + \ldots$$

$$\operatorname{Re} s(z^n e^{\frac{2}{z}}, 0) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

Así $\quad \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}} dz = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

Problema 13.-

Calcule $\displaystyle\int_C \frac{3z-2}{z^2-z} dz$, siendo C la curva $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

recorrida en el sentido positivo.

Solución:

Los puntos 0 y 1 están dentro de C ,así

$$I = \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

donde C_1 encierra solo 0 y C_2 encierra solo 1. Luego

$$I = 2\int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-1} = 2(2\pi i) + 2\pi i = 6\pi i$$

Obs. Se aplicó primero separación por fracciones parciales

Problema 14.-

Calcule $I = \int_C \frac{senz}{(z+1)(z+2)}dz$ donde C es la curva $|z| = 3$

Solución:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Re}s(f(z), z=-1) + \operatorname{Re}s(f(z), z=-2))$$

$$= 2\pi i(\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{senz}{(z+1)(z+2)} + \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{senz}{(z+1)(z+2)})$$

$$= 2\pi i(sen2 - sen1)$$

Problema 15.-

Calcule $I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}dz$ donde C es $|z| = 3$

Solución:

$$I = (\operatorname{Re}sf(z), z=0) + (\operatorname{Re}s(fz), z=-1+i) + (\operatorname{Re}sf(z), z=-1-i)$$

$$\operatorname{Re}s(f(z), z=0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dt}(z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}) = \frac{t-1}{2}$$

$$\operatorname{Re}s(f(z), z=-1+i) = \lim_{z\to -1+i}((z+1-i)\frac{e^{zt}}{z^2(z+1-i)(z+1+i)}) = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$\operatorname{Re}s(f(z), z=-1-i) = \lim_{z\to -1-i}(\frac{e^{(-1-i)t}}{(-1-i)^2(2i)}) = -\frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

Sumando se tiene

$$I = \frac{t-1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} - \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

Problema 16.-

Calcule $I = \int_C \frac{z^3 e^{2z} \cos z}{(z^2+9)(z^2+16)} dz$, siendo C el borde del cuadrado de vértices

0;1;1+i;i , recorrido en el sentido positivo.

Solución:

Ninguno de los puntos singulares , -3i,3i.-4i,4i cae dentro de C luego el integrando en analítica dentro del cuadrado y por lo tanto por Cauchy I=0.

Problema 17.-

Sea $R > 0$, sea la curva $\beta(t) = \operatorname{Re} xp(it)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$. Encuentre la menor cota

superior para $\left| \int_\beta \exp(iz^2) dz \right|$

Solución:

$$z = R(\cos t + isent) \Rightarrow dz = R(-sent + i\cos t)dt \Rightarrow |dz| = Rdt$$

$$z^2 = R^2(\cos 2t + isen2t) = R^2 \exp(i2t)$$

$$e^{iz^2} = e^{i(R^2\cos 2t + iR^2 sen2t)} = e^{iR^2\cos 2t - R^2 sen2y} = e^{-R^2 sen2t}e^{iR^2\cos 2t}$$

Ahora

$$\left|\int_\beta \exp(iz^2)dz\right| \le \int_\beta \left|\exp(iz^2)dz\right| = \int_\beta < Re^{-R^2 sen2t}dt \le$$

$$\le \int_\beta \mathrm{Re}^{-R^2\frac{4}{\pi}t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{Re}^{-R^2\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{\pi(1-\exp(-R^2))}{4R}$$

$$(\,sen2t \ge \frac{4}{\pi}t \quad para \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4})$$

Problema 18.-

Calcule $\displaystyle\int_C \frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ donde C es la frontera del semicírculo

$$\{z \in \quad / |z| \le 5,\ y \ge 0\}$$

Solución:

Los polos encerrados por C son z=i y z=-1+i

en z=i el residuo es

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\}=\frac{9i-12}{100}$$

en z=-1+i el residuo es

$$\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)}=\frac{3-4i}{25}$$

Así

$$\int_C\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}=2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100}+\frac{3-4i}{25}\right\}=\frac{7\pi}{50}$$

Problema 19.-

Aplicando integración de contorno calcule $I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}sen^2(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta})d\theta$

Solución:

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{sen^2z}{(z-\frac{\pi}{6})i}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{sen^2z}{(z-\frac{\pi}{6})}dz\ ,\ f(z)=\frac{sen^2z}{(z-\frac{\pi}{6})}\ ,\ C:\left|z-\frac{\pi}{6}\right|=2$$

Ahora

$$\operatorname{Re}s(f(z),z=\frac{\pi}{6})=\lim_{z\to\frac{\pi}{6}}(z-\frac{\pi}{6})\frac{sen^2z}{z-\frac{\pi}{6}}=sen^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$$

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{sen^2z}{(z-\frac{\pi}{6})}dz=\frac{1}{2\pi i}(2\pi i\operatorname{Re}s(f(z),z=\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$$

Problema 20.-

Calcule aplicando integración de contorno $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, $0<a<1$

Solución:

Sea $z=e^{i\theta}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$ luego

$$I=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{1-2a\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=i\int_{|z|=1}\frac{dz}{a(z^2-(a+\frac{1}{a})z+1)}$$

los polos son $z_1=a$, $z_2=\frac{1}{a}$, *solo* $z_1\in|z|\le 1$

$$\operatorname{Re}s(f(z),z=a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{1}{a(z-\frac{1}{a})(z-a)}=\frac{1}{a^2-1}$$

Así

$$I=i2\pi i\frac{1}{a^2-1}=\frac{2\pi}{1-a^2}$$

CAPÍTULO IV

SERIES

Problema 1.-

Encuentre la serie de potencias ,en la forma indicada de la función $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$

en las tres regiones siguientes

a) $|z|<3$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

b) $|z-2|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$

c) $|z|>3$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^n}$

Solución:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}z}=-\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{3}z)^{-1}=-\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{3}z+(\dfrac{1}{3}z)^2+....+(\dfrac{1}{3}z)^n+....)$

para $|z|<3$, finalmente

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}z-\frac{1}{27}z^2-........$$

b) $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{(z-2)-1}=((z-2)-1)^{-1}=-(1+(z-2)+(z-2)^2+...)$

$\dfrac{1}{z-3}=-1-(z-2)-(z-2)^2-.......$ para $|z-2|<1$

c) $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{3}{z}}=\dfrac{1}{z}(1+\dfrac{3}{z}+(\dfrac{3}{z})^2+.....)$ para $|z|>3$

Problema 2.-

Determine la expansión de Taylor de la función $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2i)}$ alrededor del punto z=i

a) Directamente hasta el término $(z-i)^4$

b) Utilizando la expansión binomial

Solución:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2i)}=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{1}{z-2i}-\dfrac{1}{z})$

$f(i)=1$

$f'(z)=\dfrac{1}{2i}(-\dfrac{1}{(z-2i)^2}+\dfrac{1}{z^2})\Rightarrow \quad f'(i)=0$

$f''(z)=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{2}{(z-2i)^3}-\dfrac{2}{z^3}) \quad \Rightarrow \quad f''(i)=-2$

$f'''(z)=\dfrac{1}{2i}(-\dfrac{6}{(z-2i)^4}+\dfrac{6}{z^4})\Rightarrow \quad f'''(i)=0$

$f^{iv}(z)=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{24}{(z-2i)^5}-\dfrac{24}{z^5}) \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(i)=24$

Así

$f(z)=1-\dfrac{2}{2!}(z-i)^2+\dfrac{24}{4!}(z-i)^4-...=1-(z-i)^2+(z-i)^4-...$

b) Para usar la expansión binomial escribimos $z(z-2i)=((z-i)^2-i^2)$

Entonces

$f(z)=(1+(z-i)^2)^{-1}=1-(z-i)^2+(z-i)^4......$

válido para $|z-i|<1$ con radio de convergencia 1

Problema 3.-

Para $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$ encuentre la expansión en serie de Laurent alrededor de

a) z=0 b) z=-1 .Determine la región donde es válida

Solución:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}=\dfrac{1}{z^2}(1+z)^{-1}=\dfrac{1}{z^2}(1-z+z^2-z^3+.....)==\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+1-z+z^3.....$

válido para $|z|<1$

b) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}=\dfrac{1}{z+1}(z+1-1)^{-2}=(1-(z+1))^{-2}=$

$$=\frac{1}{z+1}(1+2(z+1)+3(z+1)^2+....)=\frac{1}{z+1}+2+3(z+1)+4(z+1)^2....$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-z+z^3.....$$

válido para $0<|z+1|<1$

Problema 4.-

Determine la serie de Laurent de $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ válida para

a) $1<|z|<3$, b) $|z|>3$, c) $0<|z+1|<2$ d) $|z|<1$

Solución:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)=\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2z}(1+\frac{1}{z})^{-1}-\frac{1}{6}(1+\frac{1}{3}z)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{2z}(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+....)-\frac{1}{6}(1-\frac{1}{3}z+\frac{1}{9}z^2-\frac{1}{27}z^3+....)=$$

$$=....-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}z-\frac{1}{54}z^2+\frac{1}{162}z^3......$$

b) Ahora escribimos

$$f(z)=\frac{1}{2z}(\frac{1}{1+\frac{1}{z}})-\frac{1}{2z}(\frac{1}{1+\frac{3}{z}})=\frac{1}{2z}(1+\frac{1}{z})^{-1}-\frac{1}{2z}(1+\frac{3}{z})^{-1}$$

$$=\frac{1}{2z}(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+...)-\frac{1}{2z}(1-\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{27}{z^3}+....)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}-\frac{40}{z^5}+.....$$

c) Tomamos $z+1=u$, $0<|u|<2$

$$f(u)=\frac{1}{u(u+2)}=\frac{1}{2u(1+\frac{1}{2}u)}=\frac{1}{2u}(1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{8}u^3...)$$

$$f(z)=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(z+1)-\frac{1}{16}(z+1)^2.....$$

d) Ahora

$$f(z)=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{6(1+\frac{1}{3}z)}=\frac{1}{2}(1+z)^{-1}-\frac{1}{6}(1+\frac{1}{3}z)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}(1-z+z^2-z^3+....)-\frac{1}{6}(1-\frac{1}{3}z+\frac{1}{9}z^2-\frac{1}{27}z^3+...)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2-\frac{40}{81}z^3....$$

Problema 5.-

Determine la expansión de Laurent de la función $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ alrededor de a) z=0 ,b)

$z = a \neq 0$, c) $z = \infty$

Solución:

a) $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + ...\quad 0 \leq |z| < \infty$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + ...$$

$$\Rightarrow \quad z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + ...$$

b) En este caso tenemos una serie de Taylor alrededor de z=a

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = a^3 e^{\frac{1}{a}} + (z-a)(3a^2 e^{\frac{1}{a}} - a e^{\frac{1}{a}}) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 (6a e^{\frac{1}{a}} - 4 e^{\frac{1}{a}} + \frac{1}{a^2} e^{\frac{1}{a}}) + ...$$

c) Aquí hacemos $w = \dfrac{1}{z}$

$$f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + ...)$$

$$= \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{2!w} + \frac{1}{3!} + \frac{w}{4!} + ... \qquad 0 < |w| < \infty$$

Problema 6.-

Escriba la serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

Solución:

Sabemos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad , \quad |z| < \infty$$

Luego

$$f(z) = \frac{e^2 e^{2(z-1)}}{(z-1)^3} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!(z-1)^3} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(z-1)^{n-3} =$$

$$= e^2 \left[(z-1)^{-3} + 2(z-1)^{-2} + 2(z-1)^{-1} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(z-1) + ... \right]$$

Problema 7.-

Cuál es la región de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{nz}{z-2}}$

Solución:

$$f(z) = e^{\frac{nz}{z-2}} \Rightarrow \sum_{n=1\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} (f(z))^n \qquad \text{converge si y solo si}$$

$$|f(z)| \leq 1 \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + y^{2}}{(x-2)^2 + y^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

se trata del disco de radio 1 y centro (1,0) $\quad z \neq 2$

Problema 8.-

Desarrollar en serie de Taylor alrededor del punto z=1 la función

$$f(z)=\frac{z^2+2z+2}{z-4}$$

Solución:

Podemos escribir la función como

$$f(z)=7+(z-1)+\frac{26}{z-4}$$

y desarrollamos el último término

$$\frac{26}{z-4}=-\frac{26}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}(z-1)}\right]=-\frac{26}{3}\left[1+\frac{1}{3}(z-1)+\frac{(z-1)^2}{3^2}+....\right]$$

Entonces

$$f(z)=7+(z-1)-\frac{26}{3}\left[1+\frac{1}{3}(z-1)+\frac{(z-1)^2}{3^2}+....\right]$$

Problema 9.-

Hallar una función analítica $f(z)$ tal que

$$\operatorname{Re} f(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}x^{2n-2k}y^{2k}\ ,\quad z=x+iy$$

Solución:

$$\operatorname{Re} f(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} x^{2n-2k} y^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2n-2k} (iy)^{2k} = \operatorname{Re}\left[(x+iy)^{2n}\right]$$

Así $\quad f(z) = z^{2n}$

Problema 10.-

Si $\quad f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ encuentre el coeficiente de z^2 en la expansión de Laurent de esta función con $|z| < 1$

Solución:

Aplicando fracciones parciales podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{2}(1+z)^{-1} - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}z)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{9}z^2 - \frac{1}{27}z^3 + \ldots.) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \ldots\ldots..$$

luego el coeficiente de z^2 es $\dfrac{13}{27}$

Problema 11.-

Determine la región de convergencia de la serie

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} n\left[\frac{z^3-3iz^2-3z+i}{8}\right]^n$$

Solución:

Escribimos

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} n\left[\frac{(z-i)^3}{8}\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{8^n}(z-i)^{3n}$$

Ahora Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{8^n}(z-i)^{3n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{8}\left|(z-i)\right|^3<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|(z-i)\right|<2$$

Así la región de convergencia es el círculo $|z-i|<2$

Problema 12.-

Calcule el coeficiente de $(z-4)^{-3}$ en el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{z^2+9} \quad \text{en la región } |z-4|>5$$

Solución:

$$\frac{1}{z^2+9} = -\frac{1}{6i}\frac{1}{z+3i} + \frac{1}{6i}\frac{1}{z-3i}$$

$$\frac{1}{z+3i} = \frac{1}{z-4}\frac{1}{1-\left[-\frac{4+3i}{z-4}\right]} = \frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4+3i)^k}{(z-4)^k} \quad , \quad 5<|z-4|$$

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{z-4}\frac{1}{1-\left[-\frac{4-3i}{z-4}\right]} = \frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4-3i)^k}{(z-4)^k} \quad , \quad 5<|z-4|$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9} = -\frac{1}{6i}\frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4+3i)^k}{(z-4)^k} + \frac{1}{6i}\frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4-3i)^k}{(z-4)^k}$$

El exponente -3 corresponde a k=2 y resulta finalmente -8

Problema 13 .-

Encuentre el coeficiente de z^{-5} en el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{4z-z^2} \quad , \quad |z|>4$$

Solución:

Tenemos

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{-1}{z^2(1-\frac{4}{z})} = -\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+2}}$$

el coeficiente pedido corresponde a k=3 y vale -64.

Problema 14.-

Investigue la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n2^{n+1}z^{2n}$

Solución:

Criterio de la razón

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)2^{n+2}z^{2n+2}}{(-1)^n n2^{n+1}z^{2n}}\right| = \left|\frac{n+1}{n}2z^2\right|$$

el límite de este último término cual n crece indefinidamente es $2\left|z^2\right|$

que debe ser menor que 1 para la convergencia , de donde resulta

$|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ que representa un disco abierto centrado en el origen de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$

En la frontera, si hacemos $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ resulta

$|u_n(z)| = n2^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n} = 2n$ que no converge si n crece

Problema 15.-

Investigue la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 2^n}$

Solución:

Criterio de la razón

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{2}$$ luego la serie converge para $|z| < 2$

Para $|z| = 2$ también converge pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge

Problema 16.-

Determine la serie de Laurent para la función $f(z) = z\cos\frac{1}{z}$

Solución:

Tenemos

$$f(z) = z\cos\frac{1}{z} = z(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + ...) =$$

$$= z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + ...$$

que converge para todo z diferente de cero

Problema 17.-

Desarrollar $f(z) = \frac{z - senz}{z^3}$ en serie de Laurent

Solución:

$$f(z)=\frac{z-senz}{z^3}=\frac{1}{z^3}(z-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-.....))=$$

$$=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-.......$$

que converge para todo z

Problema 18.-

Obtenga la expansión de Laurent de la función $f(z)=\frac{1}{z-2}senz\ ,\ \ |z-2|\neq 0$

Solución:

Escribimos

$$f(z)=\frac{1}{z-2}senz=\frac{sen(z-2+2)}{z-2}=\frac{sen(z-2)\cos 2+\cos(z-2)sen2}{z-2}=$$

$$=\frac{1}{z-2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^{2n}}{(2n)!}sen2\right]$$

Problema 19.-

Obtenga la serie de Taylor de la función $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ alrededor del punto $z=\dfrac{1}{4}$

Solución:

Tenemos

$$f^{(n)}(\frac{1}{4})=\left[\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}\right]_{z=\frac{1}{4}}=n!(\frac{4}{3})^{n+1}$$

entonces

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{3})^{n+1}(z-\frac{1}{4})^{n}$$

Problema 20.-

Obtenga la serie de MacLaurin de la función $f(z)=sen^{3}z$

Solución:

Tenemos $\quad f(z)=sen^{3}z=\dfrac{3}{4}senz-\dfrac{1}{4}sen3z$

$$senz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{9^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3(1-9^n)z^{2n+1}}{4(2n+1)!}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Muchas son las aplicaciones de las funciones de variable compleja

A.-Series de Fourier en forma compleja

Una Serie de Fourier es de la forma

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nwt + \sum_{n=0}^{\infty} b_n sennwt$$

Que representa una función periódica de período T , ahora

$$sennwt = \frac{1}{2i}(e^{inwt} - e^{-inwt})$$

$$\cos nwt = \frac{1}{2}(e^{inwt} + e^{-inwt})$$

Entonces

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2}(e^{inwt} + e^{-inwt}) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{2i}(e^{inwt} - e^{-inwt}) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}a_n (e^{inwt} + e^{-inwt}) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}ib_n (e^{inwt} - e^{-inwt})$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inwt} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inwt}\right]$$

Escribimos

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad , \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad , \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Entonces

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inwt} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inwt}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inwt} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inwt}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwt}$$

que es la forma compleja de la serie de Fourier

B.- Funciones Armónicas

Las funciones armónicas son aquellas que satisfacen la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$$

Problema.-

Si $f(|z|)$ es armónica y no depende del argumento de z, encuentre $f(z)$

Solución:

$$f_x = f'(|z|)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx} = f''(|z|)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+f'(|z|)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$$

$$f_{xx} = f''(|z|)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(|z|)\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xx} = f''(|z|)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(|z|)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Análogamente

$$f_{yy} = f''(|z|)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(|z|)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Entonces

$$f_{xx}+f_{yy}=f''(|z|)+\frac{f'(|z|)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Hacemos $u=f'$, $|z|=v$

de donde planteamos

$u=f'$, $|z|=v$, luego

$$u'+\frac{u}{v}=0\Rightarrow \quad \frac{du}{dv}=-\frac{u}{v}\ \Rightarrow\ \frac{du}{u}=-\frac{dv}{v}\ \Rightarrow \ln u=-\ln v+\ln a$$

de donde resulta

$$u=\frac{a}{v}=f'\Rightarrow \quad f\left(|z|\right)=a\ln|z|+b$$

C.- Cálculo de integrales reales

Problema.-

Evalúe

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3sen\theta}$$

Solución:

Sea

$$z=e^{i\theta} \quad , \quad sen\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$$

$$I=\int_C\frac{\frac{dz}{iz}}{5+3(\frac{z-z^{-1}}{2i})}=\int_C\frac{2dz}{3z^2+10iz-3}$$

donde C es el circulo unitario con centro en el origen

Los polos del integrando son

$$-3i \quad , \quad -\frac{i}{3}$$

pero solo $-\frac{i}{3}$ cae dentro de C , el residuo en este punto es

$$\lim_{z\to-\frac{i}{3}}(z+\frac{i}{3})(\frac{2}{3z^2+10iz-3}) = \lim_{z\to-\frac{i}{3}}\frac{2}{6z+10i}=\frac{1}{4i}$$

Luego $I = 2\pi i(\frac{1}{4i})=\frac{\pi}{2}$

D.-Transformación de regiones y curvas , por ejemplo para resolver problemas de contorno en un recinto más apropiado

Problema.-

Sea la curva $C:|z|=k \;,\; k\neq 1$

La transformación $f(z)=\frac{z^2+1}{z}$, transforma C en otra curva que encierra una cierta área

Calcule dicha área

Solución:

$$z=ke^{i\theta} \;\Rightarrow\; f(z)=ke^{i\theta}+\frac{1}{ke^{i\theta}}=(k+\frac{1}{k})\cos\theta+i(k-\frac{1}{k})sen\theta$$

hacemos

$$u=(k+\frac{1}{k})\cos\theta \quad , \quad v=(k-\frac{1}{k})sen\theta$$

Ahora

$$\frac{u^2}{(k+\frac{1}{k})^2}+\frac{v^2}{(k-\frac{1}{k})^2}=1$$

Se trata de una elipse cuya área es

$$A = \pi ab = \pi(k+\frac{1}{k})(k-\frac{1}{k}) = \pi(k^2-\frac{1}{k^2})$$

E.-Aplicaciones al campo de la Física

Las matrices con entradas en el cuerpo de los complejos tienen un uso relevante en la Mecánica Cuántica.

Problema.-

Encuentre los valores propios y vectores propios de la matriz Hermitiana (o Hermítica)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ -3i & -1-i & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2+i & 3i \\ -2-i & \lambda & -1+i \\ -3i & -1-i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 16\lambda - 12 = 0$$

de donde resulta

$$\lambda = -1 \ , \ 6 \ , \ -2$$

Para el valor -1 tenemos

$$\begin{bmatrix} -4 & -2+i & 3i \\ -2-i & -1 & -1+i \\ -3i & -1-i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde resulta

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

y análogamente para los valores 6 y -2 se obtiene

(1-21i,6-9i,13) y (1+3i, -2-i,5) respectivamente

F.-Aplicaciones a circuitos eléctricos

Problema.-

Utilizando la notación fasorial determinar la corriente $i(t)$ en un circuito descrito por la ecuación íntegro-diferencial

$$4i + 8\int i dt - 3\frac{di}{dt} = 50\cos(2t + 75^o)$$

Solución:

Utilizando la notación fasorial y reemplazando la unidad imaginaria por j para no confundirse con la intensidad de corriente queda

$$4I + \frac{8i}{jw} - 3jwI = 50\left[75^o\right)$$

$w = 2$, luego

$$I(4 - 4j - 6j) = 50\left[75^o\right)$$

$$I = \frac{50\left[75^o\right)}{4 - 10j} = \frac{50\left[75^o\right)}{10,77\left[-62.2^o\right)} = 4,642\left[143,2^o\right)$$

Entonces $i(t) = 4,642\cos(2t + 143,2^o)$

G.-Aplicación al cálculo de la transformada inversa de Laplace

Problema.-

Obtenga la transformada inversa de Laplace de la función

$$f(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$$

Solución:

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st}ds}{(s+1)(s-2)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{st}ds}{(s+1)(s-2)^2}$$

$$=\sum residuos\ de\quad \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\quad en\ los\ \ polos\ \ s=-1\ y\ s=2$$

en s=-1 tenemos

$$\lim_{s\to-1}(s+1)\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right]=\frac{1}{9}e^{-t}$$

en s=2 tenemos

$$\lim_{s\to2}(s-2)^2\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right]=\lim_{s\to2}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right]$$

$$=\lim_{s\to2}\frac{(s+1)te^{st}-e^{st}}{(s+1)^2}=\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{9}e^{2t}$$

Así entonces

$$F(t)=\frac{1}{9}e^{-t}+\frac{1}{3}te^{2t}-\frac{1}{9}e^{2t}$$

H.-Teorema de Green en forma compleja

Si $B(z,\bar{z})$ es continua y tiene derivadas parciales continuas en la región R y sobre su frontera C , donde z=a+bi , $\bar{z}=a-bi$ entonces el teorema de Green se pude escribir como

$$\int_C B(z,\bar{z})dz = 2i\iint_R \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}dxdy$$

En efecto ,

Sea $B(z,\bar{z}) = P(x,y)+iQ(x,y)$, entonces por Green tenemos

$$\int_C B(z,\bar{z})dz = \int_C (P+iQ)(dx+idy) = \int_C Pdx - Qdy + i\int_C Qdx + Pdy$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= i\iint_R \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \right]dxdy$$

$$= 2i\iint_R \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}dxdy$$

Que es la forma compleja del Teorema de Green.

Por otra parte si C es una curva cerrada simple que encierra una región R , entonces el área de dicha región está dada por

$$A = \frac{1}{2i}\int_C \bar{z}dz$$

que es la forma compleja de expresar dicha área

Tabla de Derivadas

1.- $\frac{d}{dz}(c)=0$

2.- $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$

3.- $\frac{d}{dz}e^z = e^z$

4.- $\frac{d}{dz}a^z = a^z \ln a$

5.- $\frac{d}{dz} senz = \cos z$

6.- $\frac{d}{dz}\cos z = -senz$

7.- $\frac{d}{dz} tgz = \sec^2 z$

8.- $\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$

9.- $\frac{d}{dz}\sec z = \sec z tgz$

10.- $\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$

11.- $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$

12.- $\frac{d}{dz}\log_a z = \frac{\log_a e}{z}$

13.- $\frac{d}{dz} sen^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

14.- $\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

15.- $\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$

16.- $\frac{d}{dz}\cot^{-1} z = -\frac{1}{1+z^2}$

17.- $\frac{d}{dz}\sec^{-1} z = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$

18.- $\frac{d}{dz}\csc^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$

19.- $\frac{d}{dz} senhz = \cosh z$

20.- $\frac{d}{dz}\cosh z = senhz$

21.- $\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$

22.- $\frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$

23.- $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$

24.- $\frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$

25.- $\frac{d}{dz} senh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

26.- $\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

27.- $\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$

28.- $\frac{d}{dz}\coth^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$

29.- $\frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$

30.- $\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{1+z^2}}$

Tabla de Integrales

1.- $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad , \quad n \neq 1$

2.- $\int \frac{dz}{z} = \ln z$

3.- $\int e^z dz = e^z$

4.- $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$

5.- $\int senzdz = -\cos z$

6.- $\int \cos zdz = senz$

7.- $\int \tan zdz == \ln \sec z$

8.- $\int \cot zdz = \ln senz$

9.- $\int \sec zdz = \ln(\sec z + \tan z)$

10.- $\int \csc zdz = \ln(\csc z - \cot z)$

11.- $\int \sec^2 zdz = \tan z$

12.- $\int \csc^2 zdz = -\cot z$

13.- $\int \sec z \tan zdz = \sec z$

14.- $\int \csc z \cot zdz = -\csc z$

15.- $\int senhzdz = \cosh z$

16.- $\int \cosh zdz = senhz$

17.- $\int \tanh zdz = \ln \cosh z$

18.- $\int \coth zdz = \ln senhz$

19.- $\int \operatorname{sech} z dz = \tan^{-1}(senhz)$

20.- $\int \operatorname{csch} z dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$

21.- $\int \operatorname{sech}^2 z dz = \tanh z$

22.- $\int \operatorname{csch}^2 z dz = -\coth z$

23.- $\int \operatorname{sech} z \tanh z dz = -\operatorname{sech} z$

24.- $\int \operatorname{csch} \coth z dz = -\operatorname{csch} z$

25.- $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$

26.- $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a}$

27.- $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln(\frac{z-a}{z+a})$

28.- $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = sen^{-1} \frac{z}{a}$

29.- $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a} \ln(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}})$

30.- $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{z}$

31.- $\int \sqrt{z^2 \pm a^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$

32.- $\int \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2} sen^{-1} \frac{z}{a}$

33.- $\int e^{az} senbzdz = \frac{e^{az}(asenbz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$

34.- $\int e^{az} \cos bzdz = \frac{e^{az}(a\cos bz + bsenbz)}{a^2 + b^2}$

BIBLIOGRAFÍA

-Variable Compleja -M.R.Spiegel - McGRAW-HILL

-Variable compleja y Aplicaciones -R.Churchill - MaGRAW-HILL

-Variable Compleja Con Aplicaciones -W.Derrick- Ed. Iberoamérica

-Advanced Modern Engineering Mathematics -G.James -Prentice Hall

-Complex Analysis- Th.Gamelin - Springer

-Complex Variables A.Wunsch -Pearson

-Advanced Engineering Mathematics -E.Kreyszig- Limusa Wiley

-Complex Analysis -C.Berenstein- Springer

-Complex Analysis -R.B. Ash - Courier Corporation

DEPARTAMENTO DE
MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE LA SERENA

Ediciones Digitales
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
Cisternas 1200, La Serena, Chile
edicionesdmatuls@userena.cl
http://www.dmatuls.cl