ACTAS
XXII COMCA

Julio 31-Agosto 2, 2013

Universidad de La Serena
Chile

Digital Editions-Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de La Serena-Chile

http://www.dmatuls.cl

This page has been left blank intentionally

DMATULS PROCEEDINGS

No.1, 2013

Digital Editions
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena (ULS)
Cisternas 1200, La Serena, Chile
edicionesdmatuls@userena.cl
http://www.dmatuls.cl

Design of logo, template, including cover and back cover: Departamento de Matemáticas, ULS.

ACTAS XXII COMCA UNIVERSIDAD DE LA SERENA

julio 31-agosto 2, 2013

PREFACIO

El Congreso de Matemáticas Capricornio es una iniciativa de periodicidad anual organizada por los Departamentos de Matemáticas de las Universidades de la Macro-Zona Norte: Universidad de Tarapacá (UTA)- Arica, Universidad Arturo Prat (UAP)-Iquique, Universidad de Antofagasta (UA)-Antofagasta, Universidad Católica del Norte (UCN)-Antofagasta, Universidad de Atacama (UDA) -Copiapó, Universidad de La Serena (ULS)-La Serena. El desarrollo de la versión número veintidós ha correspondido al Departamento de Matemáticas de la Universidad de La Serena.

104 expositores (chilenos y extranjeros- Brasil, España, Francia, Estados Unidos), además de numerosos académicos y estudiantes (pregrado y poostgrado) de todo el país se dieron cita en esta oportunidad en la ciudad de La Serena en este tradicional evento científico, uno de los más grandes e importantes en nuestro territorio (cerca de 180 participantes en total). 4 conferencias plenarias (dos de ellas, incluida la inaugural, transmitidas a todo el país y el extranjero vía streaming),

9 subplenarias, 10 sesiones temáticas (Probabilidades y Análisis Estocástico, Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Física Matemática, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Ecuaciones de Evolución y Análisis Funcional, Álgebra, Álgebras de Lie y Teoría de Control, Teoría de Grafos y Matrices, Sistemas Dinámicos y Matemática Educativa) además de tres cursillos dirigidos a estudiantes de pregrado y postgrado.

El Comité Organizador Local agradece el apoyo brindado por todas las Universidades de la Macro-Zona Norte, en especial por nuestra Corporación Universitaria a esta iniciativa a través de: Rectoría, Vicerrectoría Académica, Dirección de Investigación, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas y, el patrocinio de la Sociedad de Matemáticas de Chile y auspicio de Conicyt. También agradece a los directivos, académicos, funcionarios, especialmente a la secretaria de nuestro Departamento Srta. Fabiola Montenegro Sepúlveda y a los estudiantes de la Universidad en general y de la Unidad en particular que colaboraron para que esta actividad pudiese ejecutarse en el nivel que corresponde.

A todos, muchas gracias.

Comité Organizador Local XXII COMCA

INDICE

1. Comités

1.1. Comité Organizador. Marco Corgini (ULS); Mariano Poblete (UDA); Mercedes Fernández (UA); Bernardo San Martín (UCN); Martín Medina (UTA).

1.2. Comité Organizador Local. Marco Corgini Videla; Eduvina Villagrán Campos; Carlos Navarrete Rojas; Héctor Torres Apablaza; Eliana Bustamante Díaz; Rosanna Tabilo Segovia.

1.3. Comité Científico. D.P. Sankovich (Steklov Math. Inst., Russia); Rolando Rebolledo B. (PUC); Wolfgang Kliemann (ISU-Iowa State University, USA); Waldyr Rodríguez Jr. (UNICAMP-Brasil); Heleno Bolfarine (IME,USP-Brasil); María de los Ángeles Rodríguez (Universidad de Sevilla, España); Francisco Guillén (Universidad de Sevilla, España); Marko Rojas (Universidad de Bío Bío); Cristian González (ULS); Eduardo Notte (ULS); Humberto Prado (USACH); Enrique Reyes (USACH); Ricardo Soto (UCN); Oscar Rojo (UCN); Francisco Torres (UDA); Juan Olivares (UDA); Héctor Gómez (UA); Adrián Sotomayor (UA); Roberto Aravire (UAP); Heriberto Román (UTA); Sebastián Lorca (UTA).

2. Sesiones Invitadas

Probabilidades y Análisis Estocástico. María Soledad Torres, UV; **Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales**. Raimund Burger, U. de Concepción; **Estadística**. Héctor Gómez, UA, Carlos Navarrete, ULS; **Física Matemática**. Marco Corgini & Eduardo Notte, ULS; **Ecuaciones Diferenciales Parciales**. Justino Sánchez, ULS; **Ecuaciones de Evolución y Análisis Funcional**. Rodrigo Ponce; **Álgebra, Álgebras de Lie y Teoría de Control**. Julio Rodríguez, UCN; **Teoría de Grafos y Matrices**. Luis Medina, UA; **Sistemas Dinámicos**. Bernardo San Martín, UCN. **Matemática Educativa**. Margarita García, ULS.

3. Conferencias plenarias

Heleno Bolfarine (IME,USP-Brasil); Waldyr Rodrigues Jr. (UNICAMP, Brasil); Rolando Rebolledo (PUC); Miguel Orszag (PUC).

4. Conferencias subplenarias

Heriberto Román (UTA); Héctor Torres (ULS); Marko Rojas (U. de Bío Bío); María de los Ángeles Rodríguez (Universidad de Sevilla, España); Francisco Guillén (Universidad de Sevilla, España); Enrique Reyes (USACH); María Alejandra Álvarez (UA); María Robbiano (UCN); Roberto Aravire (UAP), D.P. Sankovich (Steklov Mathematical Institute, Russia).

5. Cursillos

Datos y Azar con Apoyo de Planilla Excel. R. Maluenda (UA); **Métodos de Grandes Desvíos y Hamiltonianos Aproximativos: Sistemas Cuánticos de Partículas**. M. Corgini (ULS); **La Construcción de los Números Reales**. R. Labarca (USACH).

6. Actas

En lo que sigue, presentamos a ustedes las Actas del XXII Congreso de Matemáticas Capricornio realizado en la Universidad de La Serena. Los resúmenes incluyen todas las actividades descritas previamente, salvo los cursillos.

VIGÉSIM0 SEGUNDO
CONGRESO DE MATEMÁTICAS
CAPRICORNIO-COMCA 2013

Julio 31- Agosto 02

Universidad de La Serena

RESÚMENES

Patrocinan y auspician:

Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica

Sociedad de Matemática

Vicerrectoría Académica-Dirección de Investigación
Facultad de Ciencias-Departamento de Matemáticas

Universidad de La Serena, Departamento de Matemáticas, Benavente 980 • Fono Fax (51) 2204102
• Casilla 554
La Serena • Chile

Organizan y auspician:

CONFERENCIAS PLENARIAS

- **R. Rebolledo** *Mathematical challenges of Quantum Decoherence*. PUC. Santiago, Chile.
- **W. Rodrigues** *The Maxwell and Navier-Stokes Equations that Follows from Einstein Equations*. IMECC -UNICAMP. Brasil.
- **H. Bolfarine** *Regression models for proportions*. IME-USP. São Paulo, Brasil.
- **M. Orzsag** *Propagation and distribution of quantum correlations*. PUC, Santiago, Chile.

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Mathematical challenges of Quantum Decoherence

Rolando Rebolledo *

Centro de Análisis Estocástico

Facultad de Ingeniería y Facultad de Matemáticas

Universidad Católica de Chile

Abstract

For a number of physicists, *decoherence* consists of the loss of the so called coherences due to the coupled dynamics of an open system and its environment (see for instance [19]). In a seminal paper [5] Blanchard and Olkiewicz analyzed the *environmental decoherence* due to dissipation. Their approach was based on a decomposition of the algebra supporting the observables of the quantum system. This work influenced the characterization of the *decoherence-free* subalgebra done in [12] and [13]. And has been extended to positive semigroups in [7]. So, the dynamics is represented here by a non-commutative semigroup given at the outset, and quantum environmental decoherence is associated with dissipative phenomena.

The subject, from the physical point of view, is certainly much more complex than this version of decoherence. Several authors pointed out that a most careful analysis of involved time scales should be considered (see [24]). That is; decoherence should be for some researchers a phenomenon which precedes the derivation of the so-called Markov approximation of the dynamics.

Since the introduction of the concept by Zurek, and besides its connection with the foundations of quantum physics, decoherence has been frequently observed and studied from the experimental viewpoint. The interested reader is invited to follow the reports of the Haroche's group at the ENS in Paris [6], and that of the Wineland's group in Boulder [18], or the most recent work of J. Maze ([15], [16]).

*e-mail: `rrebolle@uc.cl`

This is a reach terrain for interdisciplinary research, at the cross-road of the qualitative analysis of classical and quantum dynamical systems.

The conference will summarize a number of mathematical problems inspired on quantum decoherence. Firstly, decomposition of von Neumann algebras induced by a given dynamics; secondly, characterization of the so-called *decoherence-free* sub-algebra; third, the classical reduction of a quantum dynamics.

References

[1] L. Accardi, Y.G. Lu and I. Volovich, *Quantum Theory and its Stochastic Limit*, Springer-Verlag, 2002.

[2] J. Agredo: *Contribuciones al estudio de dinámica cuántica abierta y no equilibrio en la aproximación Markoviana*, Tesis Doctorado U. de Chile, 2013.

[3] M. Arenas and R. Rebolledo: Can one validly use classical statistical inference in Open Quantum Systems?, Open Systems and Inf. Dynamics, vol. 17, number 4, 311-330, 2010.

[4] A. Barchielli and M. Gregoratti: *Quantum Trajectories and Measurements in Continuous Time. The Diffusive Case*, Springer Berlin-Heidelberg, Lecture Notes in Physics 782, 2009.

[5] Ph. Blanchard and R. Olkiewicz: Decoherence induced transition from quantum to classical dynamics, *Rev. Math. Phys.*, **15**, 217-243, 2003.

[6] M. Brune et al.: *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887, 1996.

[7] R. Carbone, E. Sasso and V. Umanità: Decoherence for positive semigroups on $M_2(\mathbb{C})$. Journal of Math.Phys.,vol. 52,032202, 2011.

[8] G. Dell Antonio: On Decoherence, *J.Math.Phys.*, **44**, 4939-49-56, 2003

[9] F. Fagnola and R. Rebolledo. The approach to equilibrium of a class of quantum dynamical semigroups. *Inf. Dim. Anal. Q. Prob. and Rel. Topics*, 1(4):1–12, 1998.

[10] F. Fagnola and R. Rebolledo. On the existence of invariant states for quantum dynamical semigroups. *J.Math.Phys.*, **42**, 1296-1308, 2001.

[11] F. Fagnola and R. Rebolledo. Transience and recurrence of quantum Markov semigroups. *Probab. Theory and Relat.Fields*, **126**, 289-306, 2003.

[12] F. Fagnola, A. Dahrhi and R. Rebolledo: The Decoherence-free Subalgebra of a Quantum Markov Semigroup on $\mathcal{B}(h)$, QP-PQ, vol XXVII, World Scientific Singapore, 131-147, 2011.

[13] F. Fagnola, A. Dahrhi and R. Rebolledo: The Decoherence-free sub-algebra of a Quantum Markov Semigroup with unbounded generator, Inf. Dim. An. Quantum Probability and Related Topics, vol. 13, number 3, 413-433, 2010.

[14] D. Giulini et al.: *Decoherence and the Appearance of a Classical world in Quantum Theory*, Springer, Heidelberg, 1996.

[15] J.R. Maze, J.M. Taylor and M.D. Lukin: Electron spin decoherence of single Nitrogen-Vacancy defects in diamond, Phys.Rev. B, vol.78, 094303, 2008.

[16] J.R. Maze, P.L. Stanwix, J.S. Hodges, S. Hong, J.M. Taylor, P. Cappellaro, L. Jiang, M.V. Gurudev Dutt, E. Togan, A.S. Zibrov, A. Yacoby, R.L. Walsworth and M.D. Lukin: Nanoscale magnetic sensing with an individual electronic spin in diamond. Nature, 455(7213), 644 -647. doi:10.1038 /nature07279, 2008.

[17] Mundarain, D. and Orszag, M. (2006, November 8). Decoherence Free Subspace and entanglement by interaction with a common squeezed bath. doi:10.1103/Phys RevA.75.040303.

[18] C.J. Myatt et al.: *Nature*, **403**, 269, 2000.

[19] M. Orszag: *Quantum Optics*, Springer-Verlag, 2000.

[20] R. Rebolledo: Decoherence of quantum Markov semigroups. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3):349–373, 2005.

[21] R. Rebolledo: A view on decoherence via master equations. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 12(1):37–54, 2005.

[22] R. Rebolledo and D. Spehner: Adiabatic limits and quantum decoherence, , *Proceedings of Stochastic Analysis in Mathematical Physics*, World Sci., ISBN-13 978-981-279-154-2, (2007), 94–108.

[23] R. Rebolledo: Unraveling Open Quantum Systems: Classical Reductions and Classical Dilations of Quantum Markov Semigroups, *Confluentes Mathematici*, vol. 1, (2009), 123–167.

[24] W.T. Strunz: Decoherence in Quantum Physics, in *Coherent Evolution in Noisy Environments*, A.Buchleitner and K.Hornberger (eds.), Lect. Notes in Physics, Springer-Verlag, vol. 611, 199-233, 2002.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

The Maxwell and Navier-Stokes Equations that Follows from Einstein Equations

Waldyr A. Rodrigues Jr.
Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation
IMECC-UNICAMP
13083-859 Campinas SP, Brazil
walrod@ime.unicamp.br or walrod@mpc.com.br

Resumen

In this lecture I am concerned to reveal that any spacetime structure $(M, D, g, \tau_{\boldsymbol{g}}, \uparrow)$, which is a model of a gravitational field in General Relativity (generated by an energy momentum tensor $T \in \sec T_0^2 M$) and which contains at least one Killing vector field $A \in \sec TM$ is such that the 2-form field $F = dA$ (where $A = g(A,) \in \sec \bigwedge^1 TM \hookrightarrow \sec C\ell(M, g)$) satisfies a Maxwell like equation with a well determined current that contains a superconducting like term and that follows from Einstein equation. Moreover under an additional condition imposed on the Killing vector field the Maxwell like equation can be written as a Navier-Stokes equation as well. As a result I exhibit a set of Einstein, Maxwell and Navier-Stokes equation that follows sequentially from the first one under precise mathematical conditions, once some identifications about field variables are evinced, as will be explained in the lecture. It is also possible to show that the free Maxwell equation for is equivalent to a Dirac equation where the Dirac spinor field represented (in a given spin-frame) by $\psi \in \sec C\ell(M, g)$ and such that $F = \psi\gamma_{21}\tilde{\psi}$. I also briefly compare and emulate the results obtained with others on the same subject appearing in the literature.

Regression models for proportions

Heleno Bolfarine *
University of São Paulo
São Paulo
Brazil

Resumen

In this talk we consider alternative models to fit data on the unit interval based on tobit type model. Such models are alternatives to the beta regression models wich has received great attention in recent statiscal literature. Such models find application in several areas such as medicine, economy, education and many others. Parameter estimation is considered using maximum likelihood and Bayesian approaches. It is also considered the possibility of zero and (or) one excess whcih envolves modeling the distribution function of the models envolved. Real data applications are used for model comparison. The main conclusion is that the proposed models are viable alternatives to the modeling using beta regression.

*e-mail: `hbolfar08@gmail.com`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02, 2013, La Serena, Chile

Propagation and distribution of quantum correlations

Miguel Orszag*

Department of Physics

Pontificia Universidad Católica de Chile

Santiago, Chile

Abstract

We study the propagation and distribution of the quantum correlations through two chains of atoms inside cavities joined by optical fibers.We consider an effective Hamiltonian for the system and cavity losses, in the dressed atom picture.

Joint work with:
Raul Coto[1],Department of Physics
Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile.

References

[1] M.Nielsen and I.Chuang, *Quantum Information and Quantum Computation, Cambridge, 2000.*

*Partially supported by Fondecyt 1100039, morszag@fis.puc.cl

[1]Partially supported by the Pontificia Universidad Católica de Chile, e-mail:raul.coto@hotmail.com

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

CONFERENCIAS SUBPLENARIAS

- **E. Reyes** *Algunos aspectos de álgebra y análisis motivados por la teoría de cuerdas.* USACH. Santiago,Chile.
- **M. Rojas** *Condiciones Necesarias y Suficientes en Optimización Global.* U. de Bío-Bío, Chile.
- **M.A. Rodríguez-Bellido** *Sobre las propiedades de algunos modelos de Cristales Líquidos* .U. de Sevilla. Sevilla, España.
- **F. Guillén** *Convergence to equilibrium for smectic-A liquid crystals*.U. de Sevilla. Sevilla, España.
- **M. A. Álvarez** *Cohomología Adjunta y Deformaciones de Nilradicales 2-pasos nilpotentes.* UANTOF. Antofagasta, Chile.
- **M. Robbiano** *On a generalization of a Fiedler's lemma and its applications in spectral graph theory.* UCN. Antofagasta, Chile.
- **H. Román** *Algunas desigualdades integrales para funciones intervalares.* UTA. Arica, Chile.
- **H. Torres** *Numerical Analysis for Sedimentation Models.* ULS. La Serena, Chile.
- **R. Aravire** *Descomposición genérica y Especialización de Formas Cuadráticas.* UAP. Iquique, Chile.
- **D.P. Sankovich** *Local Gaussian Domination. Non Ideal Bose Gas* Steklov Mathematical Institute.Moscow, Russia.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Algunos aspectos de álgebra y análisis motivados por la teoría de cuerdas

Enrique G. Reyes*
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile
Comuna Estación Central, R.M., Chile

Resumen

En esta conferencia resumiremos algunos desarrollos en temas de álgebra y análisis que han sido motivados por la teoría de cuerdas. Vamos a presentar las ecuaciones de Maurer-Cartan en el contexto de A_∞-álgebras y luego consideraremos ecuaciones (pseudo)diferenciales que se obtienen al tomar casos especiales de estas ecuaciones. Las ecuaciones (pseudo)diferenciales de interés son “ecuaciones en un número infinito de derivadas” y se han comenzado a estudiar rigurosamente sólo en los últimos años. Mencionaremos resultados precisos sobre existencia y regularidad de soluciones y explicaremos cómo se entiende el problema de valores iniciales en este contexto. Finalmente veremos cómo estos problemas motivan la extensión a grupos topológicos de algunos teoremas clásicos de análisis funcional.

Esta exposición está parcialmente basada en trabajo conjunto con Przemyslaw Gorka, Lida Mendoza y Humberto Prado.

Referencias

[1] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, “Functional calculus via Laplace transform and equations with infinitely many derivatives". *Journal of Mathematical Physics* 51 (2010), 103512.

[2] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, “Nonlinear equations with infinitely many derivatives". *Complex Analysis and Operator Theory*, 5 (2011), 313-323.

[3] P. Górka, H. Prado and E. G. Reyes, Generalized Euclidean bosonic string equations. In ’Operator Theory: Advances and Applications’, Vol. 224 (Springer, Basel, 2012), R. Benguria; E. Friedman; M. Mantoiu (Eds.) pp. 147–169.

[4] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, “The initial value problem for ordinary differential equations with infinitely many derivatives". *Classical and Quantum Gravity*, 2012, Vol. 29, 065017 (15pp).

[5] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, “On a general class of nonlocal equations". *Annales Henri Poincare*, 2013. DOI 10.1007/s00023-012-0202-z.

*Parcialmente financiado por proyecto FONDECYT número 1111042., e-mail: `ereyes@fermat.usach.cl` ; `e_g_reyes@yahoo.ca`

[6] P. Gorka, T. Kostrzewa and E.G. Reyes, “The Rellich lemma on compact abelian groups and equations of infinite order". *Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, Vol. 10, No. 2 (2013) 1220030 (11 pages).

[7] P. Górka and E.G. Reyes, “String theory and Sobolev spaces on locally compact abelian groups". Preprint arXiv:1208.3053.

[8] L. Mendoza and E.G. Reyes, “On the homotopy content of Chekanov homology". Preprint, 2013.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Cohomología Adjunta y Deformaciones de Nilradicales 2-pasos nilpotentes

María Alejandra Alvarez*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Antofagasta
Antofagasta, Chile

Resumen

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita. Si $\mathfrak{p}$ es una subágebra parabólica de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{p}$ se descompone como un producto semidirecto de su nilradical $\mathfrak{n}$ y su factor de Levi $\mathfrak{g}_1$ que es reductivo. En 1961, Kostant [8] calculó la $\mathfrak{g}_1$-estructura de la cohomología de estos nilradicales con coeficientes en una representación de $\mathfrak{n}$ que es una restricción de una representación de $\mathfrak{g}$. La cohomología adjunta de estos nilradicales no está incluida en este resultado y por lo tanto es un problema abierto. Una aplicación de la cohomología adjunta y en particular del grupo $H^2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, es la de poder parametrizar las deformaciones infinitesimales de los nilradicales y a partir de esto obtener deformaciones y obstrucciones de los mismos.

En esta charla mostraremos algunos resultados de cohomología adjunta de nilradicales 2-pasos nilpotentes de subálgebras parabólicas de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, y las herramientas que han hecho posible su cálculo. Tambi.én daremos algunas nociones de deformaciones para álgebras de Lie y en particular para esta familia de nilradicales.

Referencias

[1] Alvarez M. A. and Tirao P., *The adjoint homology of a family of 2-step nilradicals.* Journal of Algebra. **352** (2012), 268–289.

*Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt No.11121314, e-mail: `maria.alvarez@uantof.cl`

[2] Cagliero L. and Tirao P., *The adjoint homology of the free 2-step nilpotent Lie algebra*, Quart. J. Math. **53**, N.2, (2002), 125-145.

[3] Fialowski A., *Deformations of Lie algebras*, Mat.Sbornyik USSR, **127** (169), (1985), 476-482; English translation: Math. USSR-Sb., **55**, (1986), N. 2, 467-473.

[4] Fialowski A., *An example of formal deformations of Lie algebras*, NATO Conference on Deformation Theory of Algebras and Applications, Il Ciocco, Italy, 1986, Proceedings. Kluwer, Dordrecht, (1988), 375-401.

[5] Fialowski A., Fuchs D.B., *Construction of Miniversal Deformations of Lie Algebras*, Journal of Functional Analysis, **161** N.1, (1999), 76-110.

[6] Grunewald F. and O'Halloran J., *Deformations of Lie algebras*, Journal of Algebra **162**, (1993) 210-224.

[7] Khakimdjanov Yu., *Varieties of Lie algebra laws*, Handbook of Algebra Vol. 2, (2000).

[8] Kostant B., *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. Math. (2) **74**, (1961), 329-387.

[9] Kostant B., *Root Systems for Levi factors and Borel-de Siebenthal Theory*, Symmetry and spaces, 129–152, Progr. Math. **278**. Birkhäuser Boston 2010.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Sobre las propiedades de algunos modelos de Cristales Líquidos

María Ángeles Rodríguez-Bellido*
Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla
Sevilla, Spain

Resumen

Los Cristales Líquidos pueden ser considerados como fases intermedias entre sólidos cristalinos y fluidos isotrópicos. Para capturar la óptica de este estado de la materia se han estudiado varios modelos. La dinámica macroscópica se describe normalmente a través de una ecuación de tipo Navier-Stokes, que rige la velocidad y la presión $(\mathbf{u}, p)$, donde hay un término fuente que depende de las propiedades microscópicas. Sin embargo, los efectos microscópicos dependen del grado de orden entre las partículas que componen la materia, lo que se traduce en dos grandes tipo de cristales líquidos: nemáticos y esmácticos.

Nos centramos en el estudio de los Cristales Líquidos Nemáticos ([1, 2, 3, 4]), constituidos por moléculas con forma de huso cuyo centro de masa está distribuido isotrópicamente. Su comportamiento microscópicos se puede modelar bien usando un vector director del centro de masa de las moléculas $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ (que es casi constante en media sobre pequeñas regiones) o bien un tensor $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (relativo al segundo momento de una medida de probabilidad). El modelo que considera esta última variable se llama Q-tensor ([5]).

Presentaremos resultados de existencia, unicidad y regularidad en presencia o ausencia de términos de tipo stretching y diferentes elecciones de la condición de contorno para la variable microscópica $\mathbf{d}$ or Q.

*Parcialmente financiado por el proyecto Project MTM2012-32325 del Gobierno Español, e-mail: `angeles@us.es`

Trabajo realizado en conjunto con:
Francisco Guillén-González[1], Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain.

Referencias

[1] B. Climent-Ezquerra, F. Guillén-González, and M.A. Rodríguez-Bellido, *Stability for nematic liquid crystals with stretching terms*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 20, 9 (2010), 2937–2942.

[2] P. G. De Gennes, J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, ClarendonPress, Oxford, 1995.

[3] F. H. Lin and C. Liu, *Nonparabolic Dissipative Systems Modeling the Flow of Liquid Crystals*, Comm. Pure Appl. Math., **48**, 501–537 (1995).

[4] H. Sun, C. Liu, *On energetic variational approaches in modeling the nematic liquid crystal flows*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 23 (2009) 455? 475.

[5] M. Paicu, A. Zarnescu, *Energy Dissipation and Regularity for a Coupled Navier-Stokes and Q-Tensor System*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **203** (1), 45–67, 2012.

[1]Parcialmente financiado por el proyecto Project MTM2012-32325 del Gobierno Español,
`guillen@us.es`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

On a generalization of a Fiedler's lemma and its applications in spectral graph theory

María Robbiano *
Department of Mathematics
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

Abstract

In this talk, we present a generalization of some results concerning the spectral properties of a certain class of block matrices. We show some of its implications on spectral graph theory.

Joint work with:
Domingos Cardoso, Enide Andrade Martins, Maria Aguieiras de Freitas, Andrea Soares Bonifacio, Bernardo San Matín
Author 2, Department of Mathematics, University of Aveiro, Aveiro, Portugal.
Author 3 Department of Mathematics, University of Aveiro, Aveiro, Portugal.
Author 4, Instituto de Matemática and COPPE/Producao, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Author 5 Departamento de Informática Aplicada, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Author 6 Departamento de Matemáticas. Universidad Católica del Norte. Antofagasta. Chile

References

[1] On matrices associated to directed graphs and applications. Maria Aguieiras A. de Freitas, Andrea Soares Bonifacio, María Robbiano, Bernardo San Martín. Accepted to be published in special edition LIA-SGT workshop (2013)

*e-mail: `mrobbiano@ucn.cl`

[2] D. M. Cardoso, M. A. A. de Freitas, E. A. Martins, M. Robbiano. Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation. Discrete Math. 313 (2013) 733-741.

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02, 2013, La Serena, Chile

Condiciones Necesarias y Suficientes en Optimización Global

Marko Rojas-Medar*

Grupo de Matemática aplicada, Dpto. Ciencias Básicas,
Universidad del Bío-Bío
Chillán, Chile

Abstract

Son bien conocidas las condiciones necesarias de optimalidad en programación matemática, en particular, las llamadas reglas de multiplicadores, explícitamente las de Lagrange y Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T), ver por ejemplo [13],[2], [17] (para el caso regular) y [11], [1] (para el caso no regular). Estas reglas son sólo necesarias, es decir, si x^* es una solución óptima entoces ella debe satisfacer ciertas ecuaciones (los llamados sistemas de Lagrange o K-K-T), las deficiencias naturales en estas condiciones de optimalidad son:

1. el carácter local y no global,
2. no son conclusivas.

Así, es necesario un análisis más profundo para decidir cuales de los puntos extremos es en efecto una solución óptima. Usualmente, para alcanzar los objetivos anteriores, se utilizan criterios de segundo orden o mayor [12],[2],[17], lo cual exige un grado mayor de diferenciabilidad de las funciones involucradas en el problema, o se impone convexidad (o variantes) sobre las funciones que definen el problema. Pero, es deseable tener criterios prácticos que nos permitan concluir si un punto satisfaciendo las condiciones necesarias, es en efecto un óptimo global. Vamos presentar tres caminos posibles para responder esta pregunta : problemas invexos de primer y segundo orden, representación integral y finalmente una caracterización topológica. La noción de invexidad es

*Partially supported by the Fondecyt-Chile grant No. 1120260, 121909 GI/C-UBB, Chile and Spanish Ministry of Education and Science (MEC) - Grant MTM2010-15383 , e-mail: marko@ubiobio.cl

relativamente reciente, fue introducida por Hanson [4] (primer orden) (caso regular) e Ivanov [10](segundo orden) (caso regular), los casos no regulares pueden ser encontrados en [6], [7], [8], [9]. Cuestiones relativas a problemas multiobjetivos pueden encontrarse en [16], [5], [18]. Dado el carácter local del cálculo diferencial, en contraposición del cálculo integral, el cual es útil sobre conjuntos compactos y no vacíos, y por lo tanto tiene un carácter más global, su utilización en la problemática de optimización global es natural, y como las integrales no exigen diferenciabilidad de las funciones, el espectro de uso es mayor [3]. La caracterización topológica que daremos no exige la continuidad usual de funciones, pero exige lo que llamaremos continuidad por niveles, así su uso en optimización global es mayor [15].

References

[1] E. R. Avakov, *Necessary Extremum Conditions for Smooth Anormal Problems with Equality-and Inequality-Type Constraints*, Math. Notes 45, 431?437 (1989).

[2] A. Ben-Tal, *Second order and related extremality conditions in nonlinear programming*, JOTA 31 (2), 143-165, 1980.

[3] J.E. Falk, *Conditions for global optimality in nonlinear programming*, Operations Research 21 (1973), 337-340.

[4] M.A. Hanson, *On Sufficiency if the Kuhn-Tucker Conditions*, J. Math. Anal. Appl. 80 , pp. 545-550, 1981.

[5] B. Hernández-Jiménez, *Convexidad generalizada en problemas de optimización no regulares*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2007.

[6] B. Hernández-Jiménez, M.A. Rojas-Medar, R. Osuna-Gómez, A. Beato-Moreno, *Generalized convexity in non-regular scalar programming problem with inequality-type constraints*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 352 (2009), 604-613.

[7] B. Hernández-Jiménez, R. Osuna-Gómez, R., M.A. Rojas-Medar, *Characterization of optimal solutions for nonlinear programming problems with conic constraints*. Optimization 60 (2011), no. 5, 619-626.

[8] B. Hernández-Jiménez, M.A. Rojas-Medar, R. Osuna-Gómez, , A. Rufián-Lizana, *Characterization of weakly efficient solutions for nonregular multiobjective programming problems with inequality-type constraint*, Journal of Convex Analysis Volume 18 (2011), Nro. 3, 749-768.

[9] B. Hernández-Jiménez, R. Osuna-Gómez, M.A. Rojas-Medar, L. Batista dos Santos, *Generalizad convexity for non-regular optimization problems with conic constraints*, In press Journal of Global Optimization.

[10] V. Ivanov, *Second-order Kuhn-Tucker invex constrained problems*, J. Glob. Optim., 50:519–529, 2011.

[11] A.F. Izmailov, *Optimality conditions for degenerate extremun problems with inequality-type constraints,* Comp. Maths Math. Phys., 34, Nï¿½ 6, (1994) 723-736.

[12] H. Kawasaki, *Second order necessary conditions of the Kuhn-Tucker type under new constraints qualifications*, JOTA 57 (2), 253-261 (1998).

[13] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, Classics in Applied Mathematics 10, SIAM.

[14] A.C. Moretti, M.A. Rojas-Medar, *Condiciones suficientes para optimalidad en programación no lineal.* Cubo Mat. Educ. 3 (2001), no. 2, 129–146.

[15] H. Román-Flores, M.A. Rojas-Medar, *Level-continuity of functions and applications.* Computers, Mathematics with Applications 38 (1999), no. 3-4, 143–149.

[16] L.B. Santos, B. Hernández-Jiménez, R. Osuna-Gómez, R., M.A. Rojas-Medar, *Necessary and sufficient second order conditions for multiobjective problems with C^1 data.* Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications, 85, 192-203, 2013.

[17] G. Still, M. Streng, *Optimality conditions in smooth nonlinear programming (Survey paper)*, JOTA 90 (3), 483-515, 1996.

[18] V. Vivanco-Orellana, *Problemas de Extremos Regulares y No Regulares, Vía Formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Aplicación a problemas de Control Óptimo*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2013.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Descomposición genérica y Especialización de Formas Cuadráticas

Roberto Aravire F.*
Facultad de Ingeniería
Universidad Arturo Prat
Iquique, Chile

Abstract

En esta charla se presentarán los conceptos de Descomposición Genérica de Formas Cuadráticas sobre un cuerpo F de cualquier característica, algunos resultados sobre la Teoría de Especialización con respecto a un lugar $\lambda : F \longrightarrow L \cup \infty$ y su aplicación para determinar relaciones entre el comportamiento de la descomposición genérica de una forma cuadrática φ sobre F y de su especialización $\lambda_*(\varphi)$ sobre L.

En particular se recordarán algunos resultados sobre esta materia sobre cuerpos de característica 2 y el estado de problemas que se están abordando.

References

[1] R. Aravire and R. Baeza, *A note on generic splitting of quadratic forms*, Comm . in Alg., Vol 27, 7, 1999.

[2] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2,* Trans. Amer. Math. Soc. 356, 2004

[3] M. Knebusch, *Generic Splitting of quadratic forms, I*, Proc. London Math. Soc. 33, no. 1, 1976.

[4] M. Knebusch, *Generic Splitting of quadratic forms, II*, Proc. London Math. Soc. 34, no. 1, 1977.

*Financiado parcialmente por Proyecto Fondecyt Nro. 1130796, e-mail: raravire@unap.cl

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Convergence to equilibrium for smectic-A liquid crystals

Francisco Guillén-González*
Department EDAN
University of Sevilla
Sevilla, Spain

Abstract

In this talk, we focus on a smectic-A liquid crystal model given in [2], obtaining three main results: the proof of an adequate Lojasiewicz-Simon inequality by using an abstract result given in [3], the existence of global in time weak solutions which is strong (and unique) for large times and the convergence to equilibrium of the whole trajectory as time goes to infinity. The existence of a unique global in time regular solution (bounded up to infinite time) had been previously proved in [1] under the constraint of large enough viscosity. Now, all results are obtained without imposing large viscosity.

Joint work with:
Blanca Climent-Ezquerra[1], Department EDAN, University of Sevilla, Sevilla, Spain.

References

[1] B. Climent-Ezquerra, F. Guillén-González, *Global in time solutions and time-periodicity for a Smectic-A liquid crystal model*, Communications on Pure and Applied Analysis, 9 (2010), 1473-1493.

*Partially supported by project MTM2012-32325 Spain, e-mail: `guillen@us.es`
[1]Partially supported by project MTM2012-32325 Spain, e-mail: `bcliment@us.es`

[2] W. E, *Nonlinear Continuum Theory of Smectic-A Liquid Crystals*, Arch. Rat. Mech. Anal., 137, 2 (1997), 159-175.

[3] S. Z. Huang, *Gradient Inequalities: with Applications to Asymptotic Behavior and Stability of Gradient-like Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 126 AMS, 2006.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Algunas desigualdades integrales para funciones intervalares

Heriberto Román Flores*
Instituto de Alta Investigación
Universidad Tarapacá
Arica, Chile

Resumen

En esta conferencia mostramos algunas desigualdades integrales para funciones intervalares tales como las desigualdades de Minkowski, Radon y Beckenbach, así como otras que involucran gH-diferenciabilidad de funciones intervalares, como por ejemplo las desigualdades de Ostrowski, Opial y Gronwall.

Referencias

[1] Y. Chalco-Cano, A. Flores-Franulič, H. Román-Flores, Ostrowski type inequalities for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative, Computational & Applied Mathematics 31 (2012) 457-472.

[2] Y. Chalco-Cano, A. Rufián-lizana, H. Román-Flores, M.D. Jiménez-Gamero, Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications, Fuzzy Sets and Systems 219 (2013) 49-67.

[3] H. Román-Flores, Y. Chalco-Cano, W. Lodwick, Some integral inequalities for interval-valued functions, preprint, 2013.

*Parcialmente financiado por Fondecyt 1120674, e-mail: `hroman@uta.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Numerical Analysis for Sedimentation Models

Héctor Torres*
Department of Mathematics
University of La Serena
La Serena, Chile

Abstract

Numerical schemes are proposed to approximate the solution of systems of partial differential equations that model the phenomenon of sedimentation of particles. These problems have attracted a great interest, mainly due to the fact that they are frequently encountered in practical engineering applications such as wastewater treatment, mineral processing.

Joint work with:
Raimund Bürger[1], CI2MA and Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile.
Ricardo Ruiz[2], CMCS-MATHICSE, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland.

*Partially supported by CONICYT through Fondecyt project No 11110264 and Anillo ACT1118, e-mail: `htorres@userena.cl`

[1]Partially supported by Conicyt (Chile) through Fondecyt project 1090456, BASAL project CMM, Universidad de Chile and Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI2MA), Universidad de Concepción, e-mail: `rburger@ing-mat.udec.cl`

[2]Partially supported by the European Research Council through the advanced grant Mathcard, Mathematical Modelling and Simulation of the Cardiovascular System, ERC-2008-AdG 227058, by the postdoctoral grant Becas Chile and the Swiss National Science Foundation through grant No. FNS PP00P2 123419/1 e-mail: `ricardo.ruiz@epfl.ch`

Kai Schneider[3], M2P2-CNRS and Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, , Marseille, France.

References

[1] R. Bürger, R. Ruiz-Baier, K. Schneider, and H. Torres, *A multiresolution method for the simulation of sedimentation in inclined channels*, Int. J. Numer. Anal. Model. **9**, 479–504 (2012).

[2] R. Bürger, R. Ruiz-Baier, and H. Torres, *A stabilized finite volume element formulation for sedimentation-consolidation processes*. SIAM J. Sci. Comput. **34**, 265–289 (2012).

[3] McCaffery S.J., Elliott L., and Ingham D.B., *Two-dimensional enhanced sedimentation in inclined fracture channels*, Math. Engrg., 7 (1998) 97-125.

[4] Eymard R., Herbin R., and Latche J.C., *Convergence analysis of a colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general 2 or 3D meshes*, SIAM J. Numer. Anal., 45 (2007) 1-36.

[3]Partially supported by PEPS program of INSMI-CNRS, e-mail: `kschneid@cmi.univ-mrs.fr`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Local Gaussian Domination: Non ideal Bose Gas

D.P. Sankovich

Steklov Mathematical Institute

Gubkin Str. 8, 119991, Moscow, Russia

Abstract

For a well-known Hamiltonian representing a many particle system of identical Bosons, enclosed en a box Λ of volume V in equilibrium at a given temperature T and chemical potential μ (non ideal Bose gas) it is given a proof of Local Gaussian Domination yielding to an upper bound on the so- called Bogolyubov Inner product (Duhamel Two Point Function) for operators of creation and annihilation of particles.

SESIONES

- **Probabilidades y Análisis Estocástico**. María Soledad Torres-Universidad de Valparaíso
- **Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales.** Raimund Bürger- Universidad de Concepción
- **Estadística**. Héctor Gómez-Universidad de Antofagasta, Carlos Navarrete-Universidad de La Serena
- **Física Matemática**. Marco Corgini, Eduardo Notte-Universidad de La Serena
- **Ecuaciones Diferenciales Parciales**. Justino Sánchez-Universidad de La Serena
- **Ecuaciones de Evolución y Análisis Funcional**. Julio Ponce- Universidad de Talca
- **Álgebra, Álgebras de Lie y Teoría de Control**. Julio Rodríguez-Universidad de Valparaíso, Cristian González-Universidad de La Serena
- **Teoría de Grafos y Matríces**. Luis Medina. Universidad de Antofagasta
- **Sistemas Dinámicos**. Bernardo San Martín. Universidad Católica del Norte
- **Matemática Educativa**. Margarita García. Universidad de La Serena

SESIÓN PROBABILIDADES Y ANÁLISIS ESTOCÁSTICO

Coordinación: Soledad Torres

CIMFAV

Universidad de Valparaíso

Valparaíso, Chile

1 **Hernán A. Mardones** *Stabilized schemes for two stochastic differential equations with multiplicative noise,* Departamento de Ingeniería Matemática y CI^{2}MA. Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

2 **Antoine Lejay** *Simulation of SDE with discontinuous drift,* Institut Elie Cartan (IECL, Nancy, France) and INRIA - France.

3 **Carlos M. Mora** *Stable numerical methods for bilinear stochastic differential equations,* Departamento de Ingeniería Matemática y CI^{2}MA. Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

4 **Ciprian Tudor** *The determinant of the Malliavin matrix and the determinant of the covariance matrix,* Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1. France.

5 **Frederi Viens** *Limit theorems for quadratic variations,* Department of Statistics, Purdue University - U.S.A.

6 **Jean-Francois Jabir** *Langevin models with boundary conditions* CIMFAV,University of Valparaíso. Valparaíso, Chile.

7 **Jorge Clarke De la Cerda**, *Hittings times for the stochastic wave equation with fractional colored nosie,*. Departament of Mathematics, Universidad del Bío-Bío

8 **Julián Andrés Agredo**, *Curvatura de Wasserstein para semigrupos Markovianos cuánticos,* Centro de Análisis Estocástico-Facultad de Ingeniería. Universidad Católica de Chile. Santiago, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Stabilized schemes for two stochastic differential equations with multiplicative noise

Hernán A. Mardones*
Departamento de Ingeniería Matemática and CI^{2}MA
Universidad de Concepción
Concepción, Chile

Abstract

This talk addresses the computation of $\mathbb{E}f(X_t)$, where $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is smooth and X_t satisfies the stochastic differential equation (SDE)

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \sigma^k (X_s)\, dW_s^k, \tag{1}$$

with $W^1, \ldots, W^m$ real valued independent Wiener processes, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ and $\sigma^k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. We are interested in the numerical solution of SDEs whose terms σ^k play an essential role in the dynamics of X_t. In order to solve stiff SDEs, Milstein, Platen and Schurz [3] introduced the balanced implicit method, whose implementation involves the choice of weight functions $c^0, c^1, \ldots, c^m$ to control the numerical instabilities of the Euler method and, in general, lead to numerical schemes with low rate of weak convergence [1, 4]. Only using appropriate parameters c^0 (i.e. $c^1 = \ldots = c^m = 0$) we introduce stable 1-order weak balanced schemes adapted to the characteristics of two concrete SDEs: the linear scalar SDE and a non-commutative system of bilinear SDEs. We present almost sure exponential stability and sign-preserving properties of the resulting drift-implicit schemes. Finally, some numerical experiments show the efficiency and advantages of the proposed schemes in comparison with other stochastically implicit balanced schemes and Euler-type schemes.

*Partially supported by CONICYT 21090691 and FONDECYT Grant 1110787, e-mail: hmardones@ing-mat.udec.cl

Joint work with:
Carlos M. Mora[1], Departamento de Ingeniería Matemática and CI^{2}MA, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.

References

[1] Alcock, J. and Burrage, K., *A note on the Balanced method*, BIT, 46, (2006), 689-710.

[2] Higham, D. J. and Mao, X. and Yuan, C., *Almost sure and moment exponential stability in the numerical simulation of stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 45, (2007), 592-609.

[3] Milstein, G. N. and Platen, E. and Schurz, H., *Balanced implicit methods for stiff stochastic systems*, SIAM J. Numer. Anal., 35, (1998), 1010-1019.

[4] Schurz, H., *Convergence and stability of balanced implicit methods for systems of SDEs*, Int. J. Numer. Anal. Model., 2, (2005), 197-220.

[1]Partially supported by FONDECYT Grant 1110787, e-mail: `cmora@ing-mat.udec.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Simulation of SDE with discontinuous drift

Antoine Lejay *
Institut Elie Cartan (IECL, Nancy, France) and INRIA - France.

Abstract

We discuss an approach to estimate upper bounds for the weak rate of convergence of the Euler scheme in presence of a discontinuous drift, when the coefficient is regularized. The idea was to use a kind of perturbation formula and to "separate" the approximations into several effects: approximation of the drift, regularity of the terminal conditions, ... While there have been a few works on the weak rate of convergence in presence of discontinuous drifts, we show by mixing several arguments (PDE, Malliavin calculus, stochastic analysis, ...) that various rates may be achieved in function of the context.

Joint work with: A. Kohatsu-Higa and K. Yasuda

*Partially supported by Proyecto Anillo Red de Análisis Estocástico y Aplicaciones (Sistemas abiertos, energía y dinámica de la información) ACT1112, e-mail: `Antoine.Lejay@univ-lorraine.fr`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Stable numerical methods for bilinear stochastic differential equations

Carlos M. Mora*
Departamento de Ingeniería Matemática y CI2MA
Universidad de Concepción
Concepción, Chile

Abstract

We will present new numerical schemes for bilinear systems of SDEs that preserve the possible exponential stability of the unknown solutions for any step-size. The good performance of the new methods is illustrated by numerical experiments.

Joint work with:
Hernán A. Mardones[1], Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción
Concepción, Chile.

References

[1] H. A. Mardones and C. M. Mora, *Stable numerical methods for two classes of SDEs with multiplicative noise: bilinear and scalar*, ArXiv:1303.6316, 2013.

*Partially supported by FONDECYT Grant 1110787 and BASAL Grants PFB-03 and FBO-16, e-mail: `cmora@ing-mat.udec.cl`

[1] Partially supported by beca Conicyt 21090691, e-mail: `hmardones@ing-mat.udec.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

The determinant of the Malliavin matrix and the determinant of the covariance matrix

Ciprian Tudor *
Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1 France.

Abstract

A well-known problem in Malliavin calculus concerns the relation between the determinant of the Malliavin matrix of a random vector and the determinant of its covariance matrix. We give an explicit relation between these two determinants for couples of random vectors of multiple integrals. In particular, if the multiple integrals are of the same order and this order is at most 4, we prove that two random variables in the same Wiener chaos either admit a joint density, either are proportional and that the result is not true for random variables in Wiener chaoses of different orders.

*Partially supported by Proyecto MEC N.80112022. e-mail: `tudor@math.univ-lille1.fr`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Limit Theorems for quadratic variations.

Frederi Viens

*

Department of Statistics, Purdue University - U.S.A.

Abstract

We present recent results with L. Neufcourt, S. Torres, and C. Tudor, on the asymptotic distribution for quadratic variations of various types of Gaussian processes with long-range dependence. These results can be used to devise estimators of the memory length, but we show that the convergence theorems are highly sensitive to whether or not the processes have stationary increments or are self-similar, and to other characteristics of the processes. Cuttingedge tools from the Malliavin calculus which facilitate the study will be presented.

*Partially supported by Proyecto MEC N.80120038. e-mail: `viens@stat.purdue.edu`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Langevin models with boundary conditions

Jean-Francois JABIR*
CIMFAV,
University of Valparaíso,
Valparaíso, CHILE.

Abstract

In this talk, we will present problems related to the modeling and the analysis of Langevin dynamics confined in a closed domain $\mathcal{D}$ of $\mathbb{R}^d$ and submitted to Maxwellian boundary conditions. Maxwellian boundary conditions have been designed to model the different interactions (reflection, absorption, diffusion) between gas particles and solid surfaces (see [1] and references therein) and were considered for kinetic Fokker-Planck equations (see e.g. [2], [5]). After a general presentation of these problems, we will focus on the particular case of a Langevin model submitted to the specular boundary condition and the so-called mean no-permeability condition which models interactions in presence of a (totally) elastic wall and which have been studied in collaboration with Pr. Mireille BOSSY (TOSCA Team, INRIA Sophia-Antipolis) in [3] and [4]. The corresponding Langevin dynamic is described by a second order stochastic differential equation representing at each time the position and the velocity of the considered particle and the motion of the velocity is governed by a Brownian motion and a "confinement" process modeling the effects of the wall. The wellposedness of such equation is strongly related to the estimation of the family of times when the primitive of the Brownian motion attains the frontier $\partial\mathcal{D}$ and to the existence of an "appropriate" density function of the law of the Langevin model along $\partial\mathcal{D}$. This latest issue is handled by mixing stochastic calculus and PDE techniques to evaluate the density regularity of the confined model.

*Partially supported by the CONICYT PAI/ACADEMIA No79090016, e-mail: jean-francois.jabir@uv.cl

References

[1] **The Boltzmann equation and its applications**, Cercignani, C., *Springer-Verlag*, 1988.

[2] **Global weak solutions for the Initial-Boundary-Value problems to the Vlasov-Fokker-Planck system**, *Math. Methods Appl. Sci.*, 21 (10), 907–938, 1998.

[3] **On confined McKean Langevin processes satisfying the mean no-permeability boundary condition**, Bossy, M. and Jabir, J.-F., *Stochastic Processes and their Applications*, 121 (12), pages 2751–2775, 2011.

[4] **Lagrangian stochastic model with specular boundary condition**, Bossy, M. and Jabir, J.-F. Submitted. 2013. arXiv link: http://arxiv.org/abs/1304.6050

[5] **Kinetic equations with Maxwell boundary condition**, Mischler, S., *Annales scientifiques de l'ENS 43*, fascicule 5, 719-760, 2010.

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Hitting times for the stochastic wave equation with fractional colored noise

Jorge Clarke De la Cerda
Department of Mathematics
Universidad del Bío-Bío
Concepción, Chile

Abstract

A basic problem in potential theory for $\mathbf{R}^d$-valued multi-parameter processes is the following: Given a set $E \in \mathbf{R}^d$ does the process visit or hit E with positive probability? We address this problem for the solution of the stochastic wave equation with fractional colored noise.

To do this, an exhaustive analysis of the moments of the increments of the solution is needed, that allows us to prove sharp regularity results for the solution to the stochastic wave equation with linear fractional-colored noise. We apply these results in order to establish upper and lower bound for the hitting probabilities of the solution in terms of the Hausdorff measure and of the Newtonian capacity.

Joint work with:

Ciprian Tudor Academy of Economical Studies, Bucharest, Romania;
Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1, France;

References

[1] Balan R.M. and Tudor C. A. (2010): *The stochastic wave equation with fractional noise: A random field approach.* Stoch. Proc. Appl. **120**, 2468-2494.

[2] Biermé H., Lacaux C. and Xiao Y. (2009): *Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic Gaussian random fields.* Bull. Lond. Math. Soc. **41**, 253-273.

[3] Dalang R. C. and Nualart E. (2004): *Potential theory for hyperbolic SPDEs.* Ann. Probab. **32**, 2099-2148.

[4] Dalang R. C., Khosnevisan D. and Nualart E. (2007): *Hitting probabilities for systems of non-linear heat equations with additive noise.* ALEA **3**, 231-271.

[5] Dalang R. and Sanz-Solé M. (2010): *Criteria for hitting probabilities with applications to systems of stochastic wave equations.* Bernoulli **16**(4), 1343-1368.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Curvatura de Wasserstein para semigrupos Markovianos cuánticos

Julián Andrés Agredo *
Centro de Análisis estocástico ANESTOC-Facultad de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile

Resumen

En este charla hablaremos sobre una clase de tasa exponencial para la convergencia de semigrupos Markovianos cuánticos a un estado invariante usando una distancia entre estados cuánticos definida en [4].

La tasa es denotada como Σ_d y la llamamos curvatura de Wasserstein cuántica puesto que es un análogo no conmutativo de la curvatura de Wasserstein clásica (también conocida como exponente de Chen) σ_d trabajada en procesos de Markov clásicos (ver [7],[8],[10] ,[12]). Aplicamos los resultados obtenidos para probar estimativas en SMCs de tipo Gaussiano Gauge invariante y específicamente en generadores ligados a procesos de nacimiento y muerte genéricos, es decir, estos resultados extienden algunos resultados dados en [5],[6] para semigrupos markovianos cuánticos. Usamos Σ_d y σ_d para mostrar otras consecuencias de importancia.

Referencias

[1] L. Accardi, F. Fagnola, S. Hachicha, *Generic q-Markov Semigroups and Speed of Convergence of q-Algorithms*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **9**, 567 (2006).

[2] L. Accardi, S. Hachicha, H. Ouerdiane, *Generic Quantum Markov Semigroups: the Fock Case*, Open Sys. Information Dyn. **12**, 385 (2005).

*Financiado por proyecto anillo Red de Análisis Estocástico y Aplicaciones (Sistemas abiertos, energía y dinámica de la información) ACT1112, e-mail: `jaagredoe@gmail.com`

[3] L. Accardi, S. Kozyrev, *Lectures on Quantum Interacting Particle Systems, in: Quantum interacting particle systems (Trento, 2000)*, L. Accardi and F. Fagnola, eds., QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal. **14**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, pp. 1-195.

[4] J. Agredo, *A Wasserstein-type Distance to Measure Deviation from Equilibrium of Quantum Markov Semigroups*, Open Sys. Information Dyn. **20:2**, 1 , (2013).

[5] R. Carbone, F. Fagnola, *Exponential L_2-convergence of quantum Markov semigroups on B(h)*, Math. Notes **68**, 452 (2000).

[6] R. Carbone, F. Fagnola, S. Hachicha, *Generic Quantum Markov Semigroups: the Gaussian Gauge Invariant Case*, Open Sys. Information Dyn. **14**, 425 (2007).

[7] M. Chen, *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*, NJ: World Scientific (2004), 2nd ed. River Edge.

[8] M. Chen, *Estimation of spectral gap for Markov chains*, Acta Math. Sin. **12** (4), 337 (1996).

[9] B. Cloez, *Wasserstein decay of one dimensional jump-diffusions*, arXiv:1202.1259v2

[10] A. Joulin, *Poisson-type deviation inequalities for curved continuous-time Markov chains*, Bernoulli **13** no. 3, 782, (2007).

[11] Y. Ollivier, *A survey of Ricci curvature for metric spaces and Markov chains, Probabilistic approach to geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **57**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 343 (2010).

[12] M. Sammer, *Aspects of mass transportation in discrete concentration inequalities*, Ph.D. Thesis, Georgia: Georgia Institute of Technology. (2005), available at http://smartech.gatech.edu/dspace/handle/1853/7006.

[13] M. von Renesse, K. Sturm, *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58** 7, 923 (2005).

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Coordinación: Raimund Bürger

CI^{2}MA and Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Concepción

1 **Verónica Anaya** *A mathematical model for indirectly transmitted diseases with nonlocal cross-diffusion.* U. del Bío-Bío. Concepción, Chile.

2 **Raimund Bürger** *Anti-diffusive and random-sampling Lagrangian-remap schemes for the multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic model.* Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

3 **Leonardo Figueroa** *Polynomial approximation and spectral methods on the unit disk.* Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

4 **Norbert Heuer** *A discontinuous Petrov-Galerkin boundary element method with optimal test functions* Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago, Chile.

5 **Michael Karkulik** *Adaptive nonconforming boundary element methods* Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago, Chile.

6 **David Mora** *A finite element method for the Stokes eigenvalue problem* U. del Bío-Bío y Universidad de Concepción. Chile.

7 **Roberto Cabrales** *A finite element method for the numerical approximation of the Ericksen-Leslie equations modeling nematic liquid crystals* U. del Bío-Bío. Chillán, Chile.

8 **Ricardo Oyarzúa** *Analysis of a mixed finite element method for the Stokes problem with varying density in pseudostress-velocity formulation* Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August2, 2013, La Serena, Chile

A mathematical model for indirectly transmitted diseases with nonlocal cross-diffusion

Verónica Anaya Domínguez*
Departamento de Matemática
Universidad del Bío-Bío
Concepción, Chile

Abstract

In this work, we are concerned with a mathematical model with cross-diffusion for the indirect transmission between two spatially distributed host populations having non-coincident spatial domains, transmission occurring through a contaminated environment. The mobility of each classes is assumed to be influenced by the gradient of others classes. We prove the existence of weak and classical solutions by using, respectively, a regularization method and an interpolation results between Banach spaces. We construct a Finite Volume Scheme to approximate the solution and we showed the convergence of this scheme. Finally we give some numerical results.

Joint work with:
Mostafa Bendahmane[1], UFR Sciences et Modelisation, Institut de Mathematiques de Bordeaux, Universite Bordeaux Segalen, Bordeaux, France.
Michel Langlais[2], UFR Sciences et Modelisation, Institut de Mathematiques de Bordeaux, Universite Bordeaux Segalen, Bordeaux, France.
Mauricio Sepúlveda[3], CI2MA, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.

References

[1] M. Bendahmane and M. Langlais, *A reaction-diffusion system with cross-diffusion modelling the spread of an epidemic disease.* Journal of Evolution Equations, 10(2010),883–904.

[2] R. Eymard, Th. Gallouët, and R. Herbin. *Finite volume methods.In: Handbook of Numerical Analysis*, vol. VII, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[3] O.A. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov and N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. AMS 23, Providence, 1968.

*Partially supported by CONICYT Proyecto de Inserción 79112012 and FONDECYT Postdoctorado 3120197.
E-mail: `vanaya@ubiobio.cl`
[1] E-mail: `mostafa.bendahmane@u-bordeaux2.fr`
[2] E-mail: `michel.langlais@u-bordeaux2.fr`
[3] e-mail: `mauricio@ing-mat.udec.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August 2, 2013, La Serena, Chile

Anti-diffusive and random-sampling Lagrangian-remap schemes for the multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic model

Raimund Bürger*
CI^{2}MA and Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

Abstract

The multi-class Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR) traffic model, which distinguishes N classes of drivers differing in preferential velocity, gives rise to a system of N strongly coupled, nonlinear first-order conservation laws for the car densities as a function of distance and time. The corresponding velocities involve a hindrance function that depends on the local total density of cars. Since the eigenvalues and eigenvectors of the flux Jacobian have no closed algebraic form, characteristic-wise numerical schemes for the MCLWR model become involved. Alternative simple schemes for this model directly utilize that the velocity functions are non-negative and strictly decreasing, which allows one to construct a new class of schemes by splitting the system of conservation laws into two different first-order quasilinear systems, which are solved successively for each time iteration, namely the "Lagrangian" and "remap" steps. The new schemes are addressed as "Lagrangian-remap" (LR) schemes. One version of LR schemes incorporates recent anti-diffusive techniques for transport equations. The corresponding subclass of LR schemes are named "Lagrangian-anti-diffusive-remap" (L-AR) schemes. Alternatively, the remap step can be handled by Glimm-like random sampling, which gives rise to a statistically conservative "Lagrangian-random sampling" (L-RS) scheme that is less diffusive than other remap techniques. The LR schemes for the MCLWR model are supported by a partial analysis of the L-AR schemes for $N = 1$, which are total variation diminishing (TVD) under a suitable CFL condition and therefore converge to a weak solution, and by numerical examples for both L-AR and L-RS subclasses of schemes.

This presentation is based on joint work with Christophe Chalons (Université Paris 7 & LJLL) and Luis Miguel Villada (U. de Concepción).

*Supported by CONICYT through Fondecyt project 1130154 and Anillo ACT1118 (ANANUM), and by REDOC.CTA, MINEDUC project UCO 1202. E-mail: `rburger@ing-mat.udec.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August 2, 2013, La Serena, Chile

Polynomial approximation and spectral methods on the unit disk

Leonardo Figueroa*
Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI^{2}MA)
Universidad de Concepción
Concepción, Chile

Abstract

We discuss theoretical and computational issues arising from the approximation of functions by polynomials on the unit disk. The main tool are Zernike-type families of bivariate orthogonal polynomials, which play on the disk a role similar to the one Jacobi polynomials play on the unit interval. An application to the numerical approximation of an elliptic PDE with singular coefficients is presented.

References

[1] C. F. Dunkl, Y. Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*, Cambridge University Press, Cambdrige, 2001.

[2] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.

[3] T. Matsushima and P. S. Marcus, *A spectral method for polar coordinates*, J. Comput. Phys. 120(2):365–374, 1995.

[4] F. Zernike and H. C. Brinkman, *Hypersphärische Funktionen und die in sphärische Bereichen orthogonalen Polynome*, Verh. Akad. Wet. Amst. (Proc. Sec. Sci.) 38(2):161–170, 1935.

*Partially supported by a postdoctoral fellowship from the Chilean *Ministerio de Educación* (MECESUP project UCO0713) and Fondecyt project 1130923. E-mail: `leonardo.figueroa@ci2ma.udec.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August 2, 2013, La Serena, Chile

A discontinuous Petrov-Galerkin boundary element method with optimal test functions

Norbert Heuer*
Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile

Abstract

We present an ultra-weak formulation of a hypersingular integral equation on closed polygons and prove its well-posedness and equivalence with the standard variational formulation. Based on this ultra-weak formulation we present a discontinuous Petrov-Galerkin method with optimal test functions and prove its quasi-optimal convergence in L^2. Theoretical results are confirmed by numerical experiments on an open curve with uniform and adaptively refined meshes.

Joint work with:
Felipe Pinochet[1], Facultad de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

*Supported by CONICYT through Fondecyt project 1110324 and Anillo ACT1118 (ANANUM). E-mail: nheuer@mat.puc.cl
[1]Supported by Fondecyt project 1110324. E-mail: fipinoch@gmail.com

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August 2, 2013, La Serena, Chile

Adaptive nonconforming boundary element methods

Michael Karkulik*
Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile

Abstract

Nonconforming approximations to functions can offer various advantages. Usually, nonconforming discretizations for the approximate solution of PDE drop certain continuity requirements, which makes them flexible as well as easier to implement than their conforming counterparts. For example, the approach by M. Crouzeix and P.-A. Raviart [1] uses discontinuous basis functions, and inter-element continuity is imposed weakly by enforcing edge or face jumps to have vanishing integral mean. This approach, and various others, have been developed and analyzed rigorously for finite element methods. The situation is less developed in BEM. In [3], the approach of Crouzeix and Raviart is employed for solving the Laplacian's hypersingular integral equation

$$Wu = f$$

on a screen Γ. It is shown that uniform mesh refinement yields a convergence rate $\mathcal{O}(h^{1/2})$ if $u \in H^1(\Gamma)$.

The aim of this talk is to present first extensions of this approach, regarding adaptivity. First, we present numerical examples which lead to the conjecture that, contrary as to usual expectations, imposing a higher regularity on u does not increase the convergence rate for uniform refinement. According to the Strang lemma, this is due to the consistency error, and we discuss briefly why it cannot be expected to converge with a higher rate. Hence, the optimal order for this method seems to be $\mathcal{O}(h^{1/2})$. However, if the solution has a reduced regularity, i.e. $u \in H^s(\Gamma)$ for $1/2 < s < 1$, the convergence rate for uniform refinement is reduced to $\mathcal{O}(h^{s-1/2})$. The second aim of our talk is to present an a posteriori error estimator, based on the $h - h/2$ methodology [2], which can be employed in an adaptive algorithm. Numerical examples indicate that adaptivity recovers the optimal rate.

Joint work with:

Norbert Heuer[1], Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

*Supported by CONICYT project Anillo ACT1118 (ANANUM). E-mail: `mkarkulik@mat.puc.cl`

[1]Supported by CONICYT through Fondecyt project 1110324 and Anillo ACT1118 (ANANUM). E-mail: `nheuer@mat.puc.cl`

References

[1] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationelle Sér. Rouge **7** (1973), 33–75.

[2] S. Ferraz-Leite, D. Praetorius, *Simple a posteriori error estimators for the h-version of the boundary element method*, Computing **83** (2008), 135–162.

[3] N. Heuer, F. J. Sayas, *Crouzeix-Raviart boundary elements*, Numer. Math. **112** (2009), 381–401.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August 2, 2013, La Serena, Chile

A finite element method for the Stokes eigenvalue problem

David Mora*
Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío
and CI^{2}MA, Universidad de Concepción
Concepción, Chile

Abstract

In this work we analyze a finite element approximation of the Stokes eigenvalue problem. We present a variational formulation of the problem relying only on the pseudostress tensor. We present an H(div)-conforming discretization of the problem by means of the lowest order Brezzi-Douglas-Marini mixed finite element. We show that the resulting scheme provides a correct approximation of the spectrum and prove quasi-optimal error estimates. Finally, we present some numerical experiments supporting our theoretical results.

Joint work with:
Salim Meddahi[1], Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo, Oviedo, España.
Rodolfo Rodríguez[2], CI^{2}MA and Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.

References

[1] I. Babuška and J. Osborn, *Eigenvalue Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 641–787.

[2] J. Descloux, N. Nassif, and J. Rappaz, *On spectral approximation. Part 1: The problem of convergence*, RAIRO Anal. Numér., 12(2) (1978) 97–112.

[3] J. Descloux, N. Nassif, and J. Rappaz, *On spectral approximation. Part 2: Error estimates for the Galerkin method*, RAIRO Anal. Numér., 12(2) (1978) 113–119.

[4] C. Lovadina, M. Lyly and R. Stenberg, *A posteriori estimates for the Stokes eigenvalue problem.* Numer. Methods Partial Differential Equations, vol. 25 (2009) 244–257.

*Partially supported by CONICYT through FONDECYT project 11100180, by DIUBB through project 120808 GI/EF, and Anillo ANANUM, ACT1118, CONICYT (Chile). E-mail: `dmora@ubiobio.cl`

[1] Partially supported by the Ministery of Education of Spain through the Project MTM2010-18427. E-mail: `salim@uniovi.es`

[2] Partially supported by BASAL project CMM, Universidad de Chile (Chile) and Anillo ANANUM, ACT1118, CONICYT (Chile). E-mail: `rodolfo@ing-mat.udec.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August 2, 2013, La Serena, Chile

A finite element method for the numerical approximation of the Ericksen-Leslie equations modeling nematic liquid crystals

R.C. Cabrales*
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad del Bío-Bío
Chillán, Chile

Abstract

Liquid crystals (see for instance [4], [1] and the references there in) are materials showing intermediate transitions between solid and liquid called *mesophases*. The mathematical theory describing liquid crystals attend the different degrees of positional and orientational ordering of their molecules. The first one alludes to the position of the molecules, while the second one alludes to the fact that the molecules tend to be locally aligned towards certain preferred direction. Such a direction is described by a unit vector along the molecule if it is rod-shaped or perpendicular to the molecule if it is plate-shaped, by measuring the mean values of alignments.

The simplest phase of liquid crystals is called *nematic* which possesses an orientational ordering but not positional. That is, the molecules flow freely as in a disordered isotropic liquid phase while tend to be orientated along a direction which can be manipulated with mechanical (boundary conditions), magnetic or electric forces.

The Ericksen-Leslie model give us a phenomenological description of the hydrodynamic of the nematic liquid crystals from the macroscopical point of view. In fact, if Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^M$, $M = 2, 3$ with boundary $\partial\Omega$, $T > 0$ is a fixed time, $Q = \Omega \times (0, T)$ and $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$, the equations are

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{d} - \gamma\Delta\boldsymbol{d} - \gamma|\nabla\boldsymbol{d}|^2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}, & \text{in } Q,\\ |\boldsymbol{d}| = 1, & \text{in } Q,\\ \partial_t\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p + \lambda\nabla\cdot((\nabla\boldsymbol{d})^T\nabla\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}, & \text{in } Q,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{in } Q, \end{cases} \tag{1}$$

where $\boldsymbol{u} : \bar{Q} \to \mathbb{R}^M$ is the velocity of the fluid, $p : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ is the pressure, and $\boldsymbol{d} : \bar{Q} \to \mathbb{R}^M$ is the orientation of the molecules. The parameter $\nu > 0$ is a constant depending on the viscosity of the fluid, $\lambda > 0$ is a elasticity constant, and $\gamma > 0$ is a constant of the relaxation time.

Because it is difficult to manipulate the condition $|\boldsymbol{d}| = 1$ from the numerical point of view, we consider a penalization method. In this case we obtain the following problem:

$$\begin{cases} \partial_t\boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{d} + \gamma(\boldsymbol{f}_\varepsilon(\boldsymbol{d}) - \Delta\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}, & \text{in } Q,\\ \partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p + \lambda\nabla\cdot((\nabla\boldsymbol{d})^T\nabla\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}, & \text{in } Q,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & \text{in } Q, \end{cases} \tag{2}$$

*Partially supported by project 121909 GI/C Grupo de Investigación consolidado, e-mail: roberto.cabrales@gmail.com

where $\boldsymbol{f}_\varepsilon(\boldsymbol{d}) = \varepsilon^{-2}\left(|\boldsymbol{d}|^2 - 1\right)\boldsymbol{d}$, and $\varepsilon > 0$ are, respectively, the function and the parameter of penalization associated to the restriction $|\boldsymbol{d}| = 1$. The system (2) is supplemented by adequate initial and boundary conditions.

The numerical algorithm to solve system (2) is designed at two levels. First, at the differential level: we decouple the velocity, the pressure and the director. In this case, the directs must be computed together with an auxiliary variable in order to deduce a priori energy estimates. Second, at the algebraic level: we can avoid computing such an extra variable because the auxiliary variable is approximated by a piecewise constant finite-element space and is coupled with the director by a linear system of equations. Therefore, the resulting numerical scheme can be written only in terms of the director variable. Additionally, the velocity-pressure is managed by a fractional step method of equal order for the velocity and the pressure (ver [3]).

Finally, some numerical simulations are performed in order to show the robustness and the efficiency of the proposed numerical scheme (ver [2]).

Joint work with:

F. Guillén-González [1], Departamento EDAN, Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
JV. Gutiérrez-Santacréu [2], Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, España.

References

[1] S. Badia, F. Guillén-Gonzalez, J. V. Gutiérrez-Santacreu. *An overview on numerical analyses of nematic liquid crystal flows.* Arch. Comput. Methods Eng. 18 (2011), no. 3, 285-313.

[2] R. Becker, X. Feng, A. Prohl *Finite element approximations of the Ericksen-Leslie model for nematic liquid crystal flow.* SIAM J. Numer. Anal. 46, 1704-1731, 2008.

[3] R. Codina *Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows.* J. Comput. Phys. 170, 112-140, 2001.

[4] J. Quintans, *Flow of a nematic liquid crystal*, Ph. Thesis. University of Strathclyde, Berlin, 2007.

[1] E-mail: `guillen@us.es`
[2] E-mail: `juanvi@us.es`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31–August2, 2013, La Serena, Chile

Analysis of a mixed finite element method for the Stokes problem with varying density in pseudostress-velocity formulation

Ricardo Oyarzúa *
GIMNAP, Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío,
Casilla 5-C, Concepción, Chile
and CI^{2}MA, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile.

Abstract

We propose and analyse a mixed finite element method for the nonstandard pseudostress-velocity formulation of the Stokes problem with varying density ρ. Since the resulting variational formulation does not have the standard dual-mixed structure, we reformulate the continuous problem as an equivalent fixed-point problem. Then, we apply the classical Babuška-Brezzi theory to prove that the associated mapping $\mathbb{T}$ is well defined, and assuming that $\|\frac{\nabla\rho}{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$ is sufficiently small, we show that $\mathbb{T}$ is a contraction mapping, which implies that the variational formulation is well-posed. Under the same hypothesis on ρ we prove stability of the continuous problem. Next, adapting to the discrete case the arguments of the continuous analysis, we are able to establish suitable hypotheses on the finite element subspaces ensuring that the associated Galerkin scheme becomes well-posed. A feasible choice of subspaces is given by Raviart-Thomas elements of order $k \geq 0$ for the pseudostress and polynomials of degree k for the velocity. Finally, several numerical results illustrating the good performance of the method with these discrete spaces, and confirming the theoretical rate of convergence, are provided.

Joint work with:
Sergio Caucao and **David Mora**[1], GIMNAP, Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío, Casilla 5-C, Concepción, Chile and CI^{2}MA, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile.

References

[1] C. Bernardi, F. Laval, B. Métivet, and B. Pernaud-Thomas, *Finite element approximation of viscous flows with varying density.* SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 29, 5, (1992) 1203-1243.

[2] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springer Series in Computational Mathematics, 15. Springer-Verlag, New York, 1991.

*E-mail: royarzua@ubiobio.cl
[1] E-mail: scaucao@ubiobio.cl, dmora@ubiobio.cl

[3] G.N. Gatica, A. Márquez and M A. Sánchez, *Pseudostress-based mixed finite element methods for the Stokes problem in R^n with Dirichlet boundary conditions. I: A priori error analysis.* Communications in Computational Physics, vol. 12, 1, pp. 109-134 (2012).

SESIÓN ESTADÍSTICA

Coordinación: Carlos Arturo Navarrete, Héctor Gómez
Departamento de Matemáticas – Universidad de La Serena
Departamento de Matemáticas – Universidad de Antofagasta

1. **Francisco Torres Avilés**, *Modelamiento espacio-temporal Bayesiano de tasas de robo en la Región Metropolitana de Chile.* Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile.
2. **Gabriel Álvarez Morgado**, *Límites de control basados en la distribución de Irwin-Hall.* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.
3. **Ignacio Vidal**, *Inferencia Bayesiana en la distribución Gumbel: Aplicación en el modelamiento de intensidades de lluvia.* Departamento de Matemáticas, Universidad de Talca, Chile.
4. **Jimmy Reyes R.**, *Modified Skew-Slash distribution.* Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Chile.
5. **José Alejandro González Campos**, *Regresión Cuantílica Fuzzy.* Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Campinas, Sao Paulo, Brasil y Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile.
6. **Juan F. Olivares-Pacheco**, *Minería de datos en redes sociales.* Departamento de Matemáticas, Universidad de Atacama, Copiapó, Chile.
7. **Ken Matsuda Oteíza**, *Estadística léxica en artículos de investigación en español: Hápax Legomena y Punto de Transición.* Departamento de Matemáticas, Universidad de La Serena, Chile.
8. **Nabor O. Castillo**, *Truncated positive Power Normal distribution.* Departamento de Matemáticas, Universidad de La Serena, Chile.
9. **Reinaldo Arellano-Valle**, *Kullback–Leibler Divergence Measure for Multivariate Skew-Normal Distributions.* Departamento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile.
10. **Yolanda M- Gómez Olmos**, *Power half-normal distribution.* Departamento de Estatística, IME, Universidad de Sao Paulo, Brasil.
11. **Yuri A. Irirarte**, *Slashed Generalized Rayleigh Distribution.* Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Chile.
12. **Jaime Arrué Álvarez**, *Reducción del sesgo en la estimación de máxima verosimilitud del modelo $SGN(\lambda, 1)$.* Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio - 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Modelamiento espacio-temporal bayesiano de tasas de robo en la Región Metropolitana de Chile

Francisco Torres Avilés
Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile

Resumen

El 2012, el "delito" es considerado como el tercer principal problema social en Chile. Si también se considera el tráfico y el consumo de drogas (31,7 %), la delincuencia se convertiría en el segundo problema nacional (ENUSC, 2012). Este problema motiva a buscar aquellas áreas o comunas donde los crímenes presentan frecuencias más altas, usando técnicas de modelamiento asociadas a las metodologías de Maoeo de Enfermedades. Para ello se utiliza la información del sistema nacional de seguimiento por delitos de mayor connotación social (DMCS). De ellos, sólo el robo será objeto de este estudio. Para cumplir con este objetivo, se propone modelar los datos a partir de distintos modelos de regresión para datos de conteo propuestos en la literatura. Posteriormente, se propone un análisis comparativo utilizando diferentes criterios bayesianos de selección de modelos.

Trabajo realizado en conjunto con:
Elorrieta F. y Arellano-Valle R. Departamento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Límites de control basados en la distribución de Irwin-Hall

Gabriel Alvarez Morgado
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

Resumen

Uno de los supuestos que se debe cumplir para utilizar el diagrama de Shewhart de $\overline{X}$ es que la variable a controlar provenga de una distribución normal, ya que la probabilidad de cometer un error tipo I aumenta demasiado en poblaciones extremadamente anormales y/o asimétricas, sobre todo si la muestra inicial con la que se calculan los límites de control es pequeña.

Este trabajo presenta un método no paramétrico para el control estadístico de la calidad, orientado a variables cuya distribución es anormal y/o asimétrica, entregando resultados de su desempeño para algunas poblaciones gamma y comparaciones de eficacia con 2 métodos paramétricos: el diagrama de Shewhart de $\overline{X}$ (utilizando la corrección de Hillier cuando es necesario) y el diagrama Skew-Correction, en diferentes casos y situaciones.

Este procedimiento no paramétrico se basa en el cálculo de un estadístico definido a partir del utilizado para el test de suma de rankings de Wilcoxon, el cual puede ser contrastado con límites de control calculados probabilísticamente a partir de la distribución de Irwin-Hall.

Este mecanismo, a diferencia del diagrama de Shewhart de $\overline{X}$, permite mantener estable la probabilidad de cometer un error tipo I sin importar la distribución de la variable que se desea controlar. Además, el riesgo de cometer un error tipo II va disminuyendo mientras la población es más asimétrica.

Al comparar este método con el diagrama de Skew-Correction, el procedimiento entrega iguales o mejores resultados que éste en todas las situaciones planteadas.

También se comprueba que al utilizar una muestra de control de tamaño reducido, la probabilidad de cometer un error tipo I aumenta, en promedio, a valores por debajo que los presentados por los diagramas de control paramétricos, además, la variabilidad de resultados entre diferentes muestras de control es muy inferior que la de estos diagramas.

Una vez presentados los resultados y las comparaciones, se concluye que es recomendable utilizar este procedimiento en poblaciones gamma con asimetría mayor que 1.

El estadístico utilizado se relaciona linealmente con el de Mann-Whitney y el cálculo de los límites de control a través de este método es más sencillo que el planteado por Chakraborti y van de Wiel el año 2008, presentando similares resultados cuando el tamaño de la muestra a controlar es pequeña.

Referencias

[1] Chakraborti, Subhabrata y van de Wiel, Mark A. , *A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney statistic*, IMS Collections, USA, 2008.

[2] Chan, Lai K. y Cui, Heng J. , *Skewness Correction $\overline{X}$ and R charts for skewed distributions*, Wiley Periodicals, Inc, 2003.

[3] Gibbons, Jean D. y Chakraborti, Subhabrata , *Nonparametric Statistical Inference*, Marcel Dekker Inc., USA, 1992.

[4] Hillier, Frederick S. , *$\overline{X}$ Chart control limits based on a small number of subgroups*, USA, 1962.

[5] Montgomery, Douglas C. , *Control estadístico de la calidad*, Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1991.

XXII Congreso de Matemáticas Capricornio COMCA 2013
Universidad de La Serena
31 de julio al 02 de agosto de 2013

INFERENCIA BAYESIANA EN LA DISTRIBUCIÓN GUMBEL: APLICACIÓN EN EL MODELAMIENTO DE INTENSIDADES DE LLUVIA

IGNACIO VIDAL

Resumen. Con el objetivo de modelar las intensidades máximas anuales de lluvia en diferentes zonas geográficas de Chile desarrollamos la inferencia Bayesiana en la distribución de valores extremos tipo 1 (distribución Gumbel). Consideramos una distribución a priori no informativa para el parámetro de localización (μ) y una gamma invertida para el parámetro de escala (σ). Para estas condiciones obtuvimos la distribución a posteriori de (μ, σ) y medidas de resumen a posteriori tales como modas, valores medios, cuantiles e intervalos de credibilidad. Con la finalidad de hacer pronósticos obtuvimos la distribución a posteriori de observaciones futuras, su moda, valor medio, cuantiles e intervalos de credibilidad. Para obtener varias de estas inferencias a posteriori fueron necesarias aproximaciones numéricas.

Universidad de Talca, email: ividal@utalca.cl.

El trabajo ha sido financiado por FONDEF-D08I1054, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Modified skew-slash distribution

Jimmy Reyes R.*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Antofagasta
Antofagasta, Chile

Resumen

In this work we introduce a new skewed Slash distribution. This modification of the skew-slash distribution is obtained by the quotient of two independent random variables. That quotient consists on a skew-normal distribution divided by a power of an exponential distribution with scale parameter equals to two. In this way, the new skew distribution has a heavier tail than that of the skew-slash distribution. We give the probability density function expressed by an integral, but we obtain some important properties useful for making inferences, such as moment estimators and maximum likelihood estimators. By way of illustration and by using real data, we provide maximum likelihood estimates for the parameters of the modified skew-slash and the skew-slash distributions. Finally, we introduce a multivariate version of this new distribution.

Trabajo realizado en conjunto con:
Hector W. Gómez G.[1], Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta, Chile.
Ignacio Vidal[2], Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Talca, Chile.

Referencias

[1] Akaike, H. (1974). *"A new look at the statistical model identification"*. IEEE Transactions on Automatic Control, **19**(6), 716-723.

[2] Arslan, O. (2008). *"An Alternative Multivariate Skew-Slash Distribution"*. Statistics and Probability Letters **78**(16), 2756-2761.

[3] Arslan, O. and Genc, A.I. (2009). *"A Generalization of the Multivariate Slash Distribution"*. Journal of Statistical Planning and Inference **139**(3), 1164-1170.

[4] Batschelet, E. (1981). *Circular Statistics in Biology*, London: Academic Press.

[5] Byrd, R.H., Lu, P., Nocedal, J. and Zhu, C. (1995). *"A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization"*. SIAM Journal on Scientific Computing **16**(5), 1190-1208.

[6] Genc, A.I. (2007). *"A Generalization of the Univariate Slash by a Scale-Mixture Exponential Power Distribution"*. Communications in Statistics - Simulation and Computation **36**(5), 937-947.

*Parcialmente financiado por XXX, e-mail: `jreyes@uantof.cl`
[1]Parcialmente financiado por XXX, e-mail: `hgomez@uantof.cl`
[2]Parcialmente financiado por XXX, e-mail: `ividal@inst-mat.utalca.cl`

[7] Gómez, H.W., Olivares-Pacheco, J.F. and Bolfarine, H. (2009). *"An Extension of the Generalized Birnbaum-Saunders Distribution"*. Statistics and Probability Letters **79**(3), 331-338.

[8] Gómez, H.W., Quintana, F.A. and Torres, F.J. (2007). *"A New Family of Slash-Distributions with Elliptical Contours"*. Statistics and Probabilility Letters **77**(7), 717-725.

[9] Gómez, H.W. and Venegas, O. (2008). *"Erratum to: A New Family of Slash-Distributions with Elliptical Contours [Statist. Probab. Lett. 77 (2007) 717-725]"*. Statistics and Probability Letters **78**(14), 2273-2274.

[10] Jander, R. (1957). *Die Optische Richtungsorientierung der Roten Waldameise (Formica Rufa L.)* Zeitschrift fur Vergleichende Physiologie, 40, 162-238.

[11] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *"Continuous Univariate Distributions"*, 2nd Edition. Wiley, New York.

[12] Jones, M.C., Pewsey, A. (2004). *A family of symmetric distributions on the circle.* Technical Report, The Open University, Department of Statistics.

[13] Kafadar, K. (1982). *"A Biweight Approach to the One-Sample Problem"*. Journal of the American Statistical Association **77**(378), 416-424.

[14] Mosteller, F. and Tukey, J.W. (1977). *"Data Analysis and Regression"*. Addison-Wesley.

[15] Reyes, J., Gómez, H. W. and Bolfarine, H. (2012). *"Modified slash distribution"*. Statistics. To appear. DOI:10.1080/02331888.2012.694441

[16] Rogers, W.H. and Tukey, J.W. (1972). *"Understanding Some Long-Tailed Symmetrical Distributions"*. Statistica Neerlandica **26**(3), 211-226.

[17] SenGupta, A., and Pal, C. (2001). *On Optimal Tests for Isotropy Against the Symmetric Wrapped Stable-Circular Uniform Mixture Family.* Journal of Applied Statistics, 28, 129-143.

[18] Wang, J., Genton, M.G. (2006). *"The multivariate skew-slash distribution"*. Journal Statistical Planning and Inference **136**, 209-220.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Regresión Cuantílica Fuzzy

José Alejandro González Campos*
Departamento de Estatística
Universidade Estadual de Campinas Sao Paulo, Brasil
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de Playa Ancha
Playa Ancha, Valparaíso, Chile

Resumen

De modo general podemos decir que, en un problema concreto, muchos numeros son idealizaciones de informaciones inprecisas, envolviendo valores numéricos. Estos son los casos de frases como **en torno de** o **aproximadamente** . Por ejemplo, cuando se mide la estatura de un individuo, lo que se obtiene es un valor numérico cargado de imprecisiones. Tales impresiciones pueden haber sido causadas por los intrumentos de medición, por los individuos que estan tomando las mediciones, por los individuos que estan siendo medidos etc. Finalmente se opta por un "valor preciso"(un número real) h para indicar la estatura. Sin embargo, seria más prudente decir que la estatura es entorno de h o que la estatura es aproximadamente h [3]. El presente trabajo define la regresión cuantílica basada en una definición de orden total en la estructura de los números fuzzy, dicho orden es basado en una función denominada de realización, la cual tiene la particularidad de caracterizar los números reales como una situación particular de números fuzzy, cuyo proceso caracteriza una constante denominada de Origo. Además se proponen un conjunto de familias de funciones de membership que enrriquecen las posibilidades de modelación [2] y [11]. Los soportes teóricos principales del trabajo son los desarrollados por [14] y [13].

Trabajo realizado en conjunto con:
Victor Hugo Lachos Dávila[1], Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Campinas, Sao Paulo, Brasil.
Eduardo Montenegro Valenzuela[2], Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile.
Hector Araya Carvajal[3], Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile.

*Parcialmente financiado por CAPES-Universidade Estadual de Campinas, e-mail: `alejgonza@gmail.com`
[1]The research of V.H.Lachos was supported by Grant 308109/2008-2 from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq-Brazil)
[2]Parcialmente financiado por Universidad de Playa ancha,
[3]Parcialmente financiado por Universidad de Playa Ancha,

Referencias

[1] Acampora, G. Fenza, G. Muñoz, E. Romera, B. (2010). Mejoras en el uso de aprendizaje con árboles fuzzy: un ejemplo de su aplicación en la toma de decisiones de un sistema coordinado. ESTYLF, Huelva. pp 643-648.

[2] Arabpour, A. and Tata, M. (2008). Estimating the parameters of a fuzzy linear regression model, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 5(2), 1-19.

[3] Barros, L. Bassanezi, R. (2010). Tópicos de logica fuzzy e biomatemática. Segunda edición. UNICAMP-IMECC.

[4] Choi, S and Kim, K. (2006). Censored fuzzy regression model. J. Korean Math. Soc. 43, No. 3, pp. 623-634.

[5] Devlin, K. (1993). The Joy of Sets. 2nd ed. Springer Verlag.

[6] Dubois, D., Prade H. (1978). Operations on fuzzy numbers, *Int. J. Syst. Sci.*, **9**, 613–626.

[7] Dubois, D. and Prade, H. (1980).Fuzzy Real Algebra: some results, Fuzzy sets and systems, 2, pp. 327-348.

[8] Dubois, D. (2006). Possibility theory and statistical reasoning, *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 47–69.

[9] Hailperin, T. (1986). Boole's Logic and Probability. North Holland.

[10] Hwang, C. M. and Yang, M. S. (2011). On fuzzy renewal processes for fuzzy random variables and extended theorems, International Journal of Intelligent Systems. 26(2), 115–128.

[11] Parchami, A. Taheri, S. and Mashinchi, M. (2008). Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data. Stat Papers, 51, pp. 209–226.

[12] Peters, G. (1994). Fuzzy linear regression with fuzzy intervals, *Fuzzy Sets and Systems*, **63**, 45–55.

[13] Tanaka, H. Uejima, S. Asia, K. (1982). Linear regression analysis with Fuzzy model, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **12**, 903–907.

[14] Zadeh, L. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, vol 1, pp 3-28.

[15] Wang, H.F., Tsaur, R.C. (2000). Insight of a fuzzy regression model, *Fuzzy Sets and Systems*, **112**, 355–369.

[16] Wünsche, A., Näther, W. (2002). Least-squares fuzzy regression with fuzzy random variables, *Fuzzy Sets and Systems*, **130**, 43–50.

[17] Nasseri, S. Teleshain, Z. and Vahidi, J. (2012). A new method for ordering LR Fuzzy Number. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, vol 4, N3. pp 283-294.

[18] Rosch, E. (2013). Neither concepth nor Lotfi Zadeh are Fuzzy set. *On Fuzzyness*, vol 299, pp 591-596.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Minería de datos en redes sociales

Juan F. Olivares-Pacheco*
Departamento de Matemática
Universidad de Atacama
Copiapó, Chile

Resumen

En los últimos años, el análisis de las redes sociales ha experimentado un gran interés en los investigadores, debido a diferentes factores, tal como la popularidad de las redes sociales online (RSO), su representación, la disponibilidad de grandes volúmenes de datos, y el interés comercial/marketing asociadas a éstas. Entonces, frente a la gran cantidad de datos disponibles, se hace necesario la implementación de nuevos algoritmos para la extración de información y la identificación de patrones de comportamiento de los diferentes actores de las RSO. Por tanto, en este trabajo se resumen los conceptos básicos de la minería de datos y las redes sociales online, se muestran los problemas asociados a la minería en las RSO, y se ilustra la aplicación de la minería de datos en las RSO a través de dos ejemplos.
Palabras claves: Redes sociales online, minería de datos, análisis estadístico.

Referencias

[1] C. C. Aggarwal, *Social network data analytics*, Springer, 2011.

[2] D. F. Nettleton, *Data mining of social network represented as graphs*, Computer Science Review 7, 1-34, 1973.

*E-mail: jfolivar@gmail.com

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio - 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Estadística léxica en artículos de investigación en español: Hápax Legomena y Punto de Transición

Ken Matsuda Oteíza

Departamento de Matemáticas

Universidad de La Serena, Chile

Resumen

A partir de una revisión de los índices clásicos en estadística léxica (Leyes de Estoup-Zipf-Mandelbrot), en este trabajo se analiza el punto de transición (PT) que es una consecuencia de las observaciones de George Kinsley Zipf, quién formuló la ley de frecuencias de palabras de un texto (Ley de Zipf), la cual establece que el producto del rango por la frecuencia de una palabra es constante [Zipf1949]. Esta regularidad estadística proviene de la tensión entre dos fuerzas inherentes a los lenguajes naturales: unificación y diversificación. La primera conduce a emplear términos de índole general, mientras que la segunda al uso de términos específicos. Los términos ligados a la primera fuerza establecen nexos con el entorno del texto, y los de la segunda detallan su contenido. Esto sugiere que las palabras que caracterizan un texto no sean ni las más frecuentes ni las menos frecuentes, sino las que se encuentran en una frecuencia media de ocurrencia dentro del texto A partir de la ley de ocurrencia de palabras con baja frecuencia propuesta por Booth [Booth1967], fue posible derivar una fórmula para localizar la frecuencia que divide en dos al vocabulario de un texto: las palabras de baja, y alta frecuencia; justamente, el llamado punto de transición. Se compara el Punto de Transición con el índice Hirsch – Popescu (2012). Se presenta un caso de la aplicación de estos índices a un corpus representativo y multidisciplinar de artículos de investigación en español, que se contrasta con otros siete corpus a modo de control. Si bien desde un punto de vista general los índices tienen un comportamiento estable en los distintos registros, de forma específica, los índices permiten distinguir registros de alta y de baja especialización y dan cuenta de la variación disciplinar de los corpus analizados. La aplicación de estos índices se puede realizar en diferentes campos, como por ejemplo en la recuperación de información, en el ámbito de la construcción de tesaurus, en algoritmos de resumen automático de textos.

Truncated positive the power normal distribution

Nabor O. Castillo*
Department of Mathematics
University of La Serena
La Serena, Chile.

Abstract

Attention is focussed on a truncated positive version of the power-normal distribution (PN), studied by Pewsey, Gómez and Bolfarine (2012). When the truncation point is set equal to zero, the resulting model can be viewed as a flexible extension of the half-normal model. Properties of the truncated distribution are investigated and corresponding likelihood inference is considered. The methodology is applied to data set involving non-negative observations and it is verified that the fit of the truncated model compares favorably with that of the generalized half-normal.

Joint work with:
Héctor W. Gómez[1], Department of Mathematics, University of Antofagasta, Antofagasta, Chile.
Heleno Bolfarine[2], Departamento de Estatística, IME,Universidad de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil

References

[1] Cooray, K. and Ananda, M.M.A. (2008). A Generalization of the Half-Normal Distribution with Applications to Lifetime Data. *Communications in Statistics - Theory Methods*, **37**, 1323-1337.

[2] Pewsey, A., Gómez, H.W. and Bolfarine, H. (2012). Likelihood-based inference for power distributions. *Test*, **21(4)**, 775-789.

*Partially supported by DIULS REGULAR PR12151. , e-mail: `nabcas@userena.cl`
[1] Partially supported by FONDECYT 1130495 (Chile) , e-mail: `hgomez@uantof.cl`
[2] Partially supported by CNPq (Brasil) , e-mail: `hbolfar@ime.usp.br`

XXI COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Kullback-Leibler Divergence Measure for Multivariate Skew-Normal Distributions

Reinaldo Arellano-Valle
Departmento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Abstract

The aim of this work is to provide the tools to compute the well-known Kullback?Leibler divergence measure for the flexible family of multivariate skew-normal distributions. In particular, we use the Jeffreys divergence measure to compare the multivariate normal distribution with the skew-multivariate normal distribution, showing that this is equivalent to comparing univariate versions of these distributions. Finally, we applied our results on a seismological catalogue data set related to the 2010 Maule earthquake. Specifically, we compare the distributions of the local magnitudes of the regions formed by the aftershocks.

Joint work with:
Javier E. Contreras-Reyes, Departmento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Power half-normal distribution

Yolanda M. Gómez Olmos*
Departamento de Estatística, IME, Universidad de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

Abstract

In this work we consider an extension of the half-normal distribution based on the distribution of the maximum of a random sample. It is shown that this distribution belongs to the family of distributions introduced by Pescim et al. (2010). Properties of its density are investigated, maximum likelihood estimation is implemented and the Fisher information matrix is derived. A real data illustration is presented, and comparisons with alternative extensions of the half-normal distribution reveal good performance of the proposed methodology.

Key Words: Distribution of the maximum of a sample, Half-normal distribution, Maximum likelihood.
Joint work with:
Heleno Bolfarine[1], Departamento de Estatística, IME,Universidad de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

References

[1] Cooray, K. and Ananda, M.M.A. (2008). A Generalization of the Half-Normal Distribution with Applications to Lifetime Data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, 1323-1337.

[2] Pescim, R.R., Demétrio, C.G.B., Cordeiro, G.M., Ortega, E.M.M and Urbano, M.R. (2010). The beta generalized half-normal distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 945-957.

*e-mail: ymgomez@ime.usp.br
[1]e-mail: hbolfar@ime.usp.br.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Slashed Generalized Rayleigh Distribution

Yuri A. Iriarte
Department of Mathematics
University of Antofagasta
Antofagasta, Chile

Abstract

In this work, we introduce a new family of distributions suitable for fitting positive data sets with high kurtosis. The new distribution, called slashed generalized Rayleigh distribution, arises as the quotient of two independent random variables, one being a generalized Rayleigh distribution in the numerator and a power of the uniform distribution in the denominator. This new family of distributions is an alternative approach to models where Rayleigh distributions have been used. We present probabilistic properties of the proposed distribution. In addition, we carry out estimation of the model parameters by moment and maximum likelihood methods. Finally, we conduct a small simulation study to evaluate the performance of maximum likelihood estimators and apply the results to real data.

Joint work with:
F. Vilca Labra, Department of Mathematics, University of Campinas, São Paulo, Brazil.
Héctor Varela, Department of Mathematics, University of Antofagasta, Antofagasta, Chile.
Héctor Gómez, Department of Mathematics, University of Antofagasta, Antofagasta, Chile.

1 Introduction

Vodã (1976a) proposed the generalized Rayleigh distribution. A random variable X follows a generalized Rayleigh distribution, denoted as $X \sim GR(\theta, \alpha)$, if X has density function given by

$$f_X(\theta, \alpha) = \frac{2\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} e^{-\theta x^2} \tag{1}$$

where $x > 0$, $\theta > 0$, $\alpha > -1$ y $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du$ is the gamma function.

Gómez et al. (2007) and Gómez and Venegas (2008) introduced the slash-elliptical distributions. A random variable T follows a slash-elliptical distributions, denoted as $T \sim SEl(\mu, \sigma, g)$, if T can be expressed as

$$T = \frac{X}{U^{1/q}} \tag{2}$$

where $q > 0$ and $X \sim El(0, 1, g)$ and $U \sim U(0, 1)$ are independent.

Gómez et al. (2009) use the slash-elliptical family to extend the Birnbaum-Saunders distribution. Olivares et al. (2010) extend the Weibull distribution. Olmos et al. (2012) extended the HN distribution. Iriarte et al. (2012) extend the Rayleigh distribution.
In this work, we discuss an extension of the generalized Rayleigh (GR) distribution proposed by Vodă (1976). This extension arises as the quotient of two independent random variables, one being the generalized Rayleigh distribution and the other is the power of the uniform distribution in the denominator. This construction follows the same idea of Gómez et al. (2007), proposed for the context of symmetric distributions; see also, Olmos et al. (2012) and Reyes et al. (2012).

2 Numerical Results

We consider a data set to the life of fatigue fracture of Kevlar 49/epoxy which is subject to constant pressure at the 90% stress level until all failed, so we have complete data with the exact times of failure. For previous studies with this data set; see, Andrews and Herzberg (1985), Barlow et al. (1984) and Olmos et al.(2012). The moment estimates for the parameters of the SGR model are $\widehat{\theta}_M = 0.2684594613$, $\widehat{\alpha}_M = 0.6893474929$ and $\widehat{q}_M = 4.041340572$. These estimates are useful starting values required to implement the estimation of the maximum likelihood method through the numerical method.
Table 1 shows some descriptive statistics from the stress-rupture dataset, where $\sqrt{b_1}$ and b_2 are sample skewness and kurtosis coefficients, respectively. Table 2 shows the ML estimates for the parameters of the generalized Rayleigh (GR), slash-weibull (SW), slashed half normal (SHN) and slashed generalized Rayleigh distributions (SGR). For each model we report the log-likelihood estimate value and the corresponding Akaike information criterion (AIC). It can be noted that AIC shows better fit of the SGR model.

Table 1: Descriptive statistics for the stress-rupture data set.

n	$\overline{X}$	s^2	b_1	b_2
101	1.025	1.253	3.047	18.475

Table 2: ML estimates for fitting various models: GR, SW, SHN and SGR models on the stress-rupture data set.

Parmeters	GR (DS)	SW (DS)	SHN (DS)	SGR (DS)
$\widehat{\theta}$	0.140 (0.029)	0.800 (0.301)	-	0.506 (0.184)
$\widehat{\alpha}$	-0.749 (0.036)	0.994 (0.104)	0.802 (0.111)	-0.616 (0.048)
$\widehat{q}$	-	5.948 (11.406)	2.567 (0.691)	2.840 (0.900)
LLF	-106.183	-102.9559	-103.130	-100.752
AIC	216.366	211.9118	210.260	207.504

References

[1] H. W. Gómez, F. A. Quintana, F. J. Torres, *A new family of slash-distributions with elliptical contours. Stat Probab Lett 77(7):717-725*, 2007.

[2] V. G. Vodă, *Inferential procedures on a generalized Rayleigh variate I. Appl Math 21:395-412*, 1976a.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Reducción del sesgo en la estimación de máxima verosimilitud del modelo SGN $(\lambda, 1)$

Jaime Arrué Alvarez*
Departamento de Matemáticas
Universidad Antofagasta
Antofagasta, Chile

Resumen

El modelo Skew generalizado normal con parametros λ_1 y λ_2, denotada $SGN(\lambda_1, \lambda_2)$, pertenece a una clase de distribuciones denominada skew simétricas que contiene a la familia Gaussiana y a la distribución skew normal. En particular, se estudia el modelo $SGN(\lambda_1, 1)$, el cual presenta problemas de estimación del parámetro. En especial, para los tamaño de muestra moderado el EMV es infinito con probabilidad positiva. Como solución, se utiliza una función score modificada para estimar el parámetro y cuyo EMV modificado es siempre finito. Para los IC se considera el enfoque de cuasi-verosimilitud.

Trabajo realizado en conjunto con:
Reinaldo Arellano Valle[1], Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad de Chile, Santiago, Chile.
Héctor Gómez Geraldo[2], Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta, Chile.

Referencias

[1] Arellano-Valle, R.B., Castro, L.M., Genton, M.G, Gómez, H.G., 2008, *Bayesian inference for shape mixtures of skewed distributions with application to regression analysis*, International Society for Bayesian Analysis 3, 513-540.

[2] Azzalini, A., 1985, *A class of distributions which includes the normal ones*, Scandinavian Journal of Statistics 12, 171–178.

[3] Firth, D., 1993, *Bias reduction of maximum likelihood estimates*, Biometrika 80, 27–38. (Amendment : vol. 82, 667).

*Parcialmente financiado por XXX, e-mail: `jarrue@uantof.cl`
[1]Parcialmente financiado por XXX, e-mail: `reivalle@mat.puc.cl`
[2]Parcialmente financiado por XXX, e-mail: `hgomez@uantof.cl`

[4] Lagos Alvarez, B., Jiménez Gamero, M.D., 2012, *A note on bias reduction of maximum likelihood estimates for the scalar skew t distribution*, Journal of Statistical Planning and Inference 142(2), 608–612.

[5] Sartori, N., 2006, *Bias prevention of maximum likelihood estimates for scalar skew normal and skew t distributions*, Journal of Statistical Planning and Inference 136, 4259–4275.

SESIÓN FÍSICA-MATEMÁTICA

Coordinación: M. Corgini, E. Notte

Departamento de Matemáticas

Universidad de La Serena

La Serena, Chile

1 **W. Rodrigues**, *Elko Spinor Fields and Massive Magnetic Like Monopoles*. IMECC -UNICAMP, Brasil.

2 **E. Notte**, *Structure Differential onto the Hyperbolic Clifford Algebra*. Departamento de Matemáticas, ULS.

3 **E. Reyes**, *Nonlocal symmetries, integrability of equations of pseudo-spherical type and the Virasoro algebra*. Departamento de Matemática y C.C, USACH.

4 **G. Palomera**, *Teorema de Geroch-Ehlers*. Departamento de Matemática y C.C., USACH.

5 **M. Bezares**, *K-esencia no-minimalmente acoplada*. Departamento de Matemática y C.C., USACH.

6 **M. Corgini**, *Study of an exactly soluble spin-1 Bose system with spectral gap and a spin-1/2 Infinite range hopping BH model*. Departamento de Matemáticas, ULS.

7 **N. Moraga**, *Aumento de la complejidad en el modelamiento matemático de problemas de cambio de fase líquido-sólido y la mejora de soluciones numéricas*. Departamento de Ingeniería Mecánica, ULS.

8 **R. Lemus**, *PDE's conjugated and non-conjugated models for characterization food thermal processes with phase change: MFV simulation*. Departamento de Ingeniería en Alimentos, ULS.

9 **C. Mejías**, *Advanced methods of flux identification for clarifier-thickener simulation models,* Departamento de Ingeniería Matemática y CI^{2}MA. Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

10 **C. Fernández,** *Simple pole approximation for resonance phenomena* Pontificia Universidad Católica de Chile,Santiago.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Elko Spinor Fields and Massive Magnetic Like Monopoles

Waldyr A. Rodrigues Jr.
Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation
IMECC-UNICAMP
13083-859 Campinas SP, Brazil
walrod@ime.unicamp.br or walrod@mpc.com.br

Resumen

In this paper we recall that by construction Elko spinor fields of $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\rho}$ types satisfy a coupled system of first order partial differential equations (*csfopde*) that once interacted leads to Klein-Gordon equations for the $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\rho}$ type fields. Since the *csfopde* is the basic one and since the Klein-Gordon equations for $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\rho}$ possess solutions that are *not* solutions of the *csfopde* for $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\rho}$ we infer that it is legitimate to attribute to those fields mass dimension $3/2$ (as is the case of Dirac spinor fields) and *not* mass dimension 1 as previously suggested in recent literature (see list of references). A proof of this fact is offered by deriving the *csfopde for the* $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\rho}$ from a Lagrangian where these fields have indeed mass dimension $3/2$. Taking seriously the view that Elko spinor fields due to its special properties given by their bilinear invariants may be the description of some kind of particles in the real world a question then arises: what is the physical meaning of these fields? Here we proposed that the fields $\boldsymbol{\lambda}$ and $\boldsymbol{\rho}$ serve the purpose of building the fields $\mathcal{K} \in \mathcal{C}\ell^0(M,\eta) \otimes \mathbb{R}^0_{1,3}$ and $\mathcal{M} \in \sec \mathcal{C}\ell^0(M,\eta) \otimes \mathbb{R}^0_{1,3}$. These fields are *electrically neutral* but carry *magnetic* like charges which permit them to couple to a $su(2) \simeq spin_{3,0} \subset \mathbb{R}^0_{3,0}$ valued potential $\mathcal{A} \in \sec \bigwedge^1 T^*M \otimes \mathbb{R}^0_{3,0}$. If the field $\mathcal{A}$ is of short range the particles described by the $\mathcal{K}$ and $\mathcal{M}$ fields may be interacting and forming condensates of zero spin particles analogous to dark matter, in the sense that they do not couple with the electromagnetic field (generated by charged particles) and are thus invisible. Also, since according to our view the Elko spinor fields as well as the $\mathcal{K}$ and $\mathcal{M}$ fields are of mass dimension $3/2$ we show how to calculate the correct propagators for the $\mathcal{K}$ and $\mathcal{M}$ fields. We discuss also the main difference

between Elko and Majorana spinor fields, which are kindred since both belong to class five in Lounesto classification of spinor fields. Most of our presentation uses the representation of spinor fields in the Clifford bundle formalism, which makes very clear the meaning of all calculations.

Joint work with:
E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr.
Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation
IMECC-UNICAMP CP 6065, 13083-859 Campinas, SP, Brazil.

Structure Differential onto the Hyperbolic Clifford Algebra

Eduardo Notte Cuello[*]
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
La Serena-Chile

Resumen

In this work we presents a review of the Hyperbolic Clifford algebra of a real n-dimensinal space V. We give a thoughtful exposition of the Clifford algebra $Cl\,(H_V)$ of multivecfors which is naturally associated with a hyperbolic space H_V, we study the properties of the duality product of multivectors and multiforms and introduce the theory of k multivector and l multiform variables multivector extensors over V, then by used this theory we present a theory of the parallelism structure on arbitrary smooth manifold, finally we study covariant derivatives, deformed derivatives and relative convarint derivatives of multivector, multiform field and extensors fields.

Trabajo realizado en conjunto con:
Waldyr Rodrigues Jr.,
Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation
IMECC-UNICAMP CP 6065, 13083-859 Campinas, SP, Brazil.
walrod@ime.unicamp.br

Referencias

[1] Fernández, V. V., Moya, A. M., Notte-Cuello, E., and Rodrigues, W. A. Jr., Duality Products of Multivectors and Multiforms and Extensors, *Algebras, Groups and Geometries* **24** (1), 24-54 (2007).

[2] Fernández, V. V., Moya, A. M., Notte-Cuello, E., and Rodrigues, W. A. Jr., Parallelism Structure on a Smooth Manifold, *Algebras, Groups and Geometries* **24** (2), 129-155 (2007).

[3] Fernández, V. V., Moya, A. M., Notte-Cuello, E., and Rodrigues, W. A. Jr., Covariant Differentiation of Multivector and Multiform Fields, *Algebras, Groups and Geometries* **24** (2), 221-237 (2007).

[4] Fernández, V. V., Moya, A. M., Notte-Cuello, E., and Rodrigues, W. A. Jr., Covariant Differentiation of Extensor Fields, *Algebras, Groups and Geometries* **24** (3), 255-267 (2007).

[5] Fernández, V. V., Moya, A. M., and Rodrigues, W. A. Jr., Geometric Algebras and Extensors, *Int. J. Geom. Meth. Math. Phys* **4** (6) 927-964 (2007).

[*] Parcialmente financiado por Dirección de Investigación U. de La Serena, DIULS, e-mail: enotte@userena.cl

[6] Fernández, V. V., Moya, A. M., da Rocha, R., and Rodrigues, W. A. Jr., Riemann and Ricci Fields in Geometric Strutures, *Int. J. Geom. Meth. Math. Phys.* **4** (7), 1159-1172 (2007).

[7] Greub, W., *Multilinear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[8] Knus, M., *Quadratic Forms, Clifford Algebras and Spinors*, Seminars in Mathematics, IMECC–UNICAMP, Campinas, 1988.

[9] Lounesto, P., Clifford Algebras and Hestenes Spinors, *Found. Phys.* **23** 1203–1237, (1993).

[10] da Rocha R., and Vaz, J., Jr., Extended Grassmann and Clifford algebras, *Adv. Appl. Clifford Algebras* **16**, 103-125 (2006). [arXiv.org/math-ph/0603050]

[11] Rodrigues, W. A. Jr. and Souza, Q. A. G., Spinor Fields and Superfields as Equivalence Classes of Exterior Algebra Fields, in Lounesto, P. and Ablamowicz, R. (eds.), *Clifford Algebras and Spinor Structures*, Mathematics and its Applications **321**, 177-198, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[12] Rodrigues, W. A. Jr., Algebraic and Dirac-Hestenes Spinors and Spinor Fields, *J. Math. Physics* **45**, 2908-2944 (2004). [arXiv.org/math-ph/0212030]

[13] Mosna, R. A. and Rodrigues, W. A., Jr., The Bundles of Algebraic and Dirac-Hestenes Spinor Fields, *J. Math. Phys* **45**, 2945-2966 (2004). [arXiv.org/math-ph/0212033]

[14] Rodrigues, W. A. Jr. and Souza, Q. A. G., The Hyperbolic Clifford Algebra of Multivecfors, *Algebras, Groups and Geometries* **24** (1), 1-24 (2007).

[15] Rodrigues, W. A. Jr. Oliveira, E. Capelas, *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach*, Lecture Notes in Physics **722**, Springer, New York, 2007.

[16] Witten, E., A Note on the Antibracket Formalism, *Mod. Phys. Lett. A* **5**, 487-494 (1990).

Nonlocal symmetries, integrability of equations of pseudo-spherical type and the Virasoro algebra

Enrique G. Reyes

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación,
Universidad de Santiago de Chile
Casilla 307 Correo 2, Santiago, Chile.
e-mail: `ereyes@fermat.usach.cl ; e_g_reyes@yahoo.ca`

I will introduce a simplified version of the classical Krasil'shchik-Vinogradov geometric theory of nonlocal symmetries, [9], and I will present several applications, [1–8]. For example, [2, 4, 5], the theory can be used to find highly non-trivial explicit solutions and Darboux-like transforms to nonlinear equations such as the Kaup-Kupershmidt equation

$$q_t = q_{xxxxx} + 5\,q\,q_{xxx} + \frac{25}{2}\,q_x q_{xx} + 5\,q^2 q_x\ .$$

Moreover, I will argue that nonlocal symmetries can be used to *uncover* integrable equations, at least within the class of equations of pseudo-spherical type, [1, 4, 8]. I will also present classifications of nonlocal symmetries of integrable equations such as the Camassa-Holm equation

$$m + u_{xx} - u = 0 \qquad m_t + m_x\,u + 2\,m\,u_x = 0\ ,$$

and I will show that the (centerless) Virasoro algebra appears as a Lie algebra of *nonlocal* symmetries, [4, 5, 6, 7, 8]. Finally, I will present a recent generalization of the Krasil'shchik-Vinogradov theory, [5], and I will show how it applies to the Degasperis-Procesi equation

$$m + u_{xx} - u = 0 \qquad m_t + m_x\,u + 3\,m\,u_x = 0\ .$$

References

[1] E.G. Reyes, Geometric integrability of the Camassa-Holm equation. *Letters in Mathematical Physics* 59, no. 2 (2002), 117–131.

[2] E.G. Reyes, Nonlocal symmetries and the Kaup-Kupershmidt equation. *Journal of Mathematical Physics* 46 (2005), no. 7, 073507 (19 pages).

[3] P. Gorka and E.G. Reyes, The modified Camassa-Holm equation. *International Mathematics Research Notices* (2011) Vol. 2011, 2617–2649; first published online September 15, 2010; doi: 10.1093/imrn/rnq163.

[4] R. Hernandez-Heredero and E.G. Reyes, Geometric integrability of the Camassa-Holm equation II. *International Mathematics Research Notices* (2012) Vol. 2012, 3089–3125; first published online July 11, 2011; doi:10.1093/imrn/rnr120.

[5] E.G. Reyes, Jet bundles, symmetries, Darboux transforms. *Contemporary Mathematics* 563 (2012), 137–164. http://dx.doi.org/10.1090/conm/563/11168.

[6] P. Gorka and E.G. Reyes, The modified Hunter-Saxton equation. *Journal of Geometry and Physics* 62 (2012), 1793–1809.

[7] P.M. Bies, P. Gorka and E.G. Reyes, The dual modified KdV–Fokas–Qiao equation: geometry and local analysis. *Journal of Mathematical Physics* 53 (2012), 073710; http://dx.doi.org/10.1063/1.4736845 (19 pages).

[8] R. Hernandez-Heredero and E.G. Reyes, Nonlocal symmetries, compacton equations, and integrability. To appear, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2013.

[9] I.S. Krasil'shchik and A.M. Vinogradov, Nonlocal trends in the geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws and Bäcklund transformations. *Acta Appl. Math.* 15 (1989), 161–209.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Teorema de Geroch-Ehlers

Gonzalo Palomera Quiroz *
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación,
Universidad de Santiago de Chile,
Chile, Santiago.

Resumen

Proporcionamos una prueba totalmente rigurosa del teorema Geroch-Ehlers en movimiento geodésico en las teorías métricas de la gravedad. Suponemos que (M, g) es una variedad de espacio-tiempo satisfaciendo (una forma promedio de) la condición de energía dominada y dos supuestos técnicos adicionales indicadas en el cuerpo de este trabajo. Asi, un pequeño cuerpo moviéndose sobre una curva tipo-tiempo, dada las condiciones sobre las deformaciones de la métrica background, termina siguiendo la trayectoria de una geodésica. También presentamos algunos cálculos explícitos en el caso de la métrica del espacio-tiempo con una simetría S^2.

Trabajo realizado en conjunto con:
Miguel Bezares Figueroa[1], Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Chile, Santiago.
Enrique G. Reyes[2], Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Chile, Santiago.
Daniel J. Pons[3], Departamento de Matemática, Universidad Nacional Andrés Bello, Santiago, Chile.

Referencias

[1] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, "Le Spectre d'une Variété Riemannienne". Lecture Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[2] N. K. Smolentsev, Spaces of Riemannian Metrics.

[3] J. Ehlers. Isolated Gravitating System in General Relativity.

[4] R. Geroch and J. Ehlers, Equation of Motion of Small Bodies in Relativity. *Annals of Physics* 309 (2004), 232–236.

[5] R. Geroch and P. S. Jang. Motion of a body in general relativity. *J. Math. Phys.* 16 (1975), 65.

[6] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, "The large scale structure of space time". Cambridge University Press, 1973.

* Parcialmente financiado por Fondecyt $\sharp$ 1111042 , e-mail: `gonzalo.palomera@usach.cl`
[1] Parcialmente financiado por Fondecyt $\sharp$ 1111042, e-mail: `miguel.bezares@usach.cl`
[2] Parcialmente financiado por Fondecyt $\sharp$ 1111042, e-mail: `ereyes@fermat.usach.cl`
[3] e-mail: `dpons@unab.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

K-esencia no-minimalmente acoplada.

Miguel Bezares Figueroa *
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación,
Universidad de Santiago de Chile,
Chile, Santiago.

Resumen

En este trabajo estudiamos una cosmología con energía oscura modelada por un lagrangiano de K-esencia del tipo $P(\phi, X)$, donde $X = \frac{1}{2}\nabla^a\phi\nabla_a\phi$ no minimalmente acoplada. Ocupando la aproximación de Callan-Coleman-Jackiw para la definición del tensor de energía-momentum, encontramos las expresiones para la densidad de energía y presión en función del campo de K-esencia. Con estas expresiones mostramos la condición general para tener expansión acelerada del universo y simplificaciones de los modelos de K-esencia posibles.

Trabajo realizado en conjunto con:
Norman Cruz Marin[1], Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile, Chile, Santiago.
Gonzalo Palomera Quiroz[2], Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Chile, Santiago.

Referencias

[1] Alexander Vikman. (2005); arXiv:0407107v4 [astro-ph].

[2] Valerio Faraoni. (2000); arXiv:0002091v2 [gr-qc].

[3] M. R. Setare and Elias C. Vagenas. (2010); arXiv:0906.4237v2 [gr-qc].

[4] H. Farajollahi, A. Ravanpak and G. F. Fadakar. (2011); arXiv:1103.3554v2 [gr-qc].

[5] S. Bellucci and V. Faraoni. (2001); arXiv:hep-th/0106168v1.

*e-mail: miguel.bezares@usach.cl
[1]e-mail: norman.cruz@usach.cl
[2]e-mail: gonzalo.palomera@usach.cl

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Study of an exactly soluble spin-1 Bose system with spectral gap and a spin-1/2 infinite range hopping BH model

Marco Corgini Videla*
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
La Serena, Chile

Resumen

By using a well known Bogolyubov Approximating Hamiltonian [1, 2, 3] approach the limit pressure of a system of atoms with internal three level structure (spin-1 system [4]) is obtained. Moreover, the emergence of Bose Einstein condensation is proven when the coupling constants associated to intrastate collisions take the same positive value. On the other hand, a class of spin-1/2 infinite range hopping Bose-Hubbard model[5, 6] defined on a cubic lattice with onsite repulsion is studied. It is demonstrated that the system displays conventional BEC for nonvanishing chemical potential.

Referencias

[1] Corgini M, Sankovich, D.P. *Soluble model of Bose-atoms with two level internal structure: non-conventional Bose-Einstein condensation*. Condensed Matter Physics, Vol. 13, No.4, 43003,1-11, 2010.

*Partially supported by Anillo Red de Análisis Estocástico y Aplicaciones (Sistemas abiertos, energía y dinámica de la información) ACT1112, e-mail: mcorgini@userena.cl

[2] Corgini M., Rojas-Molina C., Sankovich D.P. *Coexistence of non-conventional condensates in two-level Bose atom systems*. International Journal of Modern Physics B, Vol. 22, No. 27: 4799-4815, 2008.

[3] Corgini M., Sankovich D.P. *Bogolyubov approximation for a diagonal model of an interacting Bose-gas*. Physics Letters A , 360 (3) : 419-422, 2007.

[4] Ieda J., Wadati M., *Exact Nonlinear Dynamics in Spinor Bose-Einstein Condensates* in Nonlinear Dynamics, Edited by Todd Evans, 2010. Publisher: InTech.

[5] Fisher M.P.A., Weichman P.B., Grinstein G., Fisher D.S., *Boson localization and the superfluid-insulator transition*. Phys. Rev. B 40 546 (1989)

[6] Bru J-B, Dorlas T.C.,*Exact Solution of the Infinite-Range-Hopping Bose-Hubbard Model*. J. Stat. Phys. 113 177-196 (2003)

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31, August 03 2013, La Serena, Chile

Aumento de la complejidad en el modelamiento matemático de problemas de cambio de fase líquido-sólido y la mejora de soluciones numéricas

N. Moraga *
Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de La Serena, Benavente 980,
La Serena, Chile.

Abstract

Una cantidad importante de aplicaciones tecnológicas emplea el cambio de fase líquido a sólido para su utilización práctica. En la industria de alimentos interesa congelar alimentos para preservar sus propiedades, los que luego se deben descongelar. En la minería, cobre fundido se enfría en moldes para fabricar cátodos. En la industria automotriz, naviera, aeronáutica y de equipos de línea blanca, se funden polímeros que luego solidifican para fabricar partes de vehículos, artefactos y equipos.

Desde el punto de vista matemático el problema de cambio de fase debe formularse en un modelo continuo, a nivel macroscópico, en base a las ecuaciones clásicas de mecánica de fluidos y de transferencia de calor. Esto significa incorporar en el modelo la ecuación de conservación de materia (continuidad), la segunda ley de Newton (ecuaciones de momento lineal) y la ecuación de la energía, para la fase fundida del material, junto a la ecuación de difusión transiente de calor en la región solidificada. En el tiempo, la frontera líquido a sólido se mueve y su posición debe determinarse como parte de la solución del problema. Este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales es altamente no lineal, por los términos convectivos en las ecuaciones de momento, la variación de las propiedades físicas con la temperatura en las dos ecuaciones de energía (una en cada fase) y por el balance de energía en la interfaz móvil.

El primer objetivo del trabajo es analizar la forma en que aumenta la complejidad del modelo matemático, describiendo procesos de cambio de fase que han sido estudiados por nuestro grupo que incluyen: comportamiento no Newtoniano del metal fundido, presencia de convección forzada externa laminar o turbulento que se debe determinar simultáneamente, dimensiones físicas que obligan a emplear modelos 3D en lugar de 2D y por la presencia, en algunos casos, de una matriz porosa, donde ocurre el proceso.

El segundo objetivo es presentar resultados de simulaciones computacionales para problemas de grado creciente de complejidad, resueltos con el método de volúmenes finitos, realizando un estudio del tiempo de cáculo que se necesita para obtener la solución de cada modelo y realizar comparaciones que permitan mejorar los algoritmos y la implementación usada. En particular, se presentan ejemplos en tres áreas: congelación y descongelación de alimentos, solidificación - fusión de aleaciones y almacenamiento de energía térmica en paredes de vivienda para reducir las variaciones de la temperatura interior.

*Este trabajo fue apoyado parcialmente por FONDECYT-Chile en el proyecto 1111067, e-mail: nmoraga@userena.cl

Los aspectos investigados incluyen: el análisis de un nuevo algoritmo secuencial iterativo (PSIMPLER) original para el acoplamiento velocidad-presión [1], [2]; el empleo de un nuevo modelo de medio poroso para describir la mecánica de fluidos y la transferencia de calor en la zona pastosa; la utilización de un modelo general de Darcy-Brikman- Forhheimer para describir los flujos de fluidos y calor en un medio poroso donde ocurre la solidificación, y el reemplazo de las condiciones de borde en las fronteras de la región donde ocurre el cambio de fase por un modelo conjugado que incluye la convección forzada de calor en flujo laminar o turbulento que ocurre alrededor.

Los resultados que describen la evolución en el tiempo de las distribuciones de velocidad y temperatura en el material fundido y de la temperatura en el material solidificado, junto a la descripción de la mecánica de fluidos y la convección forzada en el aire exterior, se presentan en cada caso. La variación del tiempo de cálculo con el aumento de la complejidad del modelo matemático se documenta para cada estudio.

Joint work with:

R.C. Cabrales. [1], Departamento de Ciencias Básicas. Universidad del Bío-Bío. Chillán, Chile
M. Godoy. [2], Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad de La Serena, Benavente 980, La Serena, Chile.

References

[1] N. Moraga, S. Ramirez, M. Godoy. *Study of convective non-Newtonian alloy solidification in molds by the PSIMPLER / Finite Volume Method.* Numerical Heat Transfer Part A, 12 (2010), pp. 936-953.

[2] A. Acharya, B. Baliga, K. Karki, J. Murthy, C. Prakash, S. Vanka. *Pressure-based Finite Volume Methods in Computational Fluid Dynamics.* Journal of Heat Transfer, 129 (2007), pp. 407-424.

[3] P. Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics.* Springer-Verlag, 2001.

[1]Partially supported by project 121909 GI/C Grupo de Investigación consolidado, e-mail: `roberto.cabrales@gmail.com`

[2]e-mail: `mgodoy@userena.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

PDE$'$s CONJUGATED AND NON-CONJUGATED MODELS FOR CHARACTERIZATION FOOD THERMAL PROCESSES WITH PHASE CHANGE: MVF SIMULATION

Roberto Lemus-Mondaca*

Departamento de Ingeniería en Alimentos - Universidad de La Serena

Abstract

We have described some food thermal processes by using mathematical conjugated and nonconjugated models as viable techniques to provide effective and efficient design solutions. These new challenges to improve food processing have created an incentive in the potential use of computer aided engineering for simulating thermal processes in foods. The conjugated and nonconjugated models with finite volumes method that have been used to predict and describe food freezing and drying processes as discussed in [1,2,3]. However, application of computational simulation should be used in combination with conventional techniques such as physical experiments and analytical solutions in order to enhance the knowledge of fluid mechanics, heat and mass transfer in foods. The transport equations describing unsteady fluid mechanics, convection-diffusion heat transfer in terms of the primitive variables for the processes to be studied in this project are [4]:

Conservation of mass (continuity): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = 0$

Conservation of linear momentum: $\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho G_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau^t_{ij}}{\partial x_i}$

*The authors acknowledge the financial support of DIULS project MULTIDISCIPLINAR No PMU13331, e-mail: `rlemus@userena.cl`

Conservation of energy: $\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{x_i} + \frac{\partial q_i^t}{x_i} + \phi^t$

where τ_{ij}^t and q_{ij}^t are the turbulent Reynolds stress and heat flux, respectively.

Figure 1 shows the physical differences between non-conjugated (only food) and conjugated (air and food) models for food drying and food freezing processes. The examples shown in this review are related to food dehydration and freezing processes for 2D and 3D turbulent and laminar flows of Newtonian and non-Newtonian liquid foods. Due to the fast advance in hardware, the use of the proposed methodology to other food non-thermal (high hydrostatic pressure, pulsed electric fields, oscillating magnetic fields, ultraviolet, and ultrasound) and thermal (microwave, evaporation, refrigeration, pasteurization, and distillation) processes, either for laminar or turbulent flows in 2D and 3D, applied to solid, liquid, and mixed (solid/fluid treated as porous media) foods can be expected in the near future.

Joint work with:
Nelson Moraga, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de La Serena.[1]

References

[1] Lemus-Mondaca, R., Moraga, N., Vega-Gálvez, A. and Zambra, C. 2013. Coupled 3D heat and mass transfer model for numerical analysis of drying process in papaya slices. Journal of Food Engineering, 116(1), 109-117.

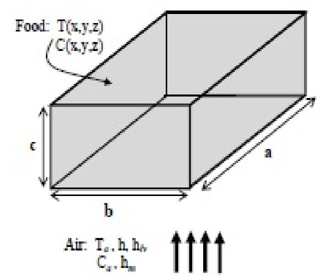
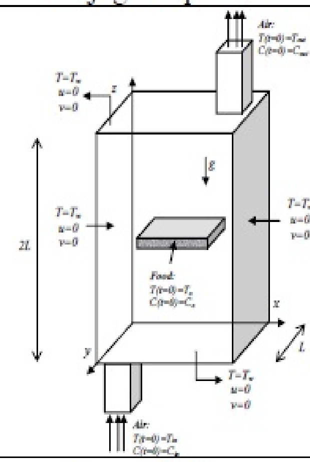
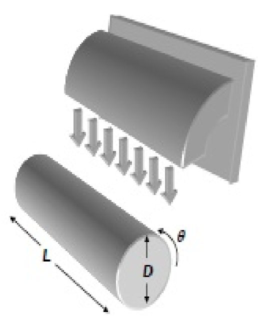
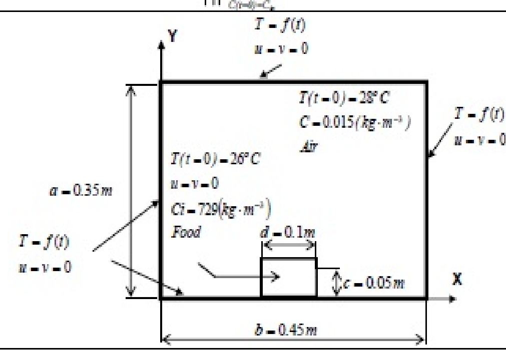
[2] Moraga, N., Vega-Gálvez, A. and Lemus-Mondaca, R. 2011. Numerical simulation and study experimental of freezing process of ground meat cylinders. International Journal of Food Engineering, 7(6), Art.11.

[3] Moraga, N., Jauriat, L. and Lemus-Mondaca, R. 2012. Heat and mass transfer in conjugated food freezing / air natural convection. International Journal of Refrigeration, 35(4), 880-889.

[4] Lemus-Mondaca, R., Vega-Gálvez, A and Moraga, N. 2011. Computational simulation and developments applied to food thermal processing. Food Engineering Reviews, 3 (3-4), 121-135.

[1]e-mail: nmoraga@userena.cl

Table 1. Foods and processes classified according to type of model used.

<table>
<tr><th>Process</th><th>Non-conjugated problems</th><th>Conjugated problems</th></tr>
<tr><td>Drying</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Freezing</td><td></td><td></td></tr>
</table>

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31–August 02 2013, La Serena, Chile

Advanced methods of flux identification for clarifier-thickener simulation models

Camilo Mejías*

CI²MA & Depto. de Ingeniería Matemática,
Universidad de Concepción,
Concepción, Chile.

Abstract

Mathematical models for the simulation of batch settling and continuous clarifier-thickeners can usually be expressed as a convection-diffusion partial differential equation (PDE) [2]. Reliable numerical methods require that the nonlinear flux function of this PDE has been identified for a given material. This contribution summarizes, and applies to experimental data, a recent approach in [3] for the flux identification in the case of a suspension that shows no compressive behaviour.

The experimental Kynch test [5] and the Diehl test [4], which are based on an initially homogenous suspension either filling the whole settling column or being initially located above clear liquid, respectively, provide data points that represent a convex and concave, respectively, suspension-supernate interface. A provably convex (concave) smooth approximation of this interface is obtained by solving a constrained least-squares minimization problem. The interface-approximating function can be converted uniquely into an explicit formula for a convex (concave) part of the flux function. Numerical examples for synthetic and real experimental data are presented.

This presentation is based on joint work with Fernando Betancourt (Universidad de Concepción), Raimund Bürger (Universidad de Concepción) and Stefan Diehl (Lund University, Sweden) [1].

References

[1] Betancourt, F., Bürger, R., Diehl S. and Mejías, C., *Advanced methods of flux identification for clarifier-thickener simulation models*. Preprint, Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 2013.

[2] Bürger, R., Karlsen, K.H. and Towers, J.D., *A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units.*, SIAM Journal on Applied Mathematics 65, 882–940, 2005.

[3] Bürger, R. and Diehl S., *Convexity-preserving flux identification for scalar conservation laws modelling sedimentation.*, Inverse Problems 29, paper 045008 (30pp), 2013.

*Partially supported by Fondecyt project 1130154 and BASAL project CMM. E-mail: cmejias@ing-mat.udec.cl

[4] Diehl, S., *Estimation of the batch-settling flux function for an ideal suspension from only two experiments.*, Chemical Engineering Science 62, 4589–4601, 2007.

[5] Kynch, G.J., *A theory of sedimentation*, Trans. Faraday Soc. 48, 166–176, 1952.

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Simple pole approximation for resonance phenomena

Claudio Fernández *

Facultad de Matemáticas.

Pontificia Universidad Católica de Chile

Santiago

Chile

Resumen

We consider the Schrödinger equation,

$$i\,\varphi_t = -\Delta\varphi + V(x)\varphi$$

where $V(x)$ is a bounded potential in $\mathbb{R}^d$, with compact support.

When the Hamiltonian H has a resonance at energy $k_0^2 = (\sigma_0 - i\epsilon_0)^2$, the physical consequence should be the existence of a state ψ, that is, a unit vector in $L^2(\mathbb{R}^d)$, such that the quantity,

$$\langle \psi, e^{-iHt}\psi\rangle$$

decays (almost) exponentially in t.

We shall review several results of this type, including a recent collaboration with R. Froese and P. Hislop.

*Partially supported by Conicyt-PIA ACT1112 and Fondecyt 1100304, Chile, e-mail: `cfernand@mat.puc.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Coordinación: Justino Sánchez
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
La Serena, Chile

1 **Marko Rojas Medar** *On the approximation of turbulent fluids flows by the Navier Stokes-α equations on bounded domains.* Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío Bío, Chillán. Chile.

2 **Humberto Ramos Quoirin** *Sobre una ecuación elíptica cuasilineal indefinida* Departamento de Matemática y C.C,. USACH. Santiago, Chile.

3 **Aníbal Coronel** *A uniqueness result for an inverse problem to the system modelling nonhomogeneous asymmetric fluids* Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío.

4 **L. Friz** *Optimal Control for a Second Grade Fluid System.* Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío. Chillán, Chile.

5 **Francisco Torres** *Soluciones positivas en un problema de borde de orden mixto* Departamento de Matemáticas, Universidad de Atacama. Copiapó, Chile.

6 **Pedro Ubilla** *Problemas superlineales considerando exponentes críticos* Departamento de Matemática y C.C.. USACH. Santiago, Chile.

7 **Vicente Vergara** *Long-time behavior of nonlinear integro-differential evolution equations* Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá. Arica, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

A uniqueness result for an inverse problem to the system modelling nonhomogeneous asymmetric fluids

Aníbal Coronel*
GMA, Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío,
Campus Fernando May,
Chillán, Chile,

Abstract

In this paper, we prove the local uniqueness of an inverse problem arising in the nonstationary flow of a nonhomogeneous incompresible asymmetric fluid in a bounded domain with smooth boundary. The direct problem is an initial-boundary value problem for a system for the velocity field, the angular velocity of rotation of the fluid particles, the mass density and the pressure distribution. The inverse problem consists in the external force recover assuming a integral mesurements on the boundary. We characterize the inverse problem solutions using an operator equation of second kind, which is deduced form the application of the Helmholtz descomposition. We introduce several estimates wich implies the hypothesis of the Tikhonov fixed point theorem.

Joint work with:
Marko Rojas [1], GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Chillán, Chile.

*Partially supported by 124109 3/R and 121909 GI/C, e-mail: acoronel@ubiobio.cl
[1]Partially supported by 121909 GI/C, Fondecyt 1120260 and MTM 2012-32325 (Spain), e-mail: marko.medar@gmail.com

References

[1] Jishan Fan and Gen Nakamura. Local solvability of an inverse problem to the density-dependent Navier-Stokes equations. *Appl. Anal.*, 87(10-11):1255–1265, 2008.

[2] Aleksey I. Prilepko, Dmitry G. Orlovsky, and Igor A. Vasin. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, volume 231 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2000.

[3] Roger Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.

[4] Jacques Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(5):1093–1117, 1990.

[5] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. Translated from the Russian.

[6] José L. Boldrini, Marko A. Rojas-Medar, and Enrique Fernández-Cara. Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the equations of the nonhomogeneous asymmetric fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(11):1499–1525, 2003.

[7] José Luiz Boldrini and Marko Rojas-Medar. On the convergence rate of spectral approximation for the equations for nonhomogeneous asymmetric fluids. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 30(2):123–155, 1996.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Soluciones Positivas en un Problema de Borde de Orden Mixto

Francisco J. Torres*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Atacama
Copiapó, Chile

Resumen

En este trabajo se discute la existencia y multiplicidad de soluciones positivas de un problema de orden mixto, esto es, derivadas enteras y fraccionarias, para el p-laplaciano. Las herramientas usadas son la teoría del índice del punto fijo y el teorema del punto fijo de Leggett-Williams.

Referencias

[1] G. Chai, *Positive Solutions for Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operator*, Boundary Value Problems, **2012**,(2012):18.

[2] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis,* Springer, Berlin, 1985.

[3] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones,* Academic Press, San Diego, 1988.

[4] R. W. Leggett, L. R. Williams, *Multiple Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces* , Indiana Univ. Math. J., **28** (1979), 673–688.

[5] R. Liang, J. Peng, J. Shen, *Double positive solutions for a nonlinear four-point boundary value problem with a p-Laplacian operator*, Nonlinear Analysis **323** (2006), 413–425.

[6] T. Qiu, Z. Bai , *Existence of Positive Solutions for Singular Fractional Differential Equation.* Electron. J. Differential Equations, **146** (2008),

[7] F. Torres , *Existence of Positive Solutions for a Boundary Value Problem of a Nonlinear Fractional Differential Equation.* Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **39**, No. 2 (2013), pp 307-323.

[8] D. Zhao, H. Wang, W. Ge, *Existence of triple positive solutions to a class of p-Laplacian boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., **328** (2007), 972–983.

*Parcialmente financiado por DIUDA 221231, Universidad de Atacama, e-mail: `ftorres@mat.uda.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Sobre una ecuación elíptica cuasilineal indefinida

Humberto Ramos Quoirin*
Departamento de Matemáticas
USACH
Santiago, Chile

Resumen

We consider an indefinite boundary value problem involving the p-Laplacian operator. More precisely, we deal with a p-homogeneous and indefinite operator and show that for a class of indefinite nonhomogeneous nonlinearities, the problem admits at least three nonnegative nontrivial solutions. To this end, we prove that the energy functional has two local minimizers and a mountain-pass critical point. Subcritical and critical growth are allowed on the nonlinearity.

Trabajo realizado en conjunto con:
Pedro Ubilla[1], Departamento de Matemáticas, USACH, Santiago, Chile.

Referencias

[1] D. G. De Figueiredo, J-P. Gossez, P. Ubilla, *Local "superlinearity" and "sublinearity" for the p-Laplacian.* J. Funct. Anal. 257 (2009), no 3, 721–752.

[2] H. Ramos Quoirin, P. Ubilla. *On some indefinite and non-powerlike elliptic equations.* Nonlinear Anal. 79 (2013), 190–203.

*Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt 11121567, e-mail: `humberto.ramos@usach.cl`
[1]Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt 1080430, e-mail: `pedro.ubilla@usach.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Optimal Control for a Second Grade Fluid System

L. Friz*

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad del Bío-Bío

Chillán, Chile.

Abstract

In this work, we consider an incompressible non-Newtonian fluid flows of grade two in three dimensions. In a mathematical point of view, if $\mathbf{u}$ and p are the velocity and pressure respectively, the equations of motion for an incompressible fluid of grade two are given by (see [1]):

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}-\alpha\Delta\mathbf{u})-\nu\Delta\mathbf{u}+\operatorname{curl}(\mathbf{u}-\alpha\Delta\mathbf{u})\times\mathbf{u}+\nabla q & = & \mathbf{f}+\mathbf{v} & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} & = & 0 & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{u} & = & 0 & \text{on } \partial\Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{u}(0) & = & \mathbf{u}_0, & \text{in } \Omega. \end{array}\right. \tag{1}$$

Here, $\nu > 0$ represents the Kinematic viscosity, $\mathbf{f}$ the external forces and $q = p-\alpha(\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{4}|D\mathbf{u}|^2)-\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$, where $(D\mathbf{u})_{ij} = \partial_j\mathbf{u}_i+\partial_i\mathbf{u}_j$. Let us introduce the non-empty subset $\omega \subseteq \Omega$ and a velocity $\mathbf{u}_1$ defined on ω is given . The problem is to find a external force $\mathbf{v}$ so that the associated velocity $\mathbf{u}$ minimize the functional

$$J(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_0^T\int_\omega|\mathbf{u}-\mathbf{u}_1|^2dx+\int_0^T\int_\Omega|\mathbf{v}|^2dxdt \tag{2}$$

The goal of this work is to show that this problem admits at least one optimal solution and to characterize such solution in terms of first order optimality conditions following the ideas given in the article [2].

*Partially supported by Grant Fondecyt 1130456 and Grant 121909 GI/C UBB, e-mail: lfriz@ubiobio.cl

Joint work with:

F. Araruna[1], Departamento de Matemática, Universidad Federal da Paraiba,58.051-900 João Pessoa - PB - Brasil.
M. Rojas-Medar[2], Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile.

References

[1] D. Cioranescu and V. Girault, *Weak and classical solutions of a family of second grade fluids*, Int. J. Non-Linear Mechanics **32** (1997), 317–335.

[2] J. L. Boldrini, E. Fernández-Cara and M.A. Rojas-Medar, *An optimal control problem for a generalized Boussinesq model: the time dependent case*, Rev. Mat. Complut. **20** (2007), no. 2, 339–366.

[1] Partially supported by INCTMat, CAPES, CNPq by grants 307893/2011-1 and 552758/2011-6, e-mail: `fagner@mat.ufpb.br`

[2] Partially supported by Grants Fondecyt 1120260, Fondecyt 1130456 and Grant 121909 GI/C UBB, e-mail: `marko@ueubiobio.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

On the approximation of turbulent fluid flows by the Navier-Stokes-α equations on bounded domains

Marko Rojas-Medar*

Grupo de Matemática aplicada, Dpto. Ciencias Básicas,
Universidad del Bío-Bío
Chillán, Chile

Abstract

The Navier-Stokes-α equations are an LES (Large Scale Simulation) model that provides a regularization of the Navier-Stokes equations. This filtering technique allows to capture the behavior of the small scales on the large scales without computing all the scale range presented in the flow. The constant α is a regime flow parameter that has the dimension of the smallest scale being resolvable by the model. Hence, when $\alpha = 0$, one recovers the classical Navier-Stokes equations for a flow of viscous, incompressible, Newtonian fluids.

We first derive the Navier-Stokes-α equations on bounded domains with no-slip boundary conditions by means of the Leray regularization using the Helmholtz filter. Then we study the behavior of the Galerkin approximations of the Navier-Stokes-α equations as approximating solutions of the Navier-Stokes equations on bounded domains with no-slip boundary conditions. The Galerkin method is undertaken by using the eigenfunctions associated with the Stokes operator. We will derive local- and global-in-time error estimates measured in terms of the regime parameter α and the eigenvalues. In particular, in order to obtain global-in-time error estimates, we will work with the concept of stability for solutions of the Navier-Stokes equations in terms of the L^2 norm.

Joint work with:
Juan V. Gutiérrez-Santacreu[1], Dpto. de Matemática Aplicada I, E. T. S. I. Informática, Universidad de Sevilla. Avda. Reina Mercedes, s/n. E-41012 Sevilla, Spain.

References

[1] C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi. *The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence. Advances in nonlinear mathematics and science.* Phys. D 152/153 (2001), 505-519.

[2] J. V. Gutiérrez-Santacreu, M. A. Rojas-Medar. *Uniform-in-time error estimates for spectral Galerkin approximations of a mass diffusion model.* Math. Comp., 81 (2012), no. 277, 191-218.

*Partially supported by the Fondecyt-Chile grant No. 1120260 and 121909 GI/C-UBB, Chile, e-mail: marko@ubiobio.cl

[1]Partially supported by the José Castillejo Spanish grant No. JC2011-0418 from Ministerio de Educación y Ciencia, e-mail: juanvi@us.es

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Problemas superlineales considerando exponentes críticos

Pedro Ubilla*

Departamento de Matemáticas y C. C.

Universidad de Santiago de Chile

Santiago, Chile.

Resumen

Se presentarán resultados de existencia y multiplicidad de soluciones para un problema elíptico superlineal considerando no-linealidades con coeficientes cambiando de signo y crecimiento crítico. Para nuestro propósito utilizaremos técnicas variacionales, es decir, asociaremos un funcional a la ecuación de tal manera que los puntos críticos correspondan a las soluciones del problema.

Referencias

[1] H. Ramos Quoirin, P. Ubilla, *On a Quasilinear and Indefinite Elliptic Equation*, preprint.

[2] D. G. De Figueiredo, J-P. Gossez and P. Ubilla, *Local "superlinearity" and "sublinearity" for the p-Laplacian* J. Funct. Anal. **257**(2009), no 3, 721-752.

*Partially supported by Grant Fondecyt 1120524, e-mail: `pedro.ubilla@usach.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31, August 02 2013, La Serena, Chile

Long-time behavior of nonlinear integro-differential evolution equations

V. Vergara*
Instituto de Alta Investigación
Universidad de Tarapacá
Arica, Chile.

Abstract

We study the long-time behavior as time tends to infinity of globally bounded strong solutions to certain integro-differential equations in Hilbert spaces. Based on an appropriate new Lyapunov function and the Łojasiewicz-Simon inequality, we prove that any globally bounded strong solution converges to a steady state in a real Hilbert space.

Joint work with:
J. Sánchez[1]. Departamento de Matemática, Universidad de La Serena.

References

[1] Vergara, V. and Zacher, R., *Lyapunov functions and convergence to steady state for differential equations of fractional order*, Math. Z. **259** (2008), 287-309.

[2] V. Vergara, *Convergence to steady states of solutions to nonlinear integral evolution equations*, Cal. Var. Partial Differential Equations **40** (2011), 319-334.

*Partially supported by Grant Fondecyt 1110033 e-mail: `vvergaraa@uta.cl`
[1]Partially supported by Fondecyt grant 1100559, e-mail: `jsanchez@userena.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN
ECUACIONES DE EVOLUCIÓN Y ANÁLISIS FUNCIONAL

Coordinación: Rodrigo Ponce

Instituto de Matemática y Física

Universidad de Talca

Talca, Chile

1 **Anatoly F. Ivanov** *Periodic Solutions and Global Dynamics in a Periodic Differential Asymptotic Delay Equation* Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca. Talca, Chile

2 **Herme Soto** *Algunos resultados de soluciones para la ecuación en diferencia de Volterra con retardo infinito* Universidad de La Frontera. Temuco. Chile.

3 **Carlos Lizama***Spectral criteria for solvability of boundary value problems for time-fractional differential equations* Departamento de Matetemática y C.C., USACH. Santiago, Chile.

4 **Erwin Henriquez Lagos** *Asymptotic periodicity for some classes of integro-differential equations and applications* Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de la Frontera. Temuco, Chile.

5 **Humberto Prado** *Evolution equations defined by non-local operators* Departamento de Matemática y C.C, USACH. Santiago, Chile.

6 **Mario Choquehuanca** *Propiedades de l^p-acotación para la ecuación en diferencia de Volterra* Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de la Frontera. Temuco, Chile.

7 **Rodrigo Ponce** *Hölder continuous solutions for a fractional differential equations* Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca. Talca, Chile.

8 **R. Rebolledo** *Solving a Volterra equation in the space of Completely Bounded super-operators* Centro de Análisis Estocástico, Facultad de Ingeniería y Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 03 2013, La Serena, Chile

Periodic Solutions and Global Dynamics in a Periodic Differential Delay Equation

Anatoli F. Ivanov*
Instituto de Matematica y Fisica
Universidad de Talca
Casilla 747, Talca, Chile

Abstract

Several aspects of global dynamics and the existence of periodic solutions are studied for the scalar differential delay equation $\dot{x}(t) = a(t)f(x([t-K]))$, where $f(x)$ is a continuous negative feedback function, $x \cdot f(x) < 0, x \neq 0$, $0 < a(t)$ is periodic with period $\omega > 0$, $[\cdot]$ is the integer part function, and the integer $K \geq 0$ is the delay. The case of integer period ω allows for a reduction to finite-dimensional difference equations. The dynamics of the latter are studied in terms of corresponding discrete maps, including the partial case of interval maps ($K = 0$).

Joint work with:
Sergei I. Trofimchuk[1], Instituto de Matematica y Fisica, Universidad de Talca, Talca, Chile.

References

[1] A.F. Ivanov and S.I. Trofimchuk, *Periodic solutions of a discretized differential delay equation.* Journal of Difference Equations and Applications **16**, nos. 2-3 (2010), 157–171.

[2] A.F. Ivanov and S.I. Trofimchuk, *Periodic solutions and their stability of a differential-difference equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems - Supplement 2009, 385–393. Proceedings of 7th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, UTA, May 17-21, 2008.

[3] R.D. Nussbaum, *Periodic solutions of nonlinear autonomous functional differential equations.* Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points (Proc. Summer School and Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1978), pp. 283–325, Lecture Notes in Mathematics **730**, Springer, Berlin, 1979.

*Partially supported by CONICYT (Chile), project MEC 801100006, e-mail: afi1@psu.edu. On leave from the Pennsylvania State University, Wilkes-Barre, USA.
[1]Partially supported by FONDECYT (Chile), project 1110309, e-mail: trofimch@inst-mat.utalca.cl

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Spectral criteria for solvability of boundary value problems for time-fractional differential equations

Carlos Lizama*
Department of Mathematics
Universidad de Santiago de Chile
Santiago, Chile

Abstract

We investigate mild solutions of the fractional order nonhomogeneous Cauchy problem

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t), t > 0$$

where $0 < \alpha < 1$. When A is the generator of a C_0-semigroup $(T(t))$ on a Banach space X, we obtain an explicit representation of mild solutions of the above problem in terms of the semigroup. We then prove that this problem under the boundary condition $u(0) = u(1)$ admits a unique mild solution for each $f \in C([0, 1]; X)$ if and only if the operator $I - S_{\alpha}(1)$ is invertible. Here, we use the representation $S_{\alpha}(t)x = \int_0^{\infty} \Phi_{\alpha}(s)T(st^{\alpha})xds,\ t > 0$ in which Φ_{α} is a Wright type function. For the first order case, that is, $\alpha = 1$, the corresponding result was proved by J. Prüss in 1984 [1].

Joint work with:
Valentin Keyantuo[1], Department of Mathematics, University of Puerto Rico, Puerto Rico, USA.
Mahamadi Warma[2], Department of Mathematics, University of Puerto Rico, Puerto Rico, USA.

References

[1] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups,* Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 847–857.

*Partially supported by FONDECYT 1100485, e-mail: carlos.lizama@usach.cl
[1]e-mail: keyantuo@uprrp.edu
[2]e-mail: warma@uprrp.edu

Asymptotic periodicity for some classes of integro-differential equations and applications

Erwin Henriquez Lagos*
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera
Temuco, Chile

Abstract

We study sufficient conditions for the existence and uniqueness of an asymptotically periodic (mild) solution for the following abstract partial integro-differential equations of the form

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \ t \geq 0,$$

$$u(0) = x_0 \in X.$$

Concrete application to heat conduction is given.

Joint work with:
Ravi Agarwal[1], Department of Mathematical Sciences, Florida Institute of Technology, USA.
Bruno de Andrade[2], Department of Mathematics, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
Claudio Cuevas[3], Department of Mathematics, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

References

[1] Agarwal R., de Andrade B., Cuevas C., Henriquez E. *Asymptotic periodicity for some classes of integro-differential equations and applications*, Advances in Mathematical Sciences and Aplications, Vol. 21, No. 1 (2011), 1-31.

[2] Coleman, Gurtin,*Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors*, Z. Angew. Math. Phys. **18** (1967), 199-208.

[3] Grimmer R. *Resolvent operators for integral equations in a Banach space.* Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 333-349.

[4] Henríquez H., Pierri M., Táboas P., *On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2) (2008), 1119-1130.

[5] Miller R.K. *An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory*, J. Math. Anal. Appl. **66** (1978), 313-332.

*e-mail: erwin.henriquez@ufrontera.cl
[1]e-mail: agarwal@fit.edu
[2]e-mail: bruno00luis@gmail.com
[3]Partially supported by CNPQ/Brazil under Grant 300365/2008-0, e-mail: cch@dmat.ufpe.br

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Evolution equations defined by non-local operators

Humberto Prado*
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile
Santiago, Chile

Abstract

Within this talk we show results on the study of the *evolutionary euclidean bosonic string equation*

$$u_t = \Delta e^{-c\Delta} u + g, \quad c > 0 \tag{1}$$

on Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We interpret the non-local operator $\Delta e^{-c\Delta}$ by using the notion of entire vectors for the Laplace operator Δ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. We prove existence, and regularity properties. Moreover we prove existence and analyticity of the solutions on a scale of spaces of Sobolev type. The main strategy is to apply the methods of the Fourier transform. We remark that the stationary nonlinear *non-local* equation $\Delta e^{-c\Delta} u = V(u)$ has been previously studied in [3, 4, 5] see also [1, 2] and the references therein.

References

[1] N. Barnaby and N. Kamran, Dynamics with infinitely many derivatives: the initial value problem. *J. High Energy Physics* 2008 no. 02, Paper 008, 40 pp.

[2] G. Calcagni, M. Montobbio and G. Nardelli, Localization of nonlocal theories. *Physics Letters B* 662 (2008), 285-289.

[3] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, On a general class of nonlocal equations. *Annales Henri Poincare* 14 (2013), 947–966.

[4] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, Nonlinear equations with infinitely many derivatives. *Complex Analysis and Operator Theory*. Available online, November 2009. DOI 10.1007/s11785-009-0043-z.

[5] P. Górka, H. Prado and E.G. Reyes, Generalized euclidean bosonic string equations. In: 'Operator Theory: Advances and Applications' vol. 224, 147–169. Springer Basel, 2012.

*Partially supported by FONDECYT grant 1130554, e-mail: `humberto.prado@usach.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Algunos resultados de soluciones para la ecuación en diferencia de Volterra con retardo infinito

Herme Soto*

Departamento de Matemáticas

Universidad de la Frontera

Temuco, Chile

Resumen

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. En este trabajo presentamos existencia de solución discreta casi automorfica de la siguiente ecuación funcional de Volterra semi-lineal en $\mathbb{X}$

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) + f(n, u_n), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

donde $u_n : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{X}$ es la función historia, la cual es definida por $u_n(\theta) = u(n+\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{Z}_-$, donde λ es un número complejo, $a(n)$ es una función sumable $\mathbb{C}$-valuada y f es una perturbación no lineal no necesariamente globalmente Lipschitz. Los resultados son consecuencia de aplicaciones de diferentes teoremas de punto fijo, tales como, principio de la contracción, de Leray-Schauder y de Krasnoselskii.

Para establecer uno de los principales resultados, necesitamos introducuir la siguiente condición y definiciones:

$\mathcal{B}$ denota el espacio de fase, el cual se define axiomáticamente y en el cual se satisface:

(B) Si $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada uniformemente en $\mathcal{B}$ la cual converge puntualmente a φ, entonces $\varphi \in \mathcal{B}$ y $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$(H1)$ Suponga que $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ es localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable, esto es, para cada número positivo σ, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$ con $||\varphi||_{\mathcal{B}} \leq \sigma$ y $||\psi||_{\mathcal{B}} \leq \sigma$, tenemos $||f(k,\varphi) - f(k,\psi)|| \leq L_f(\sigma)||\varphi - \psi||_{\mathcal{B}}$, donde $L_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función no decreciente.

Para un determinado $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $s(\lambda, k) \in \mathbb{C}$ la solución de la ecuación en diferencia

$$s(\lambda, k+1) = \lambda \sum_{j=0}^{k} a(k-j)s(\lambda, j), \; k = 0, 1, 2, \ldots, \; s(\lambda, 0) = 1. \tag{2}$$

Definimos el conjunto $\Omega_s := \{\lambda \in \mathbb{C} : ||s(\lambda, \cdot)||_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |s(\lambda, k)| < +\infty\}$.

Teorema 1 *Suponga que $\mathcal{B}$ es un espacio fase que satisface el axioma* **(B)**. *Sea λ en Ω_s y sea $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ una función discreta casi automórfica en $k \in \mathbb{Z}$ para cada $\varphi \in \mathcal{B}$ que satisface la condición* **(H1)**. *Si existe $r > 0$ tal que*

$$||s(\lambda, \cdot)||_1 \left(\rho L_f(\rho r) + \frac{1}{r} \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||f(k, 0)|| \right) < 1,$$

*Parcialmente financiado por PAI-MEC, grant 80112008, e-mail: `herme.soto@ufrontera.cl`

donde ρ es una constante específica. Entonces la ecuación (1) *tiene una solución discreta casi automórfica $u(n)$ satisfaciendo*

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) f(j, u_j),$$

Trabajo realizado en conjunto con:

Airton Castro[1], Departamento de Matemáticas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
Claudio Cuevas[2], Departamento de Matemáticas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
Filipe Dantas[3], Departamento de Matemáticas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Referencias

[1] Cuevas, C. Weighted convergent and bounded solutions of Volterra difference systems with infinite delay. *J. Difference Equ. Appl. 6*, 4 (2000), 461–480.

[2] Cuevas, C., Henríquez, H. R., and Lizama, C. On the existence of almost automorphic solutions of Volterra difference equations. *J. Difference Equ. Appl.* (2011), 1-16.

[3] Cuevas, C., and Lizama, C. Almost automorphic solutions to integral equations on the line. *Semigroup Forum 79*, 3 (2009), 461–472.

[1]e-mail: `airton@dmat.ufpe.br`
[2]e-mail: `cch@dmat.ufpe.cl`
[3]e-mail: `filiopeddsmat@gmail.com`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Propiedades de l^p-acotación para la ecuación en diferencia de Volterra

Mario Choquehuanca*

Departamento de Matemáticas

Universidad de la Frontera

Temuco, Chile

Resumen

En este trabajo presentamos resultados sobre la existencia de l^p-soluciones para la ecuación lineal en diferencia de Volterra tipo convolución de la forma

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) + f(n), \;\; n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

donde λ es un número complejo, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ es una función sumable y f está en $l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Para un determinado $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $s(\lambda, k) \in \mathbb{C}$ la solución de la ecuación en diferencia

$$s(\lambda, k+1) = \lambda \sum_{j=0}^{k} a(k-j)s(\lambda, j), \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, \;\; s(\lambda, 0) = 1. \tag{2}$$

En este caso, $s(\lambda, k)$ es llamada la solución fundamental (1) generada por $a(\cdot)$. Definamos el conjunto

$\Omega_s := \{\lambda \in \mathbb{C} : ||s(\lambda, \cdot)||_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |s(\lambda, k)| < +\infty\}$.

Teorema 1 *Sea λ en Ω_s. Entonces para cualquier $f \in l^p(\mathbb{Z}, X)$ la ecuación (1) tiene una única solución $u(\cdot)$ en $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{X})$ la cual es dada por:*

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j)f(j). \tag{3}$$

La solución $u(\cdot)$ satisface $u \in l^{p'}(\mathbb{Z}, \mathbb{X})$ para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, y la siguiente estimación se cumple:

$$||u||_{l^{p'}(\mathbb{Z},\mathbb{X})} \leq ||s(\lambda, \cdot)||_1^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} ||s(\lambda, \cdot)||_\infty^{\frac{1}{p'}} ||f||_{l^p(\mathbb{Z},\mathbb{X})}. \tag{4}$$

En particular, si $p = \infty$, obtenemos

$$||u||_\infty \leq ||s(\lambda, \cdot)||_1 ||f||_\infty. \tag{5}$$

*e-mail: `mario.choquehuanca@ufrontera.cl`

Trabajo realizado en conjunto con:

Claudio Cuevas[1], Departamento de Matemáticas, Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
Filipe Dantas[2], Departamento de Matemáticas, Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
Herme Soto[3], Departamento de Matemáticas, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile.

Referencias

[1] Cuevas C., Henriquez H., Lizama C., *On the existence of almost automorphic solutions of Volterra difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, 2011.

[2] Ravi P. Agarwal, Cuevas C., Dantas F., *Almost automorphy profile of solutions for difference equations of Volterra type*, J. Appl. Math. Comput., Julio, 2012.

[3] Cuevas C., y Vidal C., *A note on discrete maximal regularity for functional difference equations with infinite delay*, Adv. Difference Equ., 2006, Art. 97614, 1-11.

[1]e-mail: `cch@dmat.ufpe.br`
[2]e-mail: `filipeddsmat@gmail.com`
[3]Parcialmente financiado por PAI-MEC GRANT 80112008, e-mail: `herme.soto@ufrontera.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Hölder continuous solutions for a fractional differential equations

Rodrigo Ponce*

Instituto de Matemática y Física

Universidad de Talca

Talca, Chile

Abstract

Using some results of Arendt, Batty and Bu [1], we study the existence and uniqueness of Hölder continuous solutions to equation

$$D^{\beta}u(t) = Au(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where A is a closed linear operator defined on a Banach space X, $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}; X)$, $0 < \alpha < 1$, and the fractional derivative for $\beta > 0$ is taken in the sense of Caputo. Existence of Hölder continuous solutions to fractional differential equations in the form of (1) have been studied for example, by Clement, Gripenberg and Londen using the method of the sum of Da Prato and Grisvard [2].

Applying our results in [4], we study the existence of Hölder continuous solutions to problem

$$\begin{cases} D^{\beta}u(t,x) = \Delta u(t,x) + f(t,x), & t \in \mathbb{R}, \\ \quad u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $0 < \beta < 1$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, introduced in physics by Nigmatullin [3] to describe diffusion in special types of porous media.

References

[1] W. Arendt, C. Batty, S. Bu: *Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity,* Studia Math., **160**, 23-51 (2004).

[2] Ph. Clément, G. Gripenberg, S. Londen, *Hölder regularity for a linear fractional evolution equation,* in Topics in nonlinear analysis, 69-82, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 35, Birkhäuser, Basel, 1999.

[3] R. Nigmatullin, *The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry,* Phys. Stat. Sol. B **133** (1986), 425-230.

[4] R. Ponce: *Hölder continuous solutions for fractional differential equations and maximal regularity*, Submitted.

*e-mail: `rponce@inst-mat.utalca.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Solving a Volterra equation in the space of Completely Bounded super-operators

Rolando Rebolledo*
Centro de Análisis Estocástico
Facultad de Ingeniería y Facultad de Matemáticas
Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile

Abstract

Given a C^*-algebra $\mathfrak{A}$, the space of completely bounded maps or super-operators $CB = CB(\mathfrak{A})$ is constructed as follows. Consider a linear map $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ and for each $n \times n$-matrix $[a_{ij}]$ of elements in $\mathfrak{A}$, define $\Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})]$, that is, the matrix with components $\Phi(a_{ij})$. The map Φ is called completely bounded if $\|\Phi\| = \sup_n \|\Phi_n\|_n < \infty$, where $\|\cdot\|_n$ is the norm on the C^*-algebra of all $n \times n$ matrices of elements of $\mathfrak{A}$. The space CB with the norm introduced before is a Banach space.

My talk will introduce completely positive kernels and a convolution product defining a Volterra type equation on the space CB. The main result construct the explicit solution to the above equation.

References

[1] Kossakowski, A.; Rebolledo, R.: On Completely Positive Non-Markovian Evolution of a d-level System, *Open Syst. Inf. Dyn.* **2008**, *15*(2), 135–141.

[2] Paulsen, V.: *Completely bounded maps and operator algebras*, Vol. 78 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics;* Cambridge University Press: Cambridge, 2002.

[3] Rebolledo, R.: *Complete positivity and the Markov structure of Open Quantum Systems*, in Open Quantum Systems II, Lecture Notes in Math. 1882, 149-182, 2006.

*e-mail: rrebolle@uc.cl

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN
ÁLGEBRA, ÁLGEBRAS DE LIE Y TEORÍA DE CONTROL

Coordinación: Julio Rodríguez -Cristian González
Departamento Matemáticas- Universidad de Valparaíso
Departamento Matemáticas- Universidad de La Serena

1 **Julio Rodríguez.** *Some aspectos of Singular Control Systems.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

2 **Iván Jirón.** *Locus for almost Riemannian Systems on Dimension 3.* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte. Antofagasta,Chile.

3 **Max Ferreira.** *Locus of almost Riemannian systems*. Departamento de Matemática, Universidad Federal do Amazonas. Manaus, Brasil

4 **F. Vera.** *Sistemas lineales de control en grupos de Lie*. Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte. Antofagasta,Chile

5 **Jorge Olivares Funes.** *Controlabilidad en la esfera tridimensional.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Antofagasta. Antofagasta,Chile.

6 **Ronald Manriquez Peñafiel.** *Saturado de Lie en cierta clase de sistemas de control.* Departamento de Matemícas. Universidad de Valparaíso. Valparaíso,Chile.

7 **Roberto Aravire.** *Quadratic forms of small dimensión.* Facultad de Ingeniería, Universidad Arturo Prat. Iquique, Chile.

8 **Cristian González Avilés.** *Propiedades básicas del funtor de Greenberg*. Departamento de Matemáticas. Universidad de La Serena. La Serena. Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Some aspects of Singular Control Systems

Julio Rodríguez*
Departamento de Matemática
Universidad de Vaparaíso
Valparaíso, Chile
En colaboración con:
Victor Ayala: Universidad Católica del Norte**
E. Kizil: Universidade de São Paulo-São Carlos-Brasil***
C. Wagner: Universidade Federal do Amazonas-Brasil****
I.A. Tribuzy: Universidade Federal do Amazonas-Brasil*****

Resumen

The singular control systems has been received special attention. Indeed, this type of systems represents a mathematical description of the dynamical behavior of many practical processes coming from sciences and engineering such as aircraft dynamics, chemical reactions, diffusions, economic flows, robotic and biology evolutions, etc. We discuss some aspect related to this class of control systems established by the authors in [1], [2]. See also [3].

Referencias

[1] Ayala V., J. C. Rodríguez, Tribuzy, I. A., and Wagner, C., *Solutions of a singular control system on a Lie group*, Journal of Dynamical and Control Systems, **18**(2012), 233–338.

[2] Ayala V. and Kliemann W., *A decomposition Theorem for Singular Control Systems on Lie Groups*, Computer & Mathematics with Applications, **45** (2003), 635–636.

[3] San Martin L.A.B., *Algebras de Lie*, UNICAMP, Brasil, 1999.

*Financiado por Fondecyt Nro. 1130538, e-mail: `julio.rodriguez@uv.cl`
**Financiado por Fondecyt Nro. 1100375, e-mail: `vayala@ucn.cl`
***e-mail: `kizil@icmc.usp.br`
****e-mail: `cwmn@hotmail.com`
*****e-mail: `itribuzy@gmail.com`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Locus of Almost Riemannian Systems on dimension 3

Iván Jirón[*]
Departamento de Matemáticas,
Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile, ijiron@ucn.cl

Abstract

Recent developments on Almost-Riemannian geometry are done in the framework of sub-Riemannian geometry, a geometry closely related to optimal control theory, (see [1],[2]). From [3], if F is a set of everywhere linearly independent full rank vector field on a manifold M, then they define a Riemannian metric on M, for which they are orthonormal. On the other hand, if the dimension generated by F on M is full rank except in a measure zero set Z (the singular locus), then the corresponding Riemannian metric has singularities. Under generic conditions the metric structure is still well defined. Metric structures that can be defined locally in this way are called almost-Riemannian structures. In this presentation we intend to compute several locus on Lie groups of dimensión 3. For that, we use the Bianchi classification of Lie algebras.

Joint work with:
Víctor Ayala[1]. Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile, vayala@ucn.cl.
Philippe Jouan, Laboratoire R. Salem, CNRS, UMR 6085, University of Rouen, Rouen, Francia, Philippe.Jouan@univ-rouen.fr.

Let G be a Lie group with Lie algebra g. In [4] the authors introduce the class of Linear Control Systems on Lie groups. In [5] the authors prove that this class of control systems is a truly example of almost Riemannian structure and prove

Let $X \in \partial g$ and $\Delta = Span\left\{Y^1, ..., Y^{n-1}\right\} \subset \mathfrak{g}$. If the 1-form defined by the left invariant distribution Δ is closed, then the locus Z is a Lie subgroup of G with Lie algebra $\ker(D^* w)$.

In this presentation we intend to compute several locus on Lie groups of dimensión 3. For that, we use the Bianchi classification of Lie algebras.

References

[1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*, Lecture Notes, http://people.sissa.it/agrachev/agrachev_files/notes.html

[2] A.A. Agrachev, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, M. Sigalotti, *Two-dimensional almost-Riemannian structures with tangency points*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 27 (3) (2010) 793–807.

[*]This research was partially supported by Proyecto D.G.I.P. no. 220202-10301284 VRIDT UCN.
[1]This research was partially supported by Proyecto FONDECYT no. 1100375.

[3] A. Agrachev, U. Boscain, M. Sigalotti, *A Gauss–Bonnet-like formula on two-dimensional almost-Riemannian manifolds*, Discrete Contin.Dyn. Syst. 20 (4) (2008) 801–822.

[4] V. Ayala, J. Tirao, *Linear Control Systems on Lie Groups and Controllability*. American Mathematical Society, Series: Symposia in Pure Mathematics, Vol. 64, pp. 47-64, 1999.

[5] V. Ayala, P. Jouan and M . Ferreira, *Linear control systems on Lie groups as a model for almost Riemannian structures.* Preprint, 2013.

[6] L. Bianchi, *Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*. Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. 11, 267 (1898)

[7] V. V. Grusin, *A certain class of hypoelliptic operators* (Russian), Mat. Sb. (N.S.), 83 (125) 1970, pp. 456– 473. English translation: Math. USSR-Sb., 12 (1970), pp. 458-476.

[8] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko , *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers John Wiley and Sons, Inc, New York-London, 1962.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

Locus of Almost Riemannian Systems

Max Ferreira*
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Amazonas
Manaus, Brasil

Abstract

Almost Riemannian Structure (ARS). Almost-Riemannian geometry goes back to some works on "generalized Riemannian geometry" (see for instance [6]). Recent developments on this new notion are done in the framework of sub-Riemannian geometry, a geometry closely related to optimal control theory, (see [1],[2],[3],[4],[5],[6] and [7] for an introduction). Next we follow [4]. If F is a family of everywhere linearly independent full rank vector field on a manifold M, then they define a classical Riemannian metric on M, the metric for which they are orthonormal. On the other hand, if the dimension generated by F on M is full rank except in a measure zero set Z (the singular locus), then the corresponding Riemannian metric has singularities. Under generic conditions the metric structure is still well defined. Metric structures that can be defined locally in this way are called almost-Riemannian structures, (ARS).
In [1] the authors introduce the notion of a linear control system on a connectd Lie group G, which is defined by a pair $\Sigma = (G, D)$ where the dynamic D is given by the family of differential equations

$$\dot{x} \ = X(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j \ Y^j(x), \ x \in G.$$

Here, like in the classic linear systems on Euclidean spaces, the drift vector field X is an element of the normalizer $n = \{Z \in \mathrm{Vect}^{\infty}(G) : [Z, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$ of g in the set $Vect^{\infty}(G)$ of smooth vector fields on G. The control vectors Y^j, $j = 1, 2, \ldots, m$, all belong to the Lie algebra g. The input functions $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ are members of the class U of unrestricted admissible piecewise constant functions $u : [0, T(u)] \to R^m$ where $T(u) > 0$ means the terminal time of u. If $u \in U$ is constant then the associated dynamic of Σ is given by the pair (Y^u, X) where $Y^u = \sum_{j=1}^{m} u_j Y^j \in g$. In [1] the authors prove that the normalizer n of g is isomorphic to the semidirect product $g \otimes_s aut(G)$ where $aut(G)$ is the Lie algebra of $Aut(G)$, the Lie group of G-automorphisms.

We observe that, for instance, a set of $n-1$ independent invariant vector fields Y^j together with a linear one defines generically and very naturally an ARS on a n-dimensional Lie group. We call this particular class of control systems as Almost Riemannian Systems. For example, the most genuine ARS is with no doubt the Grushin metric in the plane, originally introduced in the context of hypoelliptic operator theory ([10]). We recall that the framework of the Grushin plane is exactly given by the dynamic of a well known linear control systems on R^2 : the time optimal train example in the famous Pontryagin book, [11]. Now, the singular locus is the set of points where the rank of the distribution fails to be full. In the abelian case of linear structures it is easy to see that this set is a vector subspace (it is for instance the case of the Grushin

*Partially supported by CNPq, e-mail: `mxfrrster@gmail.com`

metric). In the case of a linear structure on a Lie group one could expect this set to be a Lie subgroup. Unfortunately, we already know this statement is not true as shown by a counter-example on the simply connected Heisenberg Lie group of dimensión 3. However, the singular set is a subgroup in many cases. In fact, the authors show the following results

Theorem Let $X \in \partial g$ and $\Delta = Span\left\{Y^1, ..., Y^{n-1}\right\} \subset g$. If the 1-form ϖdefined by the left invariant distribution Δ is closed, then the locus Z is a Lie subgroup of G with Lie algebra $\ker(D^*\varpi)$.

Joint work with:
Víctor Ayala[1], Departemento de Matemáticas, Universidade Católica del Norte, Antofagasta, Chile.
Phillipe Jouan[2], Laboratoire R. Salem, University of Rouen, Rouen, France.

References

[1] V. Ayala, J. Tirao. Linear Control Systems on Lie Groups and Controllability. American Mathematical Society, Series: Symposia in Pure Mathematics, Vol. 64, pp. 47-64, 1999.

[2] V. Ayala, W. Kliemann and F. Vera, Isochronous sets of invariant control systems, Systems and Control Letters, 60, (2011), 937-942.

[3] V. Ayala and I. Jirón, Linear flows and Morse graphs. Consequences on topological equivalence on low dimension. Linear Algebra and Applications. In press 2013.

[4] V. Ayala, J. Rodriguez and L. San Martin, Optimality on homogeneous space. An the angle system associated with a bilinear control system. SIAM J. on Control and Optimization, Vol. 29, pp. 1515-1528, 2009.

[5] C. Robinson, Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. CRC Press Inc., 1995.

[6] T. Takasu, Generalized Riemannian geometry - The journal, 1957 - kamome.lib.ynu.ac.jp

[7] V. Ayala, F. Colonius and W. Kliemann. Dynamical characterization of the Lyapunov form of matrices. Linear Algebra and its Applications. N^o 402, pp. 272-290, 2005.

[8] A.A. Agrachev, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, M. Sigalotti, Two-dimensional almost-Riemannian structures with tangency points, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 27 (3) (2010) 793–807.

[9] A. Agrachev, U. Boscain, M. Sigalotti, A Gauss–Bonnet-like formula on two-dimensional almost-Riemannian manifolds, Discrete Contin.Dyn. Syst. 20 (4) (2008) 801–822.

[10] V. V. Grusin, A certain class of hypoelliptic operators (Russian), Mat. Sb. (N.S.), 83 (125) 1970, pp. 456– 473. English translation: Math. USSR-Sb., 12 (1970), pp. 458-476.

[11] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience Publishers John Wiley and Sons, Inc, New York-London, 1962.

[1]Partially supported by Proyecto Fondecyt N^0 1100375, e-mail: `vayala@ucn.cl`
[2]Partially supported by Laboratoire R. Salem, CNRS, UMR 6085, e-mail: `Philippe.Jouan@univ-rouen.fr`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Sistemas Lineales de control en grupos de Lie

Fernando Vera*
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta-Chile

Resumen

Un sistema de control sobre un grupo de Lie conexo G, de la forma:

$$\Sigma_U : \dot{x} = X(x) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y^j(x)$$

$x(t) \in G$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)) \in U$ con $U \subset R^k$, se dice lineal, si el campo drift X es lineal, esto es si el flujo de X es un grupo a 1-parámetro de difeomorfismos, y los Y_j son campos derecho invariantes.

Los sistemas lineales de control en grupos de Lie, aparecen en 1999, ver [1]. Ellos han resultado ser modelos de una amplia clase de sistemas de control gracias al Teorema de Equivalencia [2]. En esta presentación, mostramos algunas de sus propiedades mas importantes.

.

Referencias

[1] V. Ayala and J. Tirao, *Linear control systems on Lie groups and Controllability*, Procedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol 64, AMS, 1999, 47-64.

[2] Ph. Jouan, *Equivalence of Control Systems with Linear Systems on Lie Groups and Homogenesu Spaces*, ESIAM: Calculus of Variations, 16, 2010, 956-973.

*e-mail: fvera@ucn.cl

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Controlabilidad en la esfera tridimensional

Jorge Olivares Funes*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Antofagasta
Antofagasta, Chile

Resumen

Consideremos el Sistema Bilineal de Control tridimensional

$$\dot{x}(t) = (X + uY)x(t),$$

donde $X, Y \in sl(3)$ y $u \in \mathbb{R}$.

Por medio de la caracterización geométricade la controlabilidad en $\mathbb{R}^d$ dado en [2], mostraremos cuales son los valores que toma u para que el sistema sea controlable en la esfera, con la ayuda de tecnicas computacionales.

Referencias

[1] V. Ayala, L. A. B. San Martin, *Controllability of two-dimensional bilinear systems: restricted controls and discrete-time*, Proyecciones ,18, (1994), pag. 207-223.

[2] V. Ayala, E. Cruz and W. Kliemann, *Controllability of Bilinear Control Systems on the Projective Space*, Subject classification: 93B05, 93B29, 20M20

[3] C. J. Braga Barros, J. Ribeiro Gonvalves and L. A. B. San Martin, *Controllability of two-dimensional bilinear systems*, Proyecciones ,15, (1996), pag. 111-139.

[4] F. colonius and W. Kliemann, *The Dynamics of Control*, Birkhauser, 2000.

[5] L. A. B. San Martin, *On global controllability of discrete-time control systems*, Math. Control, Signals and Systems, 8 (1995), 279-297.

[6] L. A. B. San Martin, *On global controllability of discrete-time control systems*, Math. Control, Signals and Systems, 8 (1995), 279-297.

*Parcialmente financiado por Universidad de Antofagasta, e-mail: `jorge.olivares@uantof.cl`

Saturado de Lie en cierta clase de sistemas de Control

Ronald Manríquez Peñafiel*
Prof. Departamento de Matemática
Universidad de Playa Ancha
Valparaíso, Chile
Est. Mag. Departamento de Matemáticas
Universidad de Vaparaíso
Valparaíso, Chile

Resumen

En éste trabajo discutiremos el problema de controlabilidad de una cierta clase de sistemas de control sobre grupos de Lie semi–simples, empleando las técnicas de Saturado de lie, y la geometría asociada. Asimismo, se muestran algunas relaciones con las condiciones algebraicas establecidas por los autores en [1].

Referencias

[1] Ayala V., San Martin L.A.B, *Controllability of two–dimensional bilinear system: restricted controls, discrete–time*, J. Proyecciones, 18, 1994, 207-223.

[2] Sachkov Y.L., *Control Theory on Lie groups*, SISSA, 2006.

[3] San Martin L.A.B., *Algebras de Lie*, UNICAMP, Brasil, 1999.

*Parcialmente financiado por Fondecyt Nro. 1130538, e-mail: `ronald.manriquez@postgrado.uv.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 02 2013, La Serena, Chile

Quadratic forms of small dimension

Roberto Aravire F.*
Facultad de Ingeniería
Universidad Arturo Prat
Iquique, Chile

Abstract

Let F be a field of characteristic 2. For a quadratic form ϕ over F, let $F(\phi)$ denote the function field of the projective quadric given by ϕ. If B is a bilinear form over F, we denote by $F(B)$ the function field of the projective quadric given by the diagonal quadratic form associated to B. For any field extension K/F, there exists two homomorphisms $i_K : W_q(F) \longrightarrow W_q(K)$ and $j_K : W(F) \longrightarrow W(K)$ induced by the inclusion $F \subset K$. A natural problem in the algebraic theory of quadratic (bilinear) forms consists in computing the kernels of i_K and j_K, i.e., classifying quadratic forms over F which become hyperbolic over K (*resp.* bilinear forms over F which become metabolic over K). In general, for an arbitrary field extension K, it is difficult to compute the kernels of i_K and j_K. The case of an extension given by the function field of a quadric generates a lot of interest, and many results are proven in this case, but we are far from a complete computation of the kernel of $i_{F(\phi)}$ for an arbitrary quadratic (bilinear) form ϕ.

In this talk, we consider the kernel for graded Witt groups, namely the kernel of the homomorphism $f_K^n : I_q^n F/I_q^{n+1}F \longrightarrow I_q^n F(\phi)/I_q^{n+1}F(\phi)$, where $I_q^n F = I^n F \cdot W_q(F)$ and $I^n F$ is the nth power of the fundamental ideal IF of $W(F)$, for ϕ a quadratic form of small dimension. So the first open case to treat is when ϕ is a nonsingular quadratic form of dimension 4 and nontrivial Arf invariant, namely, $\phi = [1, a] \perp b[1, c]$ such that $a + c \notin \wp(F) := \{x^2 - x \mid x \in F\}$.

*Financiado parcialmente por Proyecto Fondecyt Nro. 1130796, e-mail: raravire@unap.cl

References

[A-B] R. Aravire, R. Baeza, *The behavior of quadratic and differential forms under function field extensions in characteristic two,* J. Algebra **259** (2003), 361–414.

[A-J] R. Aravire, B. Jacob, $H^1(X,\nu)$ *of conics and Witt kernels in characteristic* 2, Contemp. Math. **493** (2009), 1–19.

[H-L] D. Hoffmann, A. Laghribi, *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic* 2, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4019–4053.

[L] A. Laghribi, *Witt kernels of function field extensions in characteristic* 2. J. Pure Appl. Algebra **199** (2005), 167-182.

1

Propiedades básicas del funtor de Greenberg

Cristian D.González-Avilés
Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
La Serena, Chile

Resumen

A principios de la década de 1960, Marvin Greenberg descubrió la existencia de un functor que asocia a toda variedad algebraica definida sobre un anillo de valuación discreta completo R otra variedad definida sobre el cuerpo residual de R (si este es perfecto). Este trabajo fue publicado durante una etapa de transición en la geometría algebraica y usa tanto el lenguaje (ahora obsoleto) de André Weil como el nuevo lenguaje (incipiente en aquella época) de Alexander Grothendieck. Esto último ha causado la confusión de varios investigadores en geometría algebraica, a tal punto que en la literatura actual existen enunciados erróneos sobre lo que realmente demostró Greenberg. La presente comunicación versa sobre la colaboración del expositor con Alessandra Bertapelle, de la Universidad de Padua, para clarificar y extender la construcción de Greenberg. Hemos dado un tratamiento moderno sobre el funtor de Greenberg, usando exclusivamente el lenguaje de Grothendieck, y obtenido una variedad de resultados básicos nuevos. Por ejemplo, hemos dilucidado el comportamiento del funtor de Greenberg con respecto a la restricción de Weil y construído una extensión del mismo a una cierta categoría de esquemas formales. Nuestro trabajo, además, establece resultados básicos (nuevos) sobre los límites proyectivos de esquemas e incluye una exposición detallada del funtor de perfección (previamente inexistente en la literatura).

Trabajo realizado en conjunto con:

Alessandra Bertapelle[1],
Departamento de Matemáticas, Universidad de Padua, Padua, Italia.

Referencias

[1] Greenberg, M. J.: Schemata over local rings. Ann. of Math. (2) 73 (1961) 624–648.

[2] Greenberg, M. J.: Schemata over local rings: II. Ann.of Math. (2) 78 (1963) 256–266.

[*] Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt 1120003, e-mail: cgonzalez@userena.cl
[1] e-mail: bertapel@math.unipd.it

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN
TEORÍA DE GRAFOS Y MATRICES

Coordinación: Luis Medina
Departamento de Matemáticas
Universidad de Antofagasta
Antofagasta, Chile

1 **Juan Carlos Egaña** *Algunas Reconstrucciones de Matrices Simétricas Tridiagonales-Flechas*. Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

2 **Raúl Jiménez Alarcón** *Problema Inverso de autovalor para matriz de Jacobi y un problema de identificación.* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

3 **Eber Lenes** *Maximizando el índice Laplaciano sin signo en términos de conectividad*. Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

4 **Luis Medina** *The spectra of the line graph of a weighted generalized Bethe tree*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta, Chile.

5 **Eduardo Montenegro Valenzuela** *Linear Representation of a Graph.* Department of Mathematics and Statistic, University of Playa Ancha, Valparