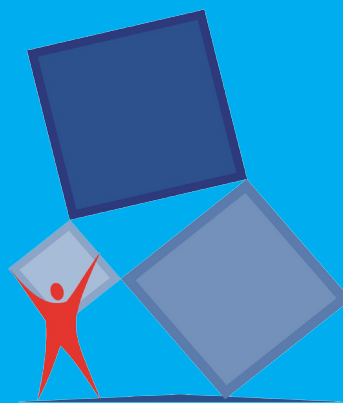


FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Análisis Funcional y Teoría de Operadores

2017



DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LA SERENA

MARCO CORGINI VIDELA



**Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena (ULS)**

Cisternas 1200, La Serena, Chile

edicionesdmatuls@userena.cl

<http://www.dmatuls.cl>

The contents in this book are protected by the Chilean Copyright Law 17.336 -in its current version- Law 28.933, and by international copyright laws. All rights are reserved. Reproduction is authorized for academic and/or educational purposes only. The commercialization of this book is not allowed.

Design of logo, template, including cover and back cover: Departamento de Matemáticas, ULS.

*FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE
LA MECÁNICA CUÁNTICA
Análisis Funcional y Teoría de
Operadores*

Marco Corgini Videla

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. PRODUCTOS INTERNOS SOBRE ESPACIOS ARBITRARIOS	2
3. TÓPICOS DE ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN FINITA	3
3.1. Vectores y valores propios	3
3.2. Diagonalización de matrices	6
3.3. Productos internos sobre \mathbb{R}^n	12
3.4. Productos internos sobre \mathbb{C}^n	14
3.5. Productos internos sobre espacios de dimensión finita	20
4. ESPACIOS MÉTRICOS Y NORMADOS	22
4.1. Espacios métricos y normados	22
4.2. Operadores lineales en espacios vectoriales normados	25
4.3. Espacios de Hilbert	31
5. TEORÍA ESPECTRAL DE OPERADORES ACOTADOS	34
6. TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES NO ACOTADOS	35
7. MECÁNICA CUÁNTICA	37
7.1. Generalidades	37
7.2. Conceptos básicos	41
7.3. El principio de incertidumbre	41
8. PRIMERA CUANTIZACIÓN	43
8.1. Primera cuantización: el oscilador armónico	43
9. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER	45
9.1. Caso unidimensional	45
10. SEGUNDA CUANTIZACIÓN	48

10.1.	Segunda cuantización: el oscilador armónico	48
10.2.	Segunda cuantización. Bosones	52
11.	TRANSICIONES DE FASE	58
11.1.	Sistemas de Bose	58
11.2.	Estados y observables	60
11.3.	Segunda cuantización	60
11.4.	Función de partición, energía libre y presión. Conjuntos canónico y gran canónico	61
11.5.	Estado de Gibbs	62
11.6.	Límite termodinámico	62
11.7.	Modelo de Bose de partículas interactuantes	63
11.8.	Operadores de modelos de Campo Medio- Tipo Huang-Davies	64
11.9.	Sistemas estables y superestables	64
11.10.	Tipos de condensación bosónica	64
11.11.	Condensación tipo I	65
11.12.	Leyes de conservación y reglas de selección	66
11.13.	Condensación de Bose-Einstein y rupturas de simetrías	68
11.14.	Gas de bosones débilmente interactuantes	71
11.15.	Gases confinados	73
11.16.	Algunos comentarios	75

1. INTRODUCCIÓN

Este libro, compendio de los temas tratados en el curso de verano *Fundamentos de la Mecánica Cuántica* realizado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de La Serena, en el período comprendido entre el 2 y el 13 de enero de 2017, está dirigido principalmente a estudiantes de matemáticas y física, tanto de pregrado como de postgrado y también a alumnos de los últimos años de carreras de ingeniería con un nivel de conocimientos previos relativamente alto en tópicos de análisis real y álgebra lineal. Su propósito no es el de constituirse en un tratado acabado sobre el tema, sino que presentar de una manera simple y abreviada la conexión existente entre el análisis funcional la teoría de operadores y aquellos principios que fundan, desde el punto matemático, la teoría cuántica no relativista.

Los capítulos 1 al 3 están dedicados a presentar conceptos básicos de álgebra lineal, incluida la representación espectral de operadores lineales simétricos definidos sobre espacios vectoriales de dimensión finita. El capítulo 4 versa sobre espacios métricos en general, y espacios vectoriales normados, de Banach y Hilbert. Los capítulos 5 y 6 están dedicados a la presentación de versiones del teorema espectral asociadas a representaciones integrales de operadores autoadjuntos acotados (simétricos) y no acotados, definidos sobre espacios de Hilbert.

En los capítulos 7 al 12, son analizados, en el escenario matemático antes descrito, los postulados básicos de la Mecánica Cuántica, las nociones de observables y estados cuánticos, la ecuación de Schrödinger, los formalismos de primera y segunda cuantización, además de la descripción de sistemas de partículas en el contexto de dicha teoría física, incluyendo su aplicación a la teoría tradicional de transiciones de fase (caso bosónico) en el denominado límite termodinámico.

2. PRODUCTOS INTERNOS SOBRE ESPACIOS ARBITRARIOS

Definición 2.1. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{F} ($= \mathbb{R}$ o \mathbb{C}). Un producto interno es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ o \mathbb{C} tal que:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$.
1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$.
4. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.
5. $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

De estas propiedades es fácil deducir

6. $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Definición 2.2. Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ se dicen ortogonales con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ o \mathbb{C} :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Ejemplo 2.3. Sea \mathbb{C}^n el espacio de vectores de $n \times 1$ con componentes complejas. Se denomina producto interno euclideo al siguiente:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = 1, \dots, n$.

3. TÓPICOS DE ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN FINITA

3.1. Vectores y valores propios.

Definición 3.1. *Sea A una matriz cuadrada de orden n . Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice valor propio de A si existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, distinto de cero, tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. El vector \mathbf{x} se denomina vector propio asociado al valor propio λ .*

Definición 3.2. *Toda combinación lineal de vectores propios de A asociados a un valor propio fijo λ , es también un vector propio de A asociado a dicho valor propio. Luego el conjunto generado por todas las combinaciones lineales no nulas de vectores, con el mismo valor propio, constituye un subespacio vectorial de \mathbb{C}^n al cual se denomina **subespacio propio asociado a λ** . Por otro lado, la dimensión de dicho subespacio se denomina **multiplicidad geométrica de λ***

Proposición 3.3. *Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. λ es un valor propio de A .
2. El sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tiene solución única.
3. La matriz $A - \lambda I$ no es invertible.
4. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ ($p(\lambda)$: Polinomio característico).

Definición 3.4. *El conjunto de los valores propios de A es llamado **Espectro** de A y se denota por $\sigma(A)$.*

Puesto que $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n , tiene a lo más n raíces y por lo tanto, el espectro $\sigma(A)$ de A es un subconjunto finito de \mathbb{C} .

Definición 3.5. *La Resolvente de A es el conjunto de los números complejos para los cuales $A - \lambda I$ posee una inversa. Se denota por $\rho(A)$.*

Definición 3.6. *El número de veces que un valor propio λ de una matriz cuadrada A de orden n se repite como raíz del polinomio característico se denomina **Multiplicidad Algebraica** del valor propio.*

Claramente

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda_{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

donde $a_j \in \mathbb{C}^n$, $j = 0, \dots, n$.

Proposición 3.7. *Dado el valor propio λ de A , los conjuntos $\ker(A - \lambda I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ y $\text{ran}(A - \lambda I) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \exists \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ son subespacios vectoriales de \mathbb{C}^n .*

Proposición 3.8. *Sean $\beta \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A con vector propio \mathbf{x} , entonces:*

1. $\beta\lambda$ es un valor propio de βA asociado al vector propio \mathbf{x} .
2. $\lambda - \beta$ es un valor propio de $A - \beta I$ asociado al vector propio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. λ^j es valor propio de $A^j = \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{j\text{-veces}}$ asociado al vector propio \mathbf{x} .
4. Si $q(x)$ es un polinomio, $q(\lambda)$ es un valor propio de $q(A)$ asociado al vector propio \mathbf{x} .

5. Si A es invertible, entonces $\lambda \neq 0$ y λ^{-1} es valor propio de A^{-1} con valor propio asociado \mathbf{x} .
6. Sea A una matriz real y el vector propio $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$ donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, entonces $\bar{\lambda}$ es valor propio de A asociado al vector $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 - i\mathbf{x}_2$.

Nota: Toda matriz cuadrada A de orden n tiene a lo más n valores propios diferentes. Por otro lado, la matriz A y su transpuesta A^T comparten los mismos valores propios aún cuando los respectivos vectores propios asociados pueden ser diferentes.

Proposición 3.9. *Valores propios de una matriz A de orden n , distintos entre sí, están asociados a vectores propios linealmente independientes entre sí.*

Demostración. Sea A una matriz cuadrada de orden n . Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ vectores propios de A asociados a los valores propios de λ_1, λ_2 , respectivamente. Supongamos que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sean $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. Consideremos la combinación lineal

$$\beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$A(\beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2) = \beta_1 A\mathbf{x}_1 + \beta_2 A\mathbf{x}_2 = \beta_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Multiplicando $\beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ por λ_2 sigue que:

$$\lambda_2 \beta_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \beta_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Restando a este resultado $\beta_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, se obtiene:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \beta_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\mathbf{x}_1 \neq 0$ se concluye que $\beta_1 = 0$. De esto sigue inmediatamente que $\beta_2 = 0$. Luego, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ son, entre sí, linealmente independientes.

□

3.2. Diagonalización de matrices.

Definición 3.10. *Dos matrices A y B de orden n se dicen **Semejantes** si existe una matriz P de orden n , invertible, tal que $B = P^{-1}AP$.*

Teorema 3.11. *Sean las matrices A y B de orden n semejantes, entonces:*

1. A y B tienen el mismo determinante.
2. A y B tienen el mismo polinomio característico.
3. A y B tienen los mismos valores propios.
4. Si \mathbf{x} es un vector propio de A , asociado al valor propio λ , entonces $P^{-1}\mathbf{x}$ es vector propio de B asociado al vector propio λ .

Demostración. Supondremos conocidas todas las propiedades básicas de los determinantes.

1. $B = P^{-1}AP$, entonces $\det[B] = \det[P^{-1}] \det[A] \det[P]$. Recordando que $\det[P^{-1}] = (\det[P])^{-1}$, obtenemos que $\det[B] = \det[A]$.
2. $\det[B - \lambda I] = \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = (\det[P])^{-1} \det[A - \lambda I] \det[P] = \det[A - \lambda I]$.
3. (2) implica que A y B tienen los mismos polinomios característicos, luego poseen los mismos valores propios.
4. Si \mathbf{x} es un vector propio de A , asociado al valor propio λ , entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. De aquí, $P^{-1}APP^{-1}\mathbf{x} = P^{-1}\lambda\mathbf{x}$. Es decir,

$$(P^{-1}AP)P^{-1}A\mathbf{x} = BP^{-1}\mathbf{x} = \lambda P^{-1}\mathbf{x}.$$

Luego $P^{-1}\mathbf{x}$ es vector propio de B asociado al vector propio λ .

□

Definición 3.12. Una matriz A de orden n se dice **Diagonalizable** si resulta semejante a una matriz diagonal D , es decir, existe una matriz P invertible tal que $D = P^{-1}AP$.

Vale la pena destacar que toda matriz simétrica A es diagonalizable. Los valores propios de A constituyen los elementos de la diagonal de D .

Teorema 3.13. Una matriz A de orden n es diagonalizable si y sólo si admite n vectores propios linealmente independientes entre sí.

Demostración. \Rightarrow) Sea A diagonalizable, es decir, existe P invertible tal que $D = P^{-1}AP$, con

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$AP = PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = [C_1|C_2|\dots|C_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

donde C_i , $i = 1, \dots, n$ representan las columnas de la matriz P . Entonces

$$A[C_1|C_2|\dots|C_n] = [\lambda_1 C_1|\lambda_2 C_2|\dots|\lambda_n C_n],$$

es decir,

$$AC_i = \lambda_i C_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Así, para cada $i = 1, \dots, n$, C_i , como columna, es vector propio de la matriz A con valor propio asociado λ_i . Como P es invertible, todas sus columnas son linealmente entre sí, luego lo son como vectores propios de A .

\Leftarrow) Consideremos el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de n vectores propios linealmente independientes de la matriz A de orden n . Sea P la matriz cuyas columnas están constituidas por dichos vectores, es decir:

$$P = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_n].$$

Luego

$$AP = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 | \lambda_2 \mathbf{x}_2 | \dots | \lambda_n \mathbf{x}_n].$$

Sea,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix}.$$

donde los $\mathbf{z}_j, j = 1, \dots, n$ representan filas. En este caso, los vectores \mathbf{x}_i aparecen como matrices de $n \times 1$ y los vectores \mathbf{z}_j como matrices de $1 \times n$. Por lo tanto, como matrices, el producto $\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{x}_i$ representa una matriz de 1×1 , es decir un escalar. Como P^{-1} es la inversa de P es fácil verificar que:

$$\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{x}_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} [\lambda_1 \mathbf{x}_1 | \lambda_2 \mathbf{x}_2 | \dots | \lambda_n \mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = D.$$

□

Inmediatamente podemos concluir de los resultados anteriores que si una matriz cuadrada de orden n tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable. Por otra parte una matriz será diagonalizable si para cada valor propio se cumple que su multiplicidad algebraica coincide con su multiplicidad geométrica.

Definición 3.14. Sea C una matriz cuadrada de orden n , se define e^C de la siguiente forma:

$$e^C := \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C^m}{m!} \right].$$

Ejemplo 3.15. Sea A una matriz cuadrada, de rango n , de entradas constantes, diagonalizable. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

En este caso, existe P invertible, tal que $A = PDP^{-1}$. Además

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = PDP^{-1}\mathbf{x}(t),$$

De esto sigue que:

$$P^{-1}\mathbf{x}'(t) = DP^{-1}\mathbf{x}(t).$$

Como P^{-1} tiene entradas constantes $P^{-1}\mathbf{x}'(t) = (P^{-1}\mathbf{x}(t))'$, luego colocando $\mathbf{u}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$, el sistema de ecuaciones se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} &= \mathbf{u}'(t) = D\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(0) &= P^{-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Aquí

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'(t) = \begin{bmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ \vdots \\ u'_n(t) \end{bmatrix}.$$

Luego se tiene el sistema de n ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{aligned} u'_i(t) &= \lambda_i u_i(t), \quad i = 1, \dots, n \\ u_i(0) &= [P^{-1}\mathbf{x}_0]_i \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$, donde $[P^{-1}\mathbf{x}_0]_i$ es la i -ésima componente del vector $P^{-1}\mathbf{x}_0$.

La solución es trivialmente:

$$u_i(t) = e^{\lambda_i t} [P^{-1} \mathbf{x}_0]_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Escrito en forma matricial, el resultado es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Finalmente, podemos despejar $\mathbf{x}(t)$ y determinar la solución del problema original:

$$\mathbf{x}(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Notemos que $e^{\lambda_i t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^m t^m}{m!}$. Así,

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m D^m}{m!}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = P \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m D^m}{m!} \right] P^{-1} \mathbf{x}_0 = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m P D^m P^{-1}}{m!} \right] \mathbf{x}_0.$$

Pero,

$$PD^m P^{-1} = \overbrace{[PDP^{-1}] \cdot \dots \cdot [PDP^{-1}]}^{m\text{-veces}} = A^m.$$

Esto conduce al siguiente resultado:

$$\mathbf{x}(t) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} \right] \mathbf{x}_0 = e^{At} \mathbf{x}_0.$$

Definición 3.16. Dos vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ se dicen ortogonales entre sí, si satisfacen la siguiente condición:

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 = 0.$$

3.3. Productos internos sobre \mathbb{R}^n .

Teorema 3.17. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre \mathbb{R}^n ssi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y},$$

para todo par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, donde A es una matriz simétrica cuyos valores propios son estrictamente positivos.

Demostración. \Rightarrow) Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, una base y un producto interno sobre \mathbb{R}^n , respectivamente. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tales que admiten las siguientes representaciones con respecto a la base \mathcal{B} :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$$

con $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ siendo $i = 1, \dots, n$. En este caso:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \alpha_{i,j},$$

donde $\alpha_{i,j} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. Considerando en este caso que $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle$ se obtiene $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$. Luego, la matriz cuadrada A dada por

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

resulta ser simétrica.

Lo anterior implica que:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}.$$

Ya que A es simétrica sabemos que tiene n valores propios asociados $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, con posibles repeticiones. Sean $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ los vectores propios respectivos ($\neq \mathbf{0}$).

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}_i^T A \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \lambda_i \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i > 0.$$

Por lo tanto, todos los valores propios deben ser positivos.

\Leftrightarrow Supongamos que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

con A una matriz simétrica ($A = A^T$). Ya que el producto interno entre dos vectores es un escalar, se obtiene que

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T A^T \mathbf{y})^T = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Por otro lado

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

Ya que A es simétrica, es normal, es decir existe una matriz invertible P que satisface $P^{-1} = P^T$, tal que

$$A = PDP^T$$

donde D es una matriz diagonal, formada con los valores propios $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ de A (A es ortogonalmente diagonalizable). Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = (P^T \mathbf{x})^T D P^T \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, D \mathbf{y} \rangle,$$

con $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$.

Sea $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$. Así, se obtiene:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i \geq 0,$$

ya que $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, es decir

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0.$$

Finalmente,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

implica que $\sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i = 0$. De esto obtenemos que $y_i = 0$ $i = 1, \dots, n$, o sea $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Ya que $\mathbf{x} = (P^T)^{-1} \mathbf{y} = (P^T)^T \mathbf{y} = P \mathbf{y} = P \mathbf{0}$, concluimos que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

□

3.4. Productos internos sobre \mathbb{C}^n .

Definición 3.18. Una **Involución** * sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden n definidas sobre el cuerpo de los complejos es la siguiente función

$$\begin{aligned} * : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^* = (\bar{A})^T. \end{aligned}$$

De la misma manera se puede definir

$$\begin{aligned} * : \mathbb{C}^n &\longmapsto \mathbb{C}^n \\ \mathbf{z} &\longmapsto \mathbf{z}^* = (\bar{\mathbf{z}})^T \end{aligned}$$

Definición 3.19. Dos vectores $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^n$ se dicen **Ortogonales** entre sí, con respecto al producto interno euclideo, si satisfacen la siguiente condición:

$$\mathbf{z}_1^* \mathbf{z}_2 = 0.$$

Proposición 3.20. Si la matriz cuadrada A es hermítica, entonces:

1. Todos sus valores propios son reales.
2. Los vectores propios asociados a distintos valores propios son ortogonales.

Demostración. Recordemos que matricialmente $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ es una matriz de $n \times 1$. Luego \mathbf{z}^* es una matriz de $1 \times n$.

1. Sea λ un valor propio de A con vector propio $\mathbf{x} \neq 0$. $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} = (\mathbf{x}^* A \mathbf{x})^* = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x}$. De esto sigue que $(\lambda - \bar{\lambda}) \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$. Luego, λ es un número real.
2. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ vectores propios de A asociados a los valores propios λ_1, λ_2 distintos entre sí. $\mathbf{x}_1^* A \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_2^* A \mathbf{x}_1)^* = \lambda_1 \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2 = 0$.

□

Teorema 3.21. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre \mathbb{C}^n ssi

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* A \mathbf{y},$$

para todo par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, donde A es una matriz hermítica, es decir $A = A^*$ cuyos valores propios son estrictamente positivos.

Las propiedades válidas para productos internos en \mathbb{R}^n son, salvo los cambios indicados, equivalentes a aquéllas que pueden derivarse en \mathbb{C}^n . Su demostración se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 3.22. Sea A una matriz simétrica de orden n , con n vectores propios $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, linealmente independientes entre sí y valores propios asociados $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, diferentes entre sí. El subespacio propio generado por el vector propio \mathbf{v}_i , asociado al valor propio λ_i se denota por \mathcal{V}_{λ_i} , $i = 1, \dots, n$.

Se puede demostrar que existe una matriz P , invertible, tal que:

$$A = PDP^{-1},$$

donde D es la matriz diagonal, construida a partir de los valores propios de A . De acuerdo a un resultado anterior, sabemos que todos los vectores propios resultan ser ortogonales entre sí.

En este caso $P = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n]$, es decir, sus columnas son los vectores

propios de A . Se puede demostrar que $P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix}$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
A &= [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} \\
&= [\lambda_1 \mathbf{v}_1 | \dots | \lambda_n \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T.
\end{aligned}$$

Las matrices cuadradas de rango n , $P_{\lambda_i} = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$, $i = 1, \dots, n$, tienen las siguientes propiedades:

- i. $P_{\lambda_i} P_{\lambda_j} = 0_{n \times n}$ si $i \neq j$.
- ii. $P_{\lambda_i}^2 = P_{\lambda_i}$.

Demostremos (i). $P_{\lambda_j} P_{\lambda_i} = (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T)(\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{v}_i (\mathbf{v}_i^T (\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T)) = \mathbf{v}_i ((\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j) \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{v}_i (\delta_{ij} \mathbf{v}_j^T) = 0_{n \times n}$ ya que \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_j son ortogonales entre sí por ser $i \neq j$.

Demostremos (ii). Sea $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i$. Entonces:

$$\begin{aligned}
P_{\lambda_j}(\mathbf{u}) &= P_{\lambda_j} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \right) = \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \gamma_i (\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{v}_j (\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \delta_{ij} = \lambda_j \mathbf{v}_j,
\end{aligned}$$

entonces

$$P_{\lambda_j}^2(\mathbf{u}) = P_{\lambda_j}(\mathbf{u}) = \lambda_j \mathbf{v}_j.$$

Por estas razones, las matrices P_{λ_j} , $j = 1, \dots, n$ se denominan **Matrices de Proyección**. En general son la representación matricial de los denominados **Operadores de Proyección**.

Estos resultados conducen a la siguiente representación de la matriz A (**Descomposición Espectral**) inicial:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\lambda_i}.$$

Haciendo uso de las propiedades de los operadores de proyección es fácil demostrar por inducción que:

$$A^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m P_{\lambda_i}.$$

Esto puede ser generalizado al caso de cualquier polinomio $q(A)$ de orden finito de A . En ese caso,

$$q(A) = \sum_{i=1}^n q(\lambda_i) P_{\lambda_i}.$$

Ejemplo 3.23. Sea S una matriz simétrica definida sobre \mathbb{R}^n . Sea $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ una base de vectores propios de S con valores propios, distintos entre sí, dados por el conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Sea además un el producto interno \langle, \rangle , respecto del cual todos esos vectores propios resultan ortogonales y satisfacen la condición $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Derivaremos la representación espectral de la matriz S usando dicho producto interno.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Usando la ortogonalidad de los vectores, es fácil ver que

$$\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overbrace{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle}^{\delta_{ij}} = \alpha_j.$$

$$S\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i S\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x} \rangle A\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overbrace{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x}_i}^{P_{\lambda_i}(\mathbf{x})}.$$

En otras palabras

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{\lambda_i}.$$

Verifiquemos que $P_{\lambda_i}(\cdot) = \langle \mathbf{x}_i, \cdot \rangle \mathbf{x}_i$ es un operador de proyección sobre el subespacio generado por el vector propio \mathbf{x}_i asociado al valor propio λ_i , al cual denotamos por X_{λ_i} .

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, arbitrario.

$$\begin{aligned} P_{\lambda_i}^2(\mathbf{x}) &= P_{\lambda_i}(P_{\lambda_i}(\mathbf{x})) = P_{\lambda_i}(\overbrace{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x}_i}^{\in X_{\lambda_i}}) \\ &= \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x} \rangle \overbrace{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle}^1 \mathbf{x}_i = P_{\lambda_i}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Sean $i \neq j$.

$$P_{\lambda_i}(P_{\lambda_j}(\mathbf{x})) = P_{\lambda_i}(\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x}_j) = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x} \rangle \overbrace{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle}^0 \mathbf{x}_j = 0.$$

3.5. Productos internos sobre espacios de dimensión finita. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de él. Se define la función lineal $\phi : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{K}^n$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}, \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \dots, n \mapsto \phi(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$$

Teorema 3.24. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre \mathcal{V} si y sólo si

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\phi(\mathbf{v}))^* A \phi(\mathbf{w}),$$

para todo par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, donde A es una matriz hermítica con entradas en \mathbb{K} , es decir $A = A^*$, cuyos valores propios son estrictamente positivos.

Demostración. \Leftarrow) La demostración es trivial, se deja al lector.

\Rightarrow) Notemos que ϕ es biyectiva, luego existe ϕ^{-1} , tal que

$$\phi^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i.$$

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre \mathcal{V} . Demostraremos primero que la forma bilineal

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \langle \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}), \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{v}}) \rangle$$

representa un producto interno sobre \mathbb{K}^n . Todas las propiedades de producto interno son fáciles de probar.

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \langle \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}), \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle = 0.$$

Ya que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre \mathcal{V} , lo anterior implica que $\phi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}_{\mathcal{V}}$. Pero ϕ^{-1} es lineal y biyectiva, entonces $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$.

De esta forma, ya que (\cdot, \cdot) es un producto interno sobre \mathbb{K}^n sabemos que

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = (\tilde{\mathbf{u}})^* A \tilde{\mathbf{v}} = \langle \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}), \phi^{-1}(\tilde{\mathbf{v}}) \rangle$$

para alguna matriz hermítica con valores propios positivos dada.

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{V}$ vectores arbitrarios. Entonces

$$\mathbf{u}_1 = (\phi^{-1} \circ \phi)(\mathbf{u}_1), \quad \mathbf{u}_2 = (\phi^{-1} \circ \phi)(\mathbf{u}_2).$$

Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle (\phi^{-1} \circ \phi)(\mathbf{u}_1), (\phi^{-1} \circ \phi)(\mathbf{u}_2) \rangle = (\phi(\mathbf{u}_1))^* A \phi(\mathbf{u}_2).$$

□

4. ESPACIOS MÉTRICOS Y NORMADOS

4.1. Espacios métricos y normados.

Definición 4.1. *Dado un conjunto X distinto de vacío, un espacio métrico es un par (X, d) , donde la función $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^+$ satisface las siguientes propiedades.*

1. $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$.
2. $d(a, b) = d(b, a)$, $\forall a, b \in X$. (*Reflexividad*)
3. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, $\forall a, b, c \in X$. (*Desigualdad Triangular*)

*En este caso d se denomina **Métrica** sobre X .*

Definición 4.2. *Sea un espacio métrico (X, d) . Una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice **Sucesión de Cauchy** en X si:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < \epsilon, \text{ cuando } m, n > N.$$

La convergencia se denota en forma abreviada $a_n \rightarrow a$.

Definición 4.3. *Sea Y un subconjunto de un espacio métrico (X, d) . Una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ se dice **Convergente** si existe a , no necesariamente en Y , tal que:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : d(a_n, a) < \epsilon, \text{ cuando } n > N.$$

*En este caso a se denomina **Punto Límite** o **Punto de Adherencia** de Y .*

Definición 4.4. Sea Y un subconjunto de un espacio métrico (X, d) . Al conjunto de sus puntos límites se le denomina *Adherencia de Y* y se le denota por Y' . La **Clausura** o **Cerradura** de Y es el conjunto $\bar{Y} = Y \cup Y'$. Si $Y = \bar{Y}$ se dirá que Y es un **Conjunto Cerrado**.

Definición 4.5. Un espacio métrico (X, d) , se dice **Completo** si toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en X , con la métrica d .

Definición 4.6. Un conjunto $\mathcal{D} \subset (X, d)$ se dice **Denso** en X si

$$\forall a \in X, \exists \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D} : a_n \rightarrow a.$$

Definición 4.7. Un espacio métrico (X, d) se dice **Separable** si existe $\mathcal{D} \subset (X, d)$ denso y numerable en él.

Definición 4.8. Dado un espacio vectorial \mathcal{V} , de dimensión arbitraria, sobre un cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) la función $\|\cdot\| : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con las siguientes propiedades.

1. $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$; $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. (*Reflexividad*)
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ (*Desigualdad triangular*)

se denomina **Norma** sobre \mathcal{V} . En este caso, \mathcal{V} se dice *normado*. Si \mathcal{V} es además completo con respecto a dicha norma, se dice **Espacio de Banach**.

Proposición 4.9. Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre el espacio vectorial \mathcal{V} . La función $\|\cdot\| : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

es una métrica que satisface:

1. $d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$. (Invarianza frente a traslaciones)
2. $d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. (Homogeneidad)

Proposición 4.10. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre el espacio vectorial \mathcal{V} . Entonces:

1. El producto interno induce una norma sobre \mathcal{V} dada por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

2. La siguiente desigualdad se cumple

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V},$$

(desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Demostración. Demostraremos la proposición (2). Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y tal que

$$\lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = |\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle|.$$

Claramente basta escoger $\lambda = \frac{\overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}}{|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle|}$.

Sea $\mathbf{z} = \alpha\lambda\mathbf{y} - \mathbf{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \langle \alpha\lambda\mathbf{y} + \mathbf{x}, \alpha\lambda\mathbf{y} + \mathbf{x} \rangle \geq 0.$$

Desarrollando esta expresión se obtiene:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \alpha^2 + 2\Re[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle] \alpha + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{y}\|^2 \alpha^2 + 2\Re[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle] \alpha + \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

Por otro lado $\Re[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle] \leq |\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle|$. Así,

$$\|\mathbf{y}\|^2 \alpha^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \alpha + \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

Ésta es una inecuación de segundo grado en α que se cumple sólo si su discriminante es menor o igual a cero, es decir:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 \leq 0.$$

□

4.2. Operadores lineales en espacios vectoriales normados.

Definición 4.11. Sean \mathcal{V} , \mathcal{W} espacios vectoriales normados sobre el cuerpo \mathbb{K} , con normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente. Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{V} \mapsto \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{W}$, donde $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$ representan el dominio y el recorrido del operador. T se dice **Operador Lineal** si satisface las siguientes propiedades:

1. $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}(T)$,
2. $T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(T)$.

Definición 4.12. Al conjunto de los operadores lineales definidos de $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ se le denota por $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Notar que $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar usual de operadores.

Definición 4.13. Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ se dirá **Acotado** si existe un número $c > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(T)$ se cumple que

$$\|T(\mathbf{x})\|_{\mathcal{W}} \leq c\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{V}}.$$

Al conjunto de los operadores acotados definidos de \mathcal{V} en \mathcal{W} se le denota por $\mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Notar que $\mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Definición 4.14. Con las definiciones anteriores y suponiendo que T es acotado, se define la **Norma del Operador T** como

$$\|T\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(T), \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \|T(\mathbf{x})\|_{\mathcal{W}}.$$

Se deja al lector verificar que $\|\cdot\|$, así definida, es una norma en el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Definición 4.15. Un operador lineal $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$, donde \mathcal{V}, \mathcal{W} son espacios normados, con normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente, se dirá **Continuo** en $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$$

tal que

$$\|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{u})\|_{\mathcal{W}} < \epsilon, \text{ cuando, } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} < \delta, \mathbf{u} \in \mathcal{V}.$$

Proposición 4.16. *Todo operador lineal acotado $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ donde \mathcal{V}, \mathcal{W} son espacios normados, con normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivamente, es continuo en \mathcal{V} .*

Demostración.

$$\|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{u})\|_{\mathcal{W}} \leq \|T\| \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{\mathcal{V}}.$$

□

Ejemplo 4.17. *Sea $\mathcal{C}[0, 1]$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[0, 1]$ con la norma*

$$\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|.$$

Sea $T : \mathcal{C}[0, 1] \mapsto \mathcal{C}[0, 1]$ el operador dado por

$$T(x)(t) = \int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d\tau,$$

donde K es una función de dos variables, continua sobre el cuadrado cerrado y acotado $[0, 1] \times [0, 1]$. Entonces se tiene que:

1. *T es lineal.*
2. *T es acotado.*

Demostración. Se demostrará (2). Ya que K es continua sobre el conjunto cerrado y acotado $J = [0, 1] \times [0, 1]$ alcanza su máximo y su mínimo en dicho conjunto, es decir, existe $K_0 > 0$ tal que $|K(t, \tau)| \leq K_0$ para todo $(t, \tau) \in J$. Entonces:

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{C}[0,1], x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{C}[0,1], x \neq 0} \left(\frac{\max_{t \in [0,1]} |T(x)(t)|}{\max_{t \in [0,1]} |x(t)|} \right).$$

Pero,

$$|T(x)(t)| \leq \int_0^1 |K(t, \tau)| |x(\tau)| d\tau \leq K_0 \int_0^1 |x(\tau)| d\tau \leq K_0 \max_{\tau \in [0,1]} |x(\tau)|.$$

Luego:

$$\|T\| \leq K_0.$$

Es decir, T es un operador acotado. □

Ejemplo 4.18. Sea X el espacio vectorial normado de todos los polinomios sobre $[0, 1]$ con la norma dada por

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|, \quad t \in [0, 1].$$

Sea la función T_1 definida de X en sí mismo, dada por

$$T_1(x(t)) = x'(t).$$

1. T_1 es un operador lineal sobre X .
2. T_1 es no acotado.

Demostración. Demostraremos (2). Sea $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\|x_n\| = 1$, y

$$T_1(x_n) = x'_n(t) = nt^{n-1}.$$

Así,

$$\|T_1(x_n)\| = 1,$$

y

$$(\|T_1(x_n)\|/\|x_n\|) = n.$$

Ya que $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, esto muestra que no existe un número fijo $c > 0$ tal que $(\|T_1(x_n)\|/\|x_n\|) \leq c$. Luego T_1 es no acotado. \square

Ejemplo 4.19. Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ donde

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx < \infty \right\}.$$

En este caso se define la siguiente norma, denotada por $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$, sobre $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Esta norma está inducida por el siguiente producto interno sobre $L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \bar{g}(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Sea $\mathcal{D}(T_2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |xf|^2 dx < \infty\}$. El operador posición se define como:

$$T_2 : \mathcal{D}(T) \mapsto L^2(\mathbb{R})$$

$$f(x) \mapsto T_2(f)(x) = xf(x).$$

Es claro de la definición de $\mathcal{D}(T_2)$ que $T_2(f) \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall f \in \mathcal{D}(T_2)$. Luego T_2 está bien definido.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la sucesión de funciones en \mathcal{H} dadas por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, n]. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Entonces:

$$\|T_2\| \geq (\|T_2(f_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} / \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}) = \|T_2(f_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{n}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, T_2 no es un operador acotado.

Ejemplo 4.20. Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{D}(T_3) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donde $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones tales que ellas y todas sus derivadas convergen a cero más rápidamente que cualquier polinomio. es decir, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ssi es infinitamente diferenciable y

$$|\sup_{x \in \mathbb{R}} x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Se define

$$T_3 : \mathcal{D}(T_3) \mapsto L^2(\mathbb{R})$$

$$f(x) \mapsto T_3(f)(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x^2 f(x).$$

Es obvio que T_3 es lineal y está bien definido pues si $f \in \mathcal{D}(T_3)$ entonces $T_3(f) \in \mathcal{D}(T_3) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Denotemos por φ_n las funciones de Hermite dadas por

$$\varphi_n(x) = (2^n n!)^{-1/2} (-1)^n \pi^{-1/4} e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}.$$

En este caso $\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, si $n \neq m$ y $T(\varphi_n) = (2n+1)\varphi_n$. Más aún, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|T_3\|^2 &\geq \|T_3(\varphi_n)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} (2n+1)^2 \varphi_n^2(x) dx = (2n+1)^2 \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= (2n+1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto T_3 es no acotado.

4.3. Espacios de Hilbert.

Definición 4.21. *Un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un espacio vectorial dotado de un producto interno, Banach y separable con respecto a la norma inducida por éste.*

Definición 4.22. *Sean \mathbf{x}, \mathbf{y} dos puntos de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, diremos que \mathbf{x} e \mathbf{y} son ortogonales, lo cual se escribirá como $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Sea M un subconjunto arbitrario de \mathcal{H} . Si \mathbf{x} es ortogonal a todo elemento de M , diremos que \mathbf{x} es ortogonal a M , y escribiremos $\mathbf{x} \perp M$. Sea N un subconjunto arbitrario de \mathcal{H} . Si $\mathbf{x} \perp M$ para todo $\mathbf{x} \in N$, entonces diremos que N es ortogonal a M , lo cual se denotará como $N \perp M$. Se denotará como M^\perp al conjunto de todos los elementos ortogonales a M . Dicho conjunto se denominará a dicho conjunto el **Complemento Ortogonal de M** .*

Definición 4.23. Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{H}\}_{i \in \mathbb{N}}$ se dice **Ortonormal** si

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j, \text{ y } \|\mathbf{x}_i\| = 1, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Definición 4.24. Dado un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ se define

$$\mathcal{D}(T^*) = \{x' \in \mathcal{H}; \exists y' \text{ tal que } \langle Tx, x' \rangle = \langle x, y' \rangle, \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$$

y se denomina **Adjunto de T** al operador T^* definido por

$$T^*x' = y'.$$

Proposición 4.25. T^* está bien definido (es decir y' es único) si y sólo si $\mathcal{D}(T)$ es denso en \mathcal{H} .

Definición 4.26. Un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ se dice **simétrico** si

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \forall x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Definición 4.27. Un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ se dice **Autoadjunto** si es simétrico y $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$. T se dice **Densamente Definido** en \mathcal{H} si $\mathcal{D}(T)$ es denso en \mathcal{H} .

Definición 4.28. Un conjunto numerable de vectores $\{\mathbf{x}_i \in \mathcal{H}\}_{i \in \mathbb{N}}$ se dice **Base** de \mathcal{H} si todo $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ puede escribirse como combinación lineal de vectores de él.

Definición 4.29. *El Gráfico $\Gamma(T)$ de un operador lineal T (no necesariamente acotado) es el subconjunto del espacio de Hilbert $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ definido por*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx), \forall x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Diremos que T es cerrado ssi $\Gamma(T)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Teorema 4.30. *(Del Gráfico Cerrado) Sean X, Y dos espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es acotado ssi $\Gamma(T)$ es cerrado en $X \times Y$.*

Corolario 4.31. *(Hellinger-Toeplitz) Sea un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, para el cual $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Supongamos que*

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle, \forall f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow T \text{ es acotado.}$$

Demostración. Por el teorema del gráfico cerrado basta probar que $\Gamma(T)$ es cerrado. Sea $(x_n, T(x_n))$ una sucesión en $\Gamma(T)$ que converge a (x, y) . Se debe demostrar que (x, y) pertenece al $\Gamma(T)$, es decir $y = T(x)$.

Para $z \in \mathcal{H}$ se tiene, por continuidad del producto interno respecto de sus argumentos, y la hipótesis del teorema, $\langle z, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, T(x_n) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(z), x_n \rangle = \langle T(z), x \rangle = \langle z, T(x) \rangle$. Entonces:

$$\langle z, y - T(x) \rangle = 0.$$

Dado que $z \in \mathcal{H}$ es arbitrario, y dado que el único vector ortogonal a todo \mathcal{H} es el vector $0_{\mathcal{H}}$, se tiene que:

$$y - T(x) = 0_{\mathcal{H}}, \text{ es decir } y = T(x).$$

□

5. TEORÍA ESPECTRAL DE OPERADORES ACOTADOS

Definición 5.1. Se nota como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al espacio de los operadores lineales acotados definidos del espacio de Hilbert \mathcal{H} en sí mismo.

Definición 5.2. Sea T un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Un número complejo λ pertenece a la **Resolvente** de T , $\rho(T)$, si $T - \lambda I$ posee una inversa acotada. Si $\lambda \notin \rho(T)$ se dirá que λ pertenece al espectro de T , al cual continuamos denotando por $\sigma(T)$. Además se denota $R_\lambda(T)$ al operador inverso de $T - \lambda I$, $(T - \lambda I)^{-1}$.

Problema 5.3. Sea T un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Probar que

1. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$, entonces todo $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfice

$$|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1},$$

pertenece a $\rho(T)$.

2. $R_\lambda(T)$ existe y es un operador acotado si $|\lambda| > \|T\|$. Además

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left[I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n \right].$$

Problema 5.4. Sea T un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se define el operador e^T de la siguiente forma:

$$e^T := I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

Probar que

$$\|e^T\| \leq e^{\|T\|}.$$

6. TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES NO ACOTADOS

Definición 6.1. 1. Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ -álgebra de los subconjuntos de Borel de \mathbb{R} y sea $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores acotados sobre el Hilbert \mathcal{H} . Una medida de proyección es una función

$$E : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

que satisface:

- i. Para cada $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, el operador $E(B)$ es una proyección ortogonal sobre algún subespacio cerrado de \mathcal{H} . Esto es

$$E^2(B) = E(B) \text{ y } E(B) = E^*(B).$$

- ii. $E(\emptyset) = 0$ y $E(\mathbb{R}) = 1$.
- iii. Si $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos de Borel disjuntos dos a dos, entonces,

$$E(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = s - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N E(B_n) \text{ (límite fuerte)}$$

- iv. $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$, $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

2. Dada una medida de proyección E y una función de Borel (no necesariamente acotada), se define el operador

$$T = \int g(\lambda) dE_{\lambda}$$

de la siguiente forma:

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \int |\varphi \lambda|^2 d\langle \varphi, E(\lambda) \varphi \rangle < \infty \right\}$$

$$\left\langle \varphi, \int g(\lambda) dE(\lambda) \varphi \right\rangle = \int g(\lambda) \langle \varphi, dE_{\lambda} \rangle.$$

Teorema 6.2. (*Teorema Espectral*) Se verifica la siguiente relación 1–1 entre operadores autoadjuntos A y las medidas de proyección E_A ,

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda.$$

En este caso, los operadores no son necesariamente acotados. Más aún, esta representación, extensión de resultados análogos para operadores simétricos en espacios vectoriales de dimensión finita ya vistos, permite definir funciones continuas de operadores autoadjuntos no acotados, tales como su exponencial, cuestión de gran importancia en lo que sigue.

7. MECÁNICA CUÁNTICA

7.1. Generalidades. La mecánica cuántica es un modelo fenomenológico, principalmente matemático, de la realidad del mundo a escalas muy pequeñas [52].

A ese nivel, las partículas se comportan como corpúsculos y también como ondas (cada función de onda representa un estado posible para la partícula), dependiendo de la situación objetiva o experimental a la que se enfrenten, lo que hace que su dinámica sea radicalmente diferente a la que describe la mecánica clásica en el caso de fenómenos de mayor escala (macroscópicos).

Si a nivel macroscópico la posición y la velocidad de un objeto pueden ser medidas en general con bastante precisión, en forma simultánea, a nivel cuántico, sólo podemos conocer el valor probable de que una partícula se localice en una región determinada del espacio o que tenga una velocidad dada. Más aún, si conocemos su posición con bastante exactitud, tendremos una gran incertidumbre en su velocidad y viceversa. Es lo que se conoce como el *principio de incertidumbre de Heisenberg*, pilar de la teoría cuántica.

Por otro lado, el llamado *principio de exclusión de Pauli* (Wolfgang Pauli, 1900-1958. Físico austríaco) elimina la posibilidad de que dos electrones se encuentren en el mismo estado cuántico. Esto se traduce en el hecho que los estados asociados a estas partículas queden representados por funciones de onda antisimétricas. A entidades físicas con estas características se les denomina *fermiones*.

A aquellas partículas a las cuales les está permitido encontrarse simultáneamente en un estado determinado, sin importar su número, se les llama *bosones*, siendo las funciones de onda asociadas de tipo simétricas.

Bajo condiciones adecuadas, cuando se trata de sistemas de muchas partículas libres o interaccionando a nivel cuántico, ese comportamiento especial (corpúsculo-onda) puede traducirse, en el caso de los bosones, en manifestaciones macroscópicas observables, como es la superfluidez de ciertos tipos de helio, fenómeno vinculado a su tendencia a asimilarse a un determinado estado –el fundamental o de más baja energía (ground state) en el sistema– a muy bajas temperaturas (CBE), tal cual se mencionó en una sección anterior.

En el caso de la superconductividad de algunos materiales, dos electrones se juntan para formar los denominados pares de Cooper, los cuales se comportan como bosones.

Por otro parte, la física nuclear o productos tecnológicos como el microscopio electrónico, basado en el denominado *efecto túnel*, se sustentan en los principios de la mecánica cuántica.

Esta teoría se sustenta en uno de los sistemas axiomáticos más bellos y sorprendentes. Soportada matemáticamente en el *análisis funcional* y la *teoría de operadores*, da cuenta de la naturaleza corpuscular y ondulatoria de las partículas atómicas y elementales.

En general, las teorías físicas clásicas debieran, a nivel de escala microscópica (a partir del nivel atómico), tener un correlato cuántico. El proceso que permite transitar desde lo macroscópico a lo microscópico se denomina *cuantización*, siendo uno de los criterios de consistencia el denominado *límite clásico*. Éste establece que si partimos de la teoría clásica A y el proceso de cuantización nos conduce a la teoría cuántica $q(A)$, dicho límite debe hacer posible el tránsito desde $q(A)$ a A .

La teoría electromagnética cuántica es, en este sentido, consistente, pues el paso al límite mencionado conduce efectivamente a la teoría de Maxwell clásica.

Sin embargo, en tal paso al límite clásico pueden presentarse correcciones que nos son perceptibles en nuestro mundo macroscópico habitual, en donde los efectos relativistas tampoco son sensibles.

El formalismo denominado *primera cuantización*, en el caso de sistemas con escaso número de partículas, consiste básicamente en sustituir las variables de posición y momento en las funciones clásicas, que representan energías también clásicas, por ciertos operadores adecuados –*autoadjuntos*– representativos de lo que se denominará *observables físicos*, definidos sobre un espacio matemático abstracto, cuyos elementos describen los *estados posibles* a los cuales puede acceder el sistema (*espacio de Hilbert*). En este caso, dicho formalismo permite determinar el *valor esperado* o *esperanza estadística* de que cualquiera de los observables físicos de interés en el sistema se encuentre en un estado admisible. Así, si en mecánica clásica la energía toma un valor específico dado, medible con exactitud razonable, en el caso de la mecánica cuántica el conjunto de las mediciones de la energía como observable es un valor estadístico, que dependerá del estado al cual el sistema se encuentra asociado.

En este caso, dos observables físicos se dirán *incompatibles* si no son simultáneamente determinables, tal como sucede en el caso de la posición y el momento descritos. Esto se traduce en que los operadores autoadjuntos que los representan no conmutan entre sí, a diferencia de las variables clásicas representativas de la mecánica de Newton. La sorprendente consecuencia de esto y del formalismo matemático descrito es que el principio de incertidumbre puede ser derivado, matemáticamente, en forma inmediata de tales hechos.

En la naturaleza los procesos cuánticos, inherentes a procesos que se desarrollan a niveles atómicos y subatómicos, involucran la intervención

de un número variable de partículas. Éste es el caso de las distintas interacciones en la naturaleza.

Recordemos que para un campo clásico (electromagnético, gravitacional), la intensidad con que éste interacciona con objetos bajo su radio de acción depende del punto del espacio donde éstos se encuentren. En otras palabras, la intensidad del campo toma un valor determinado en cada punto del espacio, siendo su variación, de un punto a otro, de carácter continuo.

Sin embargo, en la *teoría cuántica de campos* que describe procesos de interacción de éstos con partículas a nivel cuántico, la transmisión de fuerzas queda mediada por la creación y absorción permanente de partículas virtuales denominadas *portadoras de fuerza* y su intensidad determinada por la densidad de las mismas en el espacio. Por este motivo, el formalismo matemático a través del cual es posible describir tales procesos es la denominada *segunda cuantización*, fundada en la introducción de los denominados operadores de creación y aniquilación de partículas, definidos sobre el llamado espacio de Fock –que representa sistemas de un número indeterminado de partículas– en términos de los cuales deben ser expresadas las ecuaciones de campo respectivas.

Cabe señalar que la mecánica cuántica sirve para describir no sólo las interacciones electromagnéticas, sino además las denominadas *interacciones fuertes*, responsables de las fuerzas nucleares, y las *débiles*, asociadas al decaimiento radioactivo.

En todos estos sentidos, este modelo es tremendamente exitoso. Más aún, la física de partículas teórica y experimentalmente ha dado cuenta de la existencia de la mayoría de las partículas elementales que median o que hacen posible dichas interacciones.

7.2. Conceptos básicos. Los postulados básicos de la mecánica cuántica son los siguientes:

1. Los estados de un sistema cuántico están definidos por elementos de un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

2. Los observables físicos quedan representados por un álgebra de operadores autoadjuntos actuando sobre \mathcal{H} o sobre un subconjunto densamente definido sobre él.

3. La energía del sistema se encuentra representada por un operador autoadjunto H .

4. La evolución temporal del sistema viene dada por la acción de un grupo unitario representado por el operador e^{-iHt} sobre los estados del sistema, es decir, el sistema evoluciona en un tiempo t desde el estado φ al estado ψ , del siguiente modo $\psi = e^{-iHt}\varphi$.

7.3. El principio de incertidumbre. Con estos simples supuestos es posible definir el valor esperado

$$\mathbb{E}_\varphi(\hat{X}) = \langle \varphi, \hat{X}\varphi \rangle_{\mathcal{H}}$$

de las medidas físicas realizadas sobre un observable \hat{X} dado, donde $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ es el producto interno asociado a \mathcal{H} .

Consecuentemente la dispersión $\sigma_\varphi^2(\hat{X})$ de las medidas para un observable físico arbitrario \hat{X} en el estado φ es:

$$\sigma_\varphi^2(\hat{X}) := \mathbb{E}_\varphi(\hat{X} - \mathbb{E}_\varphi(\hat{X}))^2 = \mathbb{E}_\varphi(\hat{X}^2) - \mathbb{E}_\varphi^2(\hat{X}).$$

Teorema 7.1. Sean \hat{A}, \hat{B} dos observables con el mismo dominio de definición en \mathcal{H} , que no conmutan entre sí, es decir: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$, entonces,

$$\sigma_\varphi(\hat{A})\sigma_\varphi(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\mathbb{E}_\varphi([\hat{A}, \hat{B}])|.$$

Demostración. Definamos el estado $\psi = \hat{G}\varphi$, donde $\hat{G} = \hat{A} + i\lambda\hat{B}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \left\langle (\hat{A} + i\lambda\hat{B})\varphi, (\hat{A} + i\lambda\hat{B})\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle \varphi, (\hat{A} - i\lambda\hat{B})(\hat{A} + i\lambda\hat{B})\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \mathbb{E}_\varphi(\hat{A}^2) + \lambda^2\mathbb{E}_\varphi(\hat{B}^2) + i\lambda\mathbb{E}_\varphi([\hat{A}, \hat{B}]) = g(\lambda) \geq 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\mathbb{E}_\varphi([\hat{A}, \hat{B}])$ debe ser un número complejo puro y que la función $g(\lambda)$ alcanza un mínimo en λ_0 dado por:

$$\lambda_0 = -\frac{i\mathbb{E}_\varphi([\hat{A}, \hat{B}])}{2\mathbb{E}_\varphi(\hat{B}^2)}.$$

Más aún:

$$g(\lambda_0) = \mathbb{E}_\varphi(\hat{A}^2) + \frac{\mathbb{E}_\varphi^2([\hat{A}, \hat{B}])}{4\mathbb{E}_\varphi(\hat{B}^2)} \geq 0,$$

es decir:

$$\mathbb{E}_\varphi(\hat{A}^2)\mathbb{E}_\varphi(\hat{B}^2) \geq -\frac{1}{4}\mathbb{E}_\varphi^2([\hat{A}, \hat{B}]) = \frac{1}{4}|\mathbb{E}_\varphi([\hat{A}, \hat{B}])|^2.$$

Como los operadores \hat{A} y \hat{B} son arbitrarios pueden ser sustituidos por $\hat{A} - \mathbb{E}_\varphi(\hat{A})$ y $\hat{B} - \mathbb{E}_\varphi(\hat{B})$ (éstos satisfacen la misma regla de conmutación que los operadores originales) en la última desigualdad. Esto conduce a la demostración inmediata del teorema.

□

8. PRIMERA CUANTIZACIÓN

8.1. Primera cuantización: el oscilador armónico. Los llamados métodos de primera cuantización permiten construir modelos de una partícula dentro del formalismo de la mecánica cuántica a partir de la descripción clásica del espacio de fases de ésta. Por ejemplo, en el caso de un oscilador armónico unidimensional simple, clásico (sobre el eje real), las coordenadas canónicas son, en una dimensión, la posición q y el momento p .

La función $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ representa la energía de dicho sistema.

En el caso mecánico cuántico, los estados del sistema (oscilador cuántico armónico simple), denotados por φ , son elementos de $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R})$, donde \mathcal{S} es el espacio de Schwarz de funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes en \mathbb{R} , denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Si φ es un vector unitario, es decir $\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, entonces $|\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi}$ representa la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en una región dada de la recta real.

En este caso, la cuantización canónica corresponde a la realización de las siguientes sustituciones: $p \rightarrow \hat{P}$, $q \rightarrow \hat{Q}$, donde los operadores \hat{P} y \hat{Q} están definidos por:

$$\hat{P}\varphi = -i\hbar \frac{d\varphi}{dx}, \quad \hat{Q}\varphi = x\varphi$$

y satisfacen las reglas de conmutación siguientes:

$[\hat{Q}, \hat{P}]\varphi = \hat{Q}\hat{P}\varphi - \hat{P}\hat{Q}\varphi = i\hbar\varphi$ y $\hat{P}\varphi = \hat{P}^*\varphi$, $\hat{Q}\varphi = \hat{Q}^*\varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}$, donde el asterisco indica el adjunto del operador respectivo.

De esta forma, si m es la masa de la partícula, la energía de este sistema viene dada por el operador:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{Q}^2}{2}.$$

Por otro lado, las esperanzas de estos observables en el estado φ quedan definidas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\varphi(\hat{P}) &= \left\langle \varphi, \hat{P}\varphi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \varphi \{-i\hbar \frac{d}{dx}\} \bar{\varphi} dx, \\ \mathbb{E}_\varphi(\hat{Q}) &= \left\langle \varphi, \hat{Q}\varphi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \varphi x \bar{\varphi} dx.\end{aligned}$$

Así, el teorema anterior conduce a la desigualdad (*Principio de Incertidumbre de Heisenberg*):

$$\sigma_\varphi(\hat{P})\sigma_\varphi(\hat{Q}) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Ejemplo 8.1. *Los operadores de spin (en las direcciones de los ejes ortogonales x, y, z) para dos fotones en su representación matricial son las siguientes:*

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores propios asociados a \hat{S}_z y a \hat{S}_x son:

$$\begin{aligned}\varphi_{+,z} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{-,z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \\ \varphi_{+,x} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{-,x} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{respectivamente.}\end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que estas matrices satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_z] = -i\hbar\hat{S}_y \neq 0,$$

es decir se trata de observables incompatibles entre sí. Luego de acuerdo al teorema (7.1):

$$\sigma_\varphi(\hat{S}_x)\sigma_\varphi(\hat{S}_z) \geq \frac{1}{2}|\mathbb{E}_\varphi([\hat{S}_x, \hat{S}_z])| > 0,$$

donde el producto interno es el usual definido para vectores de \mathbb{R}^2 .

9. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

9.1. Caso unidimensional. La evolución en el tiempo de un sistema unidimensional viene dada por la denominada *Ecuación de Schrödinger*, dada por la expresión.

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\varphi(x,t), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Para encontrar su solución se asume que ésta es del tipo:

$$\varphi(x,t) = \xi(t)\psi(x).$$

$$i\frac{\hbar}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x) = \text{cte.}$$

Luego, la siguiente es la **Ecuación de Schrödinger unidimensional, independiente del tiempo**.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi = \hat{H}\varphi = E\varphi.$$

En el caso en que $V(x) = V = \text{cte}$, se obtiene la ecuación:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + (E - V(x))\varphi = 0.$$

Debemos considerar dos casos:

1. $E - V > 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, donde A, B son constantes y $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$.
2. $E - V < 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ae^{rx} + Be^{-rx}$, donde A, B son constantes y $r = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$.

Ejemplo 9.1. Consideremos el operador de energía siguiente:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) : \mathcal{D}(\hat{H}) \mapsto L^2([-a, a]),$$

donde

$$\mathcal{D}(\hat{H}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^2[-a, a] \subset L^2([-a, a]), \text{ con } \varphi(-a) = \varphi(a) = 0\}$$

y

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq a \\ +\infty & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

Para demostrar que $\hat{H} = \hat{H}^*$ y $\mathcal{D}(\hat{H}) = \mathcal{D}(\hat{H}^*)$, basta notar que

$$\langle \hat{H}\varphi, \psi \rangle = \int_{-a}^a -\varphi''\psi = - \left[(\varphi'\psi + \varphi\psi') \Big|_{-a}^a + \int_{-a}^a \varphi(-\psi'') \right] = \langle \varphi, \hat{H}^*\psi \rangle$$

Es claro que el potencial infinito determina las condiciones de borde. Aquí, la ecuación de Schrödinger se puede escribir como una ecuación ordinaria de segundo orden, de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

$$\psi(x) = A_1e^{kx} + A_2e^{-ikx} = B_1e^{k(x-a)} + B_2e^{-ik(x-a)}.$$

Usando la condición de borde $\psi(a) = 0$:

$$\psi(a) = B_1 + B_2 = 0 \Rightarrow B_1 = -B_2 \Rightarrow \psi(x) = B_1 (e^{k(x-a)} - e^{-ik(x-a)}).$$

Así:

$$\psi(x) = 2iB_1 \sin(k(x-a)) = C \sin(k(x-a)).$$

Por otro lado considerando que $\psi(-a) = C \sin(-2ka) = 0$, se deduce que $2ka = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ es decir se obtiene el siguiente conjunto de energías:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Considerando la condición de normalización

$$\|\psi\|^2 = \int_{-a}^a |C|^2 \sin^2(k(x-a)) dx = 1,$$

se obtiene $|C| = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Entonces:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x-a)\right).$$

Lo anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}(x)\right) & \text{si } n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x)\right) & \text{si } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

10. SEGUNDA CUANTIZACIÓN

10.1. Segunda cuantización: el oscilador armónico. Los operadores \hat{a}^\dagger , \hat{a} son definidos como:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{Q} + i \frac{\hat{P}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{Q} - i \frac{\hat{P}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right).$$

Introducimos además el operador $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar} \hat{Q}^2 + \frac{\hat{P}^2}{2m\omega\hbar} - \frac{i}{2\hbar} \overbrace{(\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P})}^{\frac{\hbar}{i}} = \frac{1}{\omega\hbar} \hat{H} - \frac{I}{2}.$$

Análogamente se puede demostrar que:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\omega\hbar}\hat{H} + \frac{I}{2}.$$

Por lo tanto:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = I \text{ y } \hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2}I = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{I}{2}\right).$$

La expresión anterior para \hat{H} en términos de los operadores \hat{a}^\dagger , \hat{a} se denomina, **Segunda Cuantización** del operador.

Busquemos vectores y valores propios de los operadores \hat{n} y \hat{H} .

Asumamos que existe al menos un vector propio de \hat{n} en \mathcal{H} . Denominemos a su valor propio respectivo λ . Esta no es una suposición trivial ya que hay muchos operadores que no poseen vectores propios en \mathcal{H} . Sea ϕ_λ el vector propio, entonces:

$$\hat{n}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda.$$

Aplicando \hat{n} :

$$\hat{n}(\hat{a}\phi_\lambda) = (\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}\phi_\lambda = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - I)\hat{a}\phi_\lambda = (\lambda - 1)\hat{a}\phi_\lambda.$$

Luego, $\hat{a}\phi_\lambda = 0_{\mathcal{H}}$ o $\hat{a}\phi_\lambda$ es un vector propio de \hat{n} con valor propio $\lambda - 1$. Supongamos que efectivamente se verifica que $\hat{a}\phi_\lambda$ es un vector propio de \hat{n} con valor propio $\lambda - 1$. Podemos definir $\phi_{\lambda-1} := \hat{a}\phi_\lambda$. Repitiendo el análisis anterior con $\phi_{\lambda-1}$ se obtiene que:

$$\phi_{\lambda-2} := \hat{a}\hat{a}\phi_\lambda = \hat{a}^2\phi_\lambda$$

es el vector nulo de \mathcal{H} o un vector propio de \hat{n} con valor propio $\lambda - 2$. De esta forma se obtiene una secuencia de vectores:

$$\phi_{\lambda-m} = \hat{a}^m \phi_\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

los cuales son vectores propios de \hat{n} con valor propio $\lambda - m$ si $\phi_{\lambda-m} \neq 0_{\mathcal{H}}$.

Por otro lado,

$$\hat{n}(\hat{a}^\dagger \phi_\lambda) = (\lambda + 1)\hat{a}^\dagger \phi_\lambda.$$

Por lo tanto, $\phi_{\lambda+1} := \hat{a}^\dagger \phi_\lambda$ es cero o un vector propio de \hat{n} con valor propio asociado $\lambda + 1$. Verifiquemos que $\phi_{\lambda+1} \neq 0$.

Supongamos que $\hat{a}\phi_\lambda = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{a}^\dagger \phi_\lambda\|^2 &= \langle \hat{a}^\dagger \phi_\lambda, \hat{a}^\dagger \phi_\lambda \rangle = \langle \phi_\lambda, \hat{a}\hat{a}^\dagger \phi_\lambda \rangle \\ &= \langle \phi_\lambda, \hat{a}^\dagger \hat{a}\phi_\lambda \rangle + \langle \phi_\lambda, \phi_\lambda \rangle = \|\hat{a}\phi_\lambda\|^2 + \|\phi_\lambda\|^2 > 0, \end{aligned}$$

ya que $\phi_\lambda \neq 0$.

Entonces, $\phi_{\lambda+1}$ es siempre vector propio de \hat{n} con valor propio $\lambda + 1$. Repitiendo el proceso anterior, se obtiene la sucesión de vectores propios de \hat{n} , $\phi_{\lambda+s}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, con valores propios asociados $\lambda + s$, todos distintos de cero.

Determinemos ahora cuándo los $\phi_{\lambda-m}$ pueden ser cero. Notemos que:

$$\langle \phi_{\lambda-s}, \hat{n}\phi_{\lambda-s} \rangle = (\lambda - s)\|\phi_{\lambda-s}\|^2,$$

$$\langle \phi_{\lambda-s}, \hat{n}\phi_{\lambda-s} \rangle = \langle \phi_{\lambda-s}, \hat{a}^\dagger \hat{a}\phi_{\lambda-s} \rangle = \|\hat{a}\phi_{\lambda-s}\|^2.$$

Ya que la norma es no negativa de las— dos igualdades anteriores se obtiene:

$$\lambda - s = \frac{||\hat{a}\phi_{\lambda-s}||^2}{||\phi_{\lambda-s}||^2} \geq 0.$$

Luego, debe existir un número finito de vectores propios $\phi_{\lambda-s}$ lo que significa que debe existir ϕ_0 tal que $\hat{a}\phi_0 = 0$.

El vector ϕ_0 es un vector propio de \hat{n} con valor propio cero. Ya que $\hat{n}\phi_0 = \hat{a}^\dagger\hat{a}\phi_0 = \hat{a}^\dagger 0 = 0$.

Se definen ahora los vectores normalizados:

$$\phi_0 = \phi_0/||\phi_0||, \phi_1 = C_1\hat{a}^\dagger\phi_0, \dots, \phi_m = C_m(\hat{a}^\dagger)^m\phi_0.$$

De las consideraciones anteriores, se sabe que los ϕ_m son vectores propios de \hat{n} con valor propio m . Las constantes C_m son escogidas de tal modo que los ϕ_m se encuentren normalizados. Se deja al lector demostrar que

$$C_m = \sqrt{\frac{1}{m!}}.$$

De esta forma, el procedimiento puede ser sintetizado de la siguiente forma.

Se aplica a ϕ_0 el operador \hat{a}^\dagger , consecutivamente, con objeto de obtener un sistema de vectores y valores propios de \hat{n} , dados por

$$\phi_m = \frac{1}{\sqrt{m!}}\hat{a}^m\phi_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

respectivamente. Estos vectores propios se encuentran normalizados por construcción y son ortogonales entre sí debido a que son vectores propios de un operador hermiteano con diferentes valores propios, es decir,

$$\langle \phi_m, \phi_{m'} \rangle = \delta_{m,m'}.$$

Así, el conjunto $\{\phi_m\}_{m=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} .

Los operadores \hat{a}^\dagger , \hat{a} , denominados **Operadores de Creación y Aniquilación de Partículas**, respectivamente, actúan sobre el vector ϕ_m de la siguiente forma:

$$\hat{a}^\dagger \phi_m = \sqrt{m+1} \phi_{m+1}, \quad \hat{a} \phi_m = \sqrt{m-1} \phi_{m-1}.$$

Finalmente, de acuerdo a los resultados obtenidos, el operador

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2} I = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{I}{2} \right),$$

satisface:

$$\hat{H} \phi_m = \hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) \phi_m, \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots$$

10.2. Segunda cuantización. Bosones. Sea $\Lambda_l \subset R^d$ el cubo definido como:

$$\Lambda_l = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d : 0 < x_1 < l, \dots, 0 < x_d < l\},$$

y sea

$$\mathcal{H}^l = L^2(\Lambda_l).$$

Sea $S^l = -\Delta$ un operador autoadjunto sobre \mathcal{H}^l con espectro discreto

$$0 = l^{-2}E_0 < l^{-2}E_1 \leq l^{-2}E_2 \leq \dots$$

y funciones propias normalizadas $\{\phi_k\}$ satisfaciendo

$$-\frac{1}{2}\Delta\phi_k(x) = l^{-2}E_k\phi_k(x) ,$$

bajo condiciones de frontera adecuadas. En este caso, $\{\phi_k\}$ constituye una base de $L^2(\Lambda_l)$ y representa un conjunto de estados posibles para un sistema constituido por una partícula confinada en Λ_l .

Consideremos ahora un sistema de N -partículas encerradas en la región Λ_l . Un estado del sistema queda representado por una función $\psi(x_1, \dots, x_N) \in L^2(\Lambda_l^N)$ construida a partir del conjunto de funciones $\{\Psi_K^{(N)}\}$ donde

$$\Psi_K^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \otimes_{j=1}^N \phi_{k_j}(x_j),$$

y $K = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$. Este constituye una base ortonormal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(N),l} = \otimes_{i=1}^N \mathcal{H}^l$ dotado del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{(N),l}}$ dado por:

$$\langle \Psi_K^{(N)}, \Psi_L^{(N)} \rangle_{\mathcal{H}^{(N),l}} = \prod_{j=1}^N \langle \phi_{k_j}, \phi_{l_j} \rangle_{L^2(\Lambda_l)} ,$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Lambda_l)}$ el producto interno usual definido sobre $L^2(\Lambda_l) = \mathcal{H}^l$. Cada uno de estos productos internos induce las correspondientes

normas que denotaremos por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^l}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{(N),l}}$ en el caso de \mathcal{H}^l y $\mathcal{H}^{(N),l}$ respectivamente.

Se define el **Espacio de Fock** $\mathcal{F}(\mathcal{H}^l)$ como:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}^l) = \oplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N),l} .$$

El producto interno y la norma sobre $\mathcal{F}(\mathcal{H}^l)$ quedan dados por las expresiones:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathcal{F}} = \Psi^{(0)} \Phi^{(0)} + \sum_{J=1} \langle \Psi^{(J)}, \Phi^{(J)} \rangle_{\mathcal{H}^{(J),l}},$$

$$\|\Phi\|_{\mathcal{F}} = |\Phi^{(0)}|^2 + \sum_{J=1} \|\Phi^{(J)}\|_{\mathcal{H}^{(J),l}}$$

siendo $\Phi = (\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(J)}, \dots)$ con $\Phi^{(J)} \in \mathcal{H}^{(J),l}$, $J \in \mathbb{N}$. Por comodidad se hará eventualmente, uso de la notación \mathcal{F} en lugar de $\mathcal{F}(\mathcal{H}^l)$.

Sea $\phi \in \mathcal{H}$ unitario. Se definen los operadores $\hat{b}^\dagger(\phi) : \mathcal{H}^{(N),l} \rightarrow \mathcal{H}^{(N+1),l}$ y $\hat{b}(\phi) : \mathcal{H}^{(N),l} \rightarrow \mathcal{H}^{(N-1),l}$ por

$$\hat{b}^\dagger(\phi) \Psi_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{(N)} = \sqrt{N+1} \phi \otimes \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N,$$

y

$$\hat{b}(\phi) \Psi_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{(N)} = \sqrt{N} \langle \phi, \phi_1 \rangle_{\mathcal{H}} \phi_2 \otimes \dots \otimes \phi_N,$$

siendo $\Psi_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{(N)} = \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N$. Es fácil demostrar que ambos operadores son no acotados con respecto a la norma de operadores definidos sobre subespacios de $\mathcal{F}(\mathcal{H}^l)$ dada por la expresión

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H}^l); \|\Psi\|_{\mathcal{F}}=1} \|\hat{A}\Psi\|_{\mathcal{F}}.$$

Sea $\mathcal{H}_B^{(N),l}$ el subespacio de $\mathcal{H}^{(N),l}$ consistente de funciones simétricas (**Sistema de Bose**).

Las funciones en $\mathcal{H}_B^{(N),l}$ pueden ser escritas usando la base ortonormal $\{\Psi_{B,K}^{(N)}\}$ de funciones simétricas generadas a partir de ésta de acuerdo a

$$(S_B^N \Psi_{B,K}^{(N)})(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in \sigma_N} P \Psi_{B,K}^{(N)}(x_1, \dots, x_N),$$

donde S_B^N representa el operador de simetrización y σ_N es el grupo de permutaciones de N elementos, es decir, si $P \in \sigma_N$ se tiene

$$P\Psi^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \psi^{(N)}(x_{p_1}, \dots, x_{p_N}).$$

En otras palabras

$$[S_B^N \Psi_{B,K}^{(N)}(x_1, \dots, x_N)] = \frac{1}{N!} \sum_p P \left[\prod_{j=1}^N \phi_{k_j}(x_j) \right].$$

Más aún $\{\Psi_{B,K}^{(N)}(x_1, \dots, x_N)\}$ forma una base ortonormal de $\mathcal{H}_{B,l}^{(N)}$.

El conjunto $\{|N_K\rangle\}$ donde

$$|N_K\rangle = \sqrt{\frac{N!}{\prod_{\sigma} N_{k_{\sigma}}!}} \Psi_{B,\{k_1, \dots, k_N\}}^{(N)}$$

constituye la así llamada base número de ocupaciones la cual es un conjunto completo de funciones propias en $\mathcal{H}_B^{(N),l}$.

Siendo $\mathcal{H}_B^{0,l} \equiv \mathbb{C}$ y $S_B = \bigoplus_{N=0}^{\infty} S_B^N$ el espacio de Fock bosónico (simétrico) $\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^l)$ se define como:

$$(1) \quad \mathcal{F}_B(\mathcal{H}^l) = S_B(\mathcal{F}(\mathcal{H}^l)) = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_B^{(N),l}.$$

Usando los operadores $\hat{b}^\dagger(\phi)$ y $\hat{b}(\phi)$ antes introducidos es posible definir sobre $\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^l)$ los operadores

$$\hat{a}^\dagger(\phi_j) : \mathcal{H}_B^{(N),l} \rightarrow \mathcal{H}_B^{(N+1),l}, \quad a(\phi_j) : \mathcal{H}_B^{(N),l} \rightarrow \mathcal{H}_B^{(N-1),l}$$

(Operadores de Bose de Creación y Aniquilación de Partículas), donde los ϕ_j pertenecen a una base ortonormal de \mathcal{H}^l , de la siguiente forma: $\hat{a}^\dagger(\phi_j) = S_B b^\dagger(\phi_j) S_B$, $\hat{a}(\phi_j) = S_B b(\phi_j) S_B$.

Estos operadores satisfacen las reglas de conmutación

$$(2) \quad [\hat{a}(\phi_i), \hat{a}^\dagger(\phi_j)] = \hat{a}(\phi_i) \hat{a}^\dagger(\phi_j) - \hat{a}^\dagger(\phi_j) \hat{a}(\phi_i) = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}^l} \delta_{i,j}.$$

Se definen además los operadores

$$(3) \quad \hat{n}(\phi_i) = \hat{a}^\dagger(\phi_i)\hat{a}(\phi_i), \quad \hat{N} = \sum_{j \geq 1} \hat{n}(\phi_j).$$

El primero se denomina operador de número asociado al estado ϕ_i y el segundo es el operador de número total para el cual se tiene que,

$$(4) \quad \hat{N}\Psi_K^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = N\Psi_K^{(N)}(x_1, \dots, x_N).$$

En lo que sigue adoptaremos la notación $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i, \hat{n}_i$ por $\hat{a}^\dagger(\phi_i), \hat{a}(\phi_i), \hat{n}(\phi_i)$, respectivamente.

Nos ocuparemos ahora de la representación de operadores en el espacio de Fock simétrico. A este proceso es al que llamamos *Segunda Cuantización*.

Si $A_n = A_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ es un operador que representa la interacción en un sistema de n - partículas, entonces su acción sobre el espacio $\mathcal{H}^{(N),l}$ viene dada por la expresión:

$$A_n^{(N)} = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq N} A(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}).$$

El operador A_n que actúa sobre $\mathcal{F}(\mathcal{H}^l)$ se denomina **Segunda Cuantización del Operador** $A_n^{(N)}$ si su acción sobre dicho espacio queda determinada de la siguiente forma:

$$(A_n \mathcal{F}_B(\mathcal{H}^l))^{(N)} = A_n^{(N)} \mathcal{H}_B^{(N),l}.$$

Considerando que el conjunto de funciones $\{\Psi_{B,K}^{(N)}\}$ es denso en $\mathcal{H}_B^{(N),l}$ se obtiene que:

$$(A_n \cdot)^{(N)} = \sum_{K,L} \Psi_{B,K}^{(N)} \left\langle \Psi_{B,K}^{(N)}, A_n^{(N)} \Psi_{B,L}^{(N)} \right\rangle_{\mathcal{H}^{(N),l}} \left\langle \Psi_{B,L}^{(N)}, \cdot \right\rangle_{\mathcal{H}^{(N),l}}.$$

Por último, esta expresión y el hecho que:

$$\begin{aligned} \Psi_{B,K}^{(N)} &= \Psi_{B, \{k_\alpha, \dots, k_\alpha, k_\beta, \dots, k_\beta, \dots, k_\sigma, \dots, k_\sigma\}}^{(N)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} ((\hat{a}^\dagger(\phi_{k_\alpha}))^{N_{k_\alpha}} (\hat{a}^\dagger(\phi_{k_\beta}))^{N_{k_\beta}} \dots (\hat{a}^\dagger(\phi_{k_\sigma}))^{N_{k_\sigma}} \Omega)^{(N)}, \end{aligned}$$

siendo $N_{k_\alpha} + N_{k_\beta} + \dots + N_{k_\sigma} = N$ y $\Omega = (1, 0, 0, 0, \dots)$ (*vector vacío*), conduce a que la restricción del operador A_n a $\mathcal{H}_B^{(N),l}$ pueda ser escrita como combinación de los operadores de creación y aniquilación de partículas.

11. TRANSICIONES DE FASE

11.1. Sistemas de Bose. El fenómeno de condensación bosónica (BEC en inglés), predicho primero por Einstein en 1925, corresponde a una ocupación macroscópica de un estado cuántico (estado fundamental) por un gran número de bosones idénticos (partículas cuyos estados están representados por funciones simétricas). En efecto, si el número de partículas es una cantidad conservada en un sistema bosónico, entonces una cantidad apreciable de éstas podrían condensar, en un mismo estado cuántico, a muy bajas temperaturas. Este fenómeno ha sido extensamente estudiado en el contexto de la Mecánica Estadística de sistemas en equilibrio, como un tipo de transición de fase de segundo orden, asociada a la no analiticidad respecto de parámetros usuales (temperatura, potencial químico, etc.), en el denominado límite termodinámico, de funciones conocidas. En este escenario, la densidad de partículas permanece constante, mientras el número de partículas y el volumen de la región que las contiene tienden a infinito.

La teoría predice que a bajas temperaturas y gran densidad de partículas los efectos cuánticos juegan un papel esencial en el comportamiento macroscópico del sistema. Más aún, bajo asunciones adecuadas, para algún tipo de modelos (homogéneos no interactuantes y débilmente interaccionantes) para los cuales se verifica la condensación bosónica, el formalismo matemático muestra que una ruptura espontánea de simetría asociada a transformaciones de gauge locales podría ocurrir.

Las estrategias matemáticas iniciales se basaron principalmente en conceptos como los ya mencionados (límite termodinámico, ruptura de simetrías y los llamados métodos de segunda cuantización), especialmente

en el contexto de la relación entre este fenómeno y la superfluidez verificada en mezclas de helio líquido a bajas temperaturas, cuestión sugerida por London en 1938 [5].

La teoría (1947) sobre gases de bosones con interacción débil [6] desarrollada por N.N. Bogolyubov proveyó el contexto teórico necesario para el desarrollo ulterior de técnicas destinadas a analizar este fenómeno. Su estrategia se basó en la aplicación de métodos matemáticos provenientes de la llamada teoría de perturbaciones al estudio de gases de Bose diluidos y a baja temperatura. El principal resultado es que en orden a estudiar el sistema original, el operador que representa su energía (Hamiltoniano) puede ser sustituido por uno más simple, representativo de un sistema de cuasipartículas de Bose sin interacciones, denominadas también fonones.

A partir de entonces, múltiples estrategias provenientes de diferentes áreas de las matemáticas: análisis funcional y teoría de operadores, métodos de grandes desvíos (Modelos de campo medio. Ver por ejemplo [7]), análisis no lineal, etc. han constituido y constituyen tierra fértil para la teorización y la búsqueda experimental, tanto en el caso del estudio de la mecánica estadística del equilibrio como en de la dinámica de estos sistemas.

Los experimentos actuales son realizados sobre metales alcalinos, poseedores de momentos magnéticos, lo que permite confinarlos en trampas magnéticas.

La técnica de enfriamiento láser conduce a la disminución de las velocidades de los átomos, permitiendo a los más calientes abandonar su encierro, obteniendo de esta forma temperaturas muy cercanas al cero absoluto. Esto conduce finalmente a la emergencia del esperado condensado.

Sin embargo y como resulta evidente, nociones como la de límite termodinámico pierden aquí su sentido.

La práctica indica que los tiempos que median entre la elaboración de una teoría y su confirmación o desestimación experimental, aunque sea parcialmente, son variables, dependiendo fundamentalmente de la tensión existente entre lo que se postula y las capacidades técnicas, objetivas, disponibles para su corroboración experimental. No hay antecedente alguno que permita predecir a priori si muchas de las conjeturas de hoy serán desechadas o demostradas mañana. En la práctica así ha sucedido hasta nuestros días. La validación es siempre paulatina y variable en el tiempo.

11.2. Estados y observables. Recordemos de la sección anterior que el espacio de estados para un sistema consistente de una partícula queda definido como el Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\Lambda_l),$$

donde $\Lambda_l \subset R^d$, $V_l = l^d$, representan la región que la contiene y el volumen de la misma, respectivamente.

Los observables quedan establecidos por medio de un álgebra de operadores autoadjuntos, en general no acotados, $(\mathcal{A}, *)$, con involución $*$.

11.3. Segunda cuantización. A partir de copias del espacio de estados para un sistema de una partícula es posible definir un espacio de estados para sistemas con un número infinito de éstas. Así, siendo S_B el denominado operador de simetrización, se construye el espacio de Hilbert \mathcal{H}_B^N para exactamente N partículas como suma directa de los anteriores, de la siguiente forma $\mathcal{H}_B^N := S_B \left(\otimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \right)$. Esto permite, finalmente, definir el llamado espacio de Fock $\mathcal{F}_B := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_B^N$, $\mathcal{H}_B^0 = C$, sobre el

cual se definen, además. los bien conocidos operadores de aniquilación y creación de partículas \hat{a}, \hat{a}^\dagger , satisfaciendo las reglas de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$. En estas condiciones el mecanismo que permite escribir los observables en términos de ellos, $A(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, denominado segunda cuantización, permite que estos último queden bien definidos sobre \mathcal{F}_B . En este caso, un operador autoajunto \hat{H}_l (Hamiltoniano), define el operador de energía sobre \mathcal{F}_B y $\hat{H}_l^{(N)} = \hat{H}_l|_{\mathcal{H}_B^N}$ representa su restricción al espacio de exactamente N partículas. El parámetro $\beta = \theta^{-1}$ es la temperatura inversa y μ el potencial químico. Finalmente se tiene que $\hat{H}_l(\mu) = \hat{H}_l - \mu\hat{N}$, donde \hat{N} constituye el operador número total de partículas. Estas funciones termodinámicas son continuas para valores de sus parámetros. Más aún, en general, satisfacen, respecto de ellos, condiciones de convexidad, a volumen finito.

11.4. Función de partición, energía libre y presión. Conjuntos canónico y gran canónico. Todas las propiedades termodinámicas de importancia pueden ser derivadas de las funciones mencionadas anteriormente al pasar al límite $V_l \rightarrow \infty$. En este contexto se definen las funciones de gran partición y presión gran canónica a volumen finito, respectivamente, como:

$$Z(\beta, \mu) = \text{Tr}_{\mathcal{F}_B} \exp\left(-\beta\hat{H}_l(\mu)\right),$$

$$p_l(\beta, \mu) = \frac{1}{\beta V_l} \ln \text{Tr}_{\mathcal{F}_B} e^{-\beta\hat{H}_l(\mu)}.$$

Por otra parte, la función de partición y energía libre, canónicas, a volumen finito, están dadas por las expresiones:

$$Z_l^{(N)}(\beta) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{(N),l}} e^{-\beta\hat{H}_l^{(N)}}.$$

$$f_l(\beta, \varrho_l) = -\frac{1}{\beta V_l} \ln \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{(N)}} e^{-\beta \hat{H}_l^{(N)}},$$

respectivamente, donde $\varrho_l = \frac{N_l}{V_l}$ es la densidad de partículas en el conjunto canónico.

11.5. Estado de Gibbs. El valor esperado de los observables se obtiene a través de la aplicación del funcional definido como

$$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = Z^{-1}(\beta, \mu) \text{Tr}_{\mathcal{F}_B} \hat{A} \exp(-\beta \hat{H}_l(\mu)).$$

Por otro lado, dada la restricciones de los operadores $\hat{H}_l^{(N)}$ de \hat{H}_l y $\hat{A}_l^{(N)}$ de A_l al espacio $\mathcal{H}_B^{(N),l}$, el promedio termal, en el conjunto canónico, del operador $\hat{A}_l^{(N)}$ respecto a $\hat{H}_l^{(N)}$ está dado por:

$$\left\langle \hat{A}_l^{(N)} \right\rangle_{\hat{H}_l^{(N)}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{(N),l}} \hat{A}_l^{(N)} e^{-\beta \hat{H}_l^{(N)}} / Z_l^{(N)}(\beta),$$

11.6. Límite termodinámico. Se definen la energía libre canónica y la presión límites de la siguiente forma:

$$\lim_{N_l, V_l \rightarrow \infty} f_l(\beta, \varrho_l) = f(\beta, \varrho), \quad \lim_{N_l, V_l \rightarrow \infty} \varrho_l = \varrho,$$

$$\lim_{V_l \rightarrow \infty} p_l(\beta, \mu) = p(\beta, \mu).$$

Finalmente, la densidad de partículas en el sistema gran canónico, que se asumirá constante, queda dada por la expresión:

$$\lim_{V_l \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\hat{N}}{\hat{V}_l} \right\rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = \lim_{V_l \rightarrow \infty} \rho_l(\mu) = \rho(\mu).$$

11.7. Modelo de Bose de partículas interactuantes. El operador de energía que caracteriza un sistema con interacciones entre pares de partículas representado por un potencial del tipo $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en un sistema de bosones es el siguiente:

$$\hat{H}_l = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \lambda_l(\mathbf{p}) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q} \in \Lambda_l^*} \hat{V}(\mathbf{q}) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}.$$

En este caso, $\hat{V}(\mathbf{q})$ es la transformada de Fourier discreta del potencial de interacción V entre pares de partículas, $\lambda_l(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2$ para $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, $\lambda_l(\mathbf{p}) > \lambda_l(\mathbf{0}) \geq 0$ y $\Lambda_l^* = \{\mathbf{p} = (\dots, p_\alpha, \dots) \in \mathbb{R}^d : p_\alpha = 2\pi n_\alpha/l, n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, 2, \dots, d\}$. Como antes, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}}$ son operadores de creación y aniquilación de partículas, definidos sobre el espacio de Fock $\mathcal{F}_{\mathbf{B}}$, satisfaciendo las reglas de conmutación:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{p} = \mathbf{q} \\ 0 & \text{if } \mathbf{p} \neq \mathbf{q} \end{cases}$$

Aquí, $\hat{n}_{\mathbf{p}} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}$ representa el operador de número asociado al modo \mathbf{p} .

Además se definen:

$$\hat{H}_l^0 = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \lambda_l(\mathbf{p}) \hat{n}_{\mathbf{p}}: \text{Operador de energía libre.}$$

$$\hat{H}_l^I = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \hat{V}(\mathbf{q}) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}: \text{Operador de interacción.}$$

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \hat{n}_{\mathbf{p}}: \text{Operador número total de partículas.}$$

11.8. Operadores de modelos de Campo Medio- Tipo Huang-Davies.

$$\hat{H}_l^{HD} = \lambda_l(0)\hat{n}_0 + \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^* \setminus \{0\}} \lambda_l(\mathbf{p})\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + V_l g \left(\frac{\hat{N}}{V} \right),$$

$$g(x) \geq x^2, \quad x \in [0, \infty), \quad g(0) = 0.$$

En este caso, dado que este modelo resulta ser diagonal respecto de los operadores de número \hat{n}_p , el espacio de Fock puede ser reescrito como el siguiente producto tensorial: $\mathcal{F}_B = \otimes_{p \in \Lambda_l^*} \mathcal{F}_p^B$.

11.9. Sistemas estables y superestables. Un sistema se dice estable si existe $\mu_* \in \mathbb{R}$ such that for $\mu \in (-\infty, \mu_*]$ se cumpla que $p(\beta, \mu) < \infty$ y se dice superestable si $p(\beta, \mu) < \infty$ es finita para todo valor real de μ . La condición de superestabilidad, escrita como desigualdad en el sentido de operadores, es la siguiente:

$$\hat{H}_l^I \geq -\frac{C_2}{V_l} \hat{N} + \frac{C_1}{V_l} \hat{N}^2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas.

11.10. Tipos de condensación bosónica.

- Condensación del tipo I: Ocupación Macroscópica de un número finito de estados, incluyendo el estado fundamental.
- Condensación del tipo II: Ocurre cuando existe un número infinito de estados macroscópicamente ocupados.

- Condensación del tipo III: Tiene lugar en ausencia de estados macroscópicamente ocupados. Sin embargo se verifica la siguiente condición:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{V_l \rightarrow \infty} \frac{1}{V_l} \sum_{p \in \Lambda^*, \lambda_l(p) < \delta} \langle \hat{n}_p \rangle_{\hat{H}_l(\mu)} > 0.$$

11.11. Condensación tipo I. $\lim_{V_l \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\hat{n}_0}{V_l} \right\rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = \rho_0 > 0$

Ejemplo 11.1. (*Sistema Libre o Gas Ideal*) En el caso del gas ideal de bosones, para $\alpha < \lambda_l(\mathbf{0})$, se tiene,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^l)} [e^{-\beta \hat{H}_l^0(\alpha)}] &= \prod_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \sum_{\{n_{\mathbf{p}}\}} e^{-\beta(\lambda_l(\mathbf{p}) - \alpha)n_{\mathbf{p}}} = \\ &= \prod_{\mathbf{p}} (1 - e^{-\beta(\lambda_l(\mathbf{p}) - \alpha)})^{-1}. \end{aligned}$$

De esto se obtiene la siguiente expresión para la presión a volumen finito del gas ideal:

$$p_l^{(id)}(\beta, \alpha) = -\frac{1}{\beta V_l} \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \ln(1 - e^{-\beta(\lambda_l(\mathbf{p}) - \alpha)}).$$

Este resultado conduce a

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle_{\hat{H}_l^0(\alpha)} = \frac{1}{e^{\beta(\lambda_l(\mathbf{p}) - \alpha)} - 1}.$$

Lo anterior permite determinar la siguiente relación:

$$\rho_l^{(id)}(\alpha) = \rho_{\mathbf{0},l}^{(id)}(\beta, \alpha) + \frac{1}{V_l} \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^* \setminus \{0\}} \langle \hat{n}_j \rangle_{\hat{H}_l^0(\alpha)},$$

donde $\rho_l^{(id)}(\alpha)$, $\rho_{1,l}^{(id)}(\beta, \alpha)$ representan la densidad total de partículas y la densidad de partículas asociados al nivel de energía mínima a potencial químico α y volumen finito V_l respectivamente.

Tomando una sucesión $\{\alpha_l\}$ tal que $\alpha_l \rightarrow 0^-$, en el límite termodinámico (cuando $V_l \rightarrow \infty$) se obtiene:

$$\rho^{(id)}(0) = \rho_1^{(id)}(\beta, 0) + \rho_c^{(id)}(\beta),$$

donde se asume que

$$\rho_c^{(id)}(\beta) = \lim_{V_l \rightarrow \infty} \frac{1}{V_l} \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^* \setminus \{0\}} \frac{1}{e^{\beta \lambda_l(\mathbf{p})} - 1} < \infty.$$

Por lo tanto

$$\rho_1^{(id)}(\beta, 0) = \rho^{(id)}(0) - \rho_c^{(id)}(\beta).$$

Claramente $\rho^{(id)}(0)$ es independiente del parámetro β mientras que $\rho_c^{(id)}(\beta)$ es una función decreciente del mismo. Por lo tanto la condición de condensación se satisface para valores de β estrictamente mayores que un valor crítico β_c , el cual es solución única de la ecuación $\rho^{(id)}(0) = \rho_c^{(id)}(\beta)$.

11.12. Leyes de conservación y reglas de selección. Entre las simetrías discretas asociadas a sistemas cuánticos se encuentran, entre otras, la paridad, la conjugación de carga y la reversión del tiempo. La primera tiene importancia en el estudio de partículas y sus respectivas antipartículas, tales como electrones y positrones, especialmente en el análisis de ecuaciones dinámicas (como la de Dirac) y consiste en el cambio de todos los signos de las cargas eléctricas en las funciones u operadores que describen la dinámica del sistema.

En 1918, Emmy Noether, estableció la conexión existente entre simetrías continuas y leyes de conservación en la naturaleza. De acuerdo a Noether, “Si un sistema tiene una simetría continua, entonces hay cantidades asociadas cuyos valores se conservan en el tiempo”. Por ejemplo, la invariancia frente a traslaciones conserva el momento lineal, la invariancia del tiempo conduce a la conservación de la energía y la invariancia respecto a la rotación en torno a un eje dado conserva el momento angular.

Si se satisface la condición

$$[O, \hat{H}_l(\mu)] = 0,$$

siendo

$$O(t) = e^{-it\hat{H}_l(\mu)} O e^{it\hat{H}_l(\mu)},$$

se demuestra que

$$\frac{dO(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [O, \hat{H}_l(\mu)] = 0.$$

Si $O = \hat{N}$, en la relación anterior, es decir el número total de partículas es una cantidad conservada en el sistema, $\hat{H}_l(\mu)$ resulta ser invariante bajo las transformaciones de gauge asociadas al grupo $U(1)$, dadas por

$$\hat{a}_p \rightarrow e^{i\varphi} \hat{a}_p, \quad \hat{a}_p^\dagger \rightarrow e^{-i\varphi} \hat{a}_p^\dagger,$$

lo cual conduce a las siguiente regla de selección::

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdot \hat{a}_{\mathbf{p}_r}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}_1} \cdot \hat{a}_{\mathbf{q}_s} \rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = 0, \text{ si } r \neq s.$$

En particular,

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = V_l \eta_l = 0.$$

Por otro lado, la invarianza frente a traslaciones está asociada a la conservación del momentum total en el sistema cuyo operador asociado es el siguiente:

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l} \mathbf{p} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}$$

En este caso:

$$[\hat{H}_l(\mu), \mathbf{P}] = 0 \Rightarrow \langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdot \hat{a}_{\mathbf{p}_r}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}_1} \cdot \hat{a}_{\mathbf{q}_s} \rangle_{\hat{H}_l(\mu)} = 0, \text{ si } \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_r \neq \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_s.$$

11.13. Condensación de Bose-Einstein y rupturas de simetrías.

Se introduce el término

$$\sqrt{V} \nu (e^{i\theta} \hat{a}_0^\dagger + e^{-i\theta} \hat{a}_0),$$

$\nu > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ en el Hamiltoniano $\hat{H}_l(\mu)$ con objeto de romper la simetría, de la siguiente forma:

$$\hat{H}_{l,\nu}(\mu) = \hat{H}_l(\mu) - \sqrt{V} \nu (e^{i\theta} \hat{a}_0^\dagger + e^{-i\theta} \hat{a}_0).$$

Esto conduce a:

$$[\hat{N}, \hat{H}_{l,\nu}(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle_{\hat{H}_{l,\nu}(\mu)} = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle_{\hat{H}_{l,\nu}(\mu)} = V_l \eta_{l,\nu} \neq 0.$$

Más aún,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \lim_{V_l \rightarrow \infty} |\eta_l|^2 = \begin{cases} \rho_0 \neq 0 & \text{if } \beta \geq \beta_c \\ 0 & \text{if } \beta < \beta_c \end{cases}$$

Para $\beta < \beta_c$

Ejemplo 11.2. *Consideremos el Hamiltoniano libre perturbado*

$$\hat{H}_{l,\nu}(\mu) = \hat{H}_l^0(\mu) - \sqrt{V}\nu(e^{i\theta}\hat{a}_0^\dagger + e^{-i\theta}\hat{a}_0).$$

Aplicaremos a este operador las siguientes transformaciones

$$\hat{a}_0 = -\frac{\nu}{\mu}e^{i\theta}\sqrt{V} + \hat{b}_0, \quad \hat{a}_0^\dagger = -\frac{\nu}{\mu}e^{-i\theta}\sqrt{V} + \hat{b}_0^\dagger$$

En este caso:

$$\hat{H}_l^0 = -\mu\hat{b}_0^\dagger\hat{b}_0 + \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^* \setminus \{0\}} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} - \mu \right) \hat{a}_\mathbf{p}^\dagger \hat{a}_\mathbf{p} + \frac{\nu^2 V}{\mu}.$$

Se asume que:

$$\mu = -\frac{\nu}{\sqrt{\rho_{0,l}}}.$$

Claramente:

$$\langle \hat{b}_0^\dagger \rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} = \langle \hat{b}_0 \rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} = 0.$$

Además:

$$\bar{\rho}_{0,l} = \langle \hat{b}_0^\dagger \hat{b}_0 \rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} = \left(\exp \beta \left(\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}} \right) - 1 \right)^{-1}$$

$$\langle \hat{n}_\mathbf{p} \rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} = \left(\exp \beta \left(\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2} \right) - 1 \right)^{-1},$$

luego:

$$\rho_l = \bar{\rho}_{0,l} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^* \setminus \{0\}} \left(\exp \beta \left(\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2} \right) - 1 \right)^{-1}.$$

En el límite termodinámico obtenemos:

$$\rho = \bar{\rho}_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(\exp \beta \left(\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2} \right) - 1 \right)^{-1} d^3 \mathbf{p}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\hat{b}_0^\dagger \hat{b}_0}{V} \right\rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} &= \left\langle \left(\frac{\hat{a}_0^\dagger}{\sqrt{V}} - \sqrt{\rho_{0,l}} e^{-i\theta} \right) \left(\frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V}} - \sqrt{\rho_{0,l}} e^{i\theta} \right) \right\rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} \\ &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \left(\exp \beta \left(\frac{\nu}{\sqrt{\rho_{0,l}}} \right) - 1 \right)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

De esto sigue que:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \left(\left\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \right\rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} - \sqrt{\rho_{0,l}} e^{-i\theta} \left\langle \frac{\hat{a}_0^\dagger}{\sqrt{V}} \right\rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} \right. \\ \left. - \sqrt{\rho_{0,l}} e^{i\theta} \left\langle \frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} + \rho_l \right) = 0. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que:

$$\rho_0 = \lim_{V \rightarrow \infty} \left| \left\langle \frac{\hat{a}_0^\dagger}{\sqrt{V}} \right\rangle_{\hat{H}_{l,\nu}^0(\mu)} \right|^2$$

11.14. Gas de bosones débilmente interactuantes. El denominado Gas de Bose débilmente interactuante queda determinado por la condición $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. De esta forma el Hamiltoniano del sistema está dado por la expresión:

$$\hat{H}_l = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \frac{\mathbf{p}^2}{2} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V_l} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q} \in \Lambda_l^*} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}.$$

Aquí hemos considerado la masa m de las partículas igual a uno.

De acuerdo a la propuesta de Bogolyubov, el número de partículas promedio en el estado fundamental es muy grande (10^{23}) en el caso del ^4He , líquido, y también para gases alcalinos (10^5) a bajas temperaturas. En este sentido se considera que los operadores de creación y aniquilación, bajo esas condiciones, se comportan como números, es decir conmutan y pueden ser sustituidos por $\sqrt{VN_0}$, donde N y N_0 representan el número de partículas en el sistema y el número de partículas en el estado fundamental, respectivamente. Lo anterior, asociado a consideraciones respecto del tránsito de partículas entre el condensado y la fase no condensada, conducen a un nuevo operador de energía:

$$\hat{H}_l = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \frac{\mathbf{p}^2}{2} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{gN}{V} \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{gN}{2V} \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} \right) + \frac{gN^2}{2V}.$$

Usando las denominadas transformaciones de Bogolyubov:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger - v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}},$$

con

$$v_{\mathbf{p}}^2 - u_{\mathbf{p}}^2 = 1$$

y definiendo

$$n = \frac{N}{V}, \quad n_0 = \frac{N_0}{V},$$

\hat{H}_l puede ser escrito en términos de los nuevos operadores, los cuales representan excitaciones elementales, algunas veces denominadas **Cua-**
sipartículas. En este caso:

$$\hat{H}_l = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_l^*} \epsilon_l(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + 2\xi_l(\mathbf{p}) v_{\mathbf{p}}^2 - gn2u_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}}$$

donde el espectro de excitaciones elementales está dado por:

$$\epsilon_l(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + 2n_0g \right)}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Lambda_l^*$$

y

$$\xi_l(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + gn_0, \quad \forall \mathbf{p} \in \Lambda_l^*$$

Por otra parte

$$\epsilon_l(\mathbf{p}) \approx \begin{cases} s\|\mathbf{p}\| & \text{si } \|\mathbf{p}\| \ll \sqrt{2gn} \\ \frac{\mathbf{p}^2}{2} & \text{si } \|\mathbf{p}\| \gg \sqrt{2gn}. \end{cases},$$

donde $s = \sqrt{gn}$.

L. Landau demostró que este tipo de espectro conduce a superfluidez, es decir a la ausencia de disipación.

11.15. Gases confinados. Átomos confinados en trampas magnéticas son enfriados usando técnicas de enfriamiento laser y evaporización.

Potencial de confinamiento (trampas magnéticas)

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_z$$

donde los números n_x, n_y, n_z toman valores positivos y discretos.

Estado fundamental

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\omega_{h_0}}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right]$$

$$\omega_{h_0} := (\omega_x \omega_y \omega_z)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \otimes_{i=1}^N \phi_0(\mathbf{r}_i)$$

La energía de estado fundamental es $E_{000} = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$ y $n(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2$.

Tamaño del condensado

$$a_{h_0} = \int |\phi_0(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{h_0}}\right)^{1/2}$$

Número de partículas en el conjunto gran canónico

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \left(e^{\beta(E_{n_x n_y n_z} - \mu)} - 1 \right)^{-1}$$

$$\text{For } \mu = \mu_c = \frac{1}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$$

$$N - N_0 = \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{e^{\beta \hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1}$$

Aproximación semiclásica

$$\theta \gg \hbar \omega_{h_0}$$

$$\begin{aligned} N - N_0 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dn_x dn_y dn_z}{e^{\beta \hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1} \\ &= \zeta(3) \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega_{h_0}} \right)^3 \end{aligned}$$

donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann.

Cuando $N_0 \rightarrow 0$ se obtiene la temperatura crítica β_c de transición:

$$\beta_c^{-1} = \theta_c = \hbar \omega_{h_0} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} = C \hbar \omega_{h_0} N^{1/3}$$

En este caso un tipo de límite termodinámico puede ser obtenido haciendo $N \rightarrow \infty$, $\omega_{h_0} \rightarrow 0$ y manteniendo el producto $\omega_{h_0} N^{1/3}$ constante. para $\beta \geq \beta_c$. De esta forma:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta} \right)^3$$

Gas uniforme de Bose sin interacciones

$$\beta_c = \frac{2\pi\hbar}{m} \left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta} \right)^{3/2}$$

11.16. Algunos comentarios. Ketterle y van Druten probaron que los resultados obtenidos en sistemas de tamaño finito, en el caso de ciertos gases atómicos diluidos, para algunos valores de los parámetros críticos, tales como potencial químico, temperatura y densidad del condensado, difieren de aquellos obtenidos en el límite termodinámico. Más aún, mostraron que la ocupación de estados a bajas temperaturas, para aquellos parámetros, desaparecen [8,9].

Por otra parte, el número de átomos que pueden ser colocados en confinamiento magnético no puede ser considerado macroscópico. Los experimentos han sido desarrollados con un máximo cercano a los 10^7 átomos. Como consecuencia, el límite termodinámico no es alcanzado. Esto implica la ausencia de discontinuidades en las funciones termodinámicas. Sin embargo, la ocupación macroscópica del estado fundamental ocurre abruptamente cuando se hace descender la temperatura a niveles adecuados. La transición resulta aproximadamente concordante con el límite $N \rightarrow \infty$, pero este efecto, aunque interesante, es pequeño y no permite dar sentido a las expresiones “transición de fase” y “temperatura crítica”.

Sin embargo, a pesar de estas deficiencias, los confinamientos pueden ser muy anisotrópicos, cercanos a sistemas unidimensionales y bidimensionales, lo que permite el análisis del fenómeno en dimensionalidades

reducidas. En efecto, un estado condensado es imposible para un gas interactuante en un confinamiento en dos dimensiones en el límite termodinámico, aunque la condensación bosónica para sistemas finitos se verifica [10,11].

Referencias

- [1]. N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese . Z. Physik 26, pp. 168-171 (1924).
- [2]. A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.I, 3-14 (1925).
- [3]. M.H. Anderson, J. R. Ensher, M.R. Mathews, C.E. Wieman and E. A. Cornell. Vortex Rings in Two Components Bose-Einstein Condensates. Science 269, 198, (1995).
- [4]. K.B. Davies, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle: Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995).
- [5]. F. London. On the Bose- Einstein Condensation. Phys. Rev.54, 947 (1938).
- [6]. N. N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. J. Phys. (USSR), 11:23 (1947).
- [7]. M. van den Berg, J. T. Lewis and J. V. Pulé. Large Deviations and the Boson Gas. In: A. Truman and I. M.Davies, eds., Proceedings of Swansea, 1984, Lec. Notes Math. 1325, Berlin: Springer, 24-29 (1986).
- [8]. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari. *Rev. Mod. Phys.* 71, 463, (1999).
- [9]. Ph. W. Courteille, V S. Bagnato, V. I. Yukalov. *Laser Physics* Vol. 11, No. 6, 2001, pp. 659–800.
- [10]. W. J. Mullin. *J. Low. Temp. Phys.* Vol. 110, Issue 1-2, (1998).
- [11]. Wang Jian-Hui and Ma Yong-Li. *Chin. Phys. B* Vol. 19, No. 5 (2010)
- [12]. Dorlas T.C., Lewis J.T., Pulé J.V., *The full diagonal model of a Bose gas*, Commun. Math. Phys. 156 (1993), 37 – 65.

Digital Editions DMATULS
Communications Office
Departamento de Matemáticas ULS
Journalist: Mrs .Ingrid Torres Castillo
E-mail: edicionesdmatuls@userena.cl

DIGITAL EDITIONS DMATULS

Departamento de Matemáticas ULS

Facultad de Ciencias

Universidad de La Serena

Cisternas 1200, La Serena, Chile

<http://www.dmatuls.cl>

edicionesdmatuls@userena.cl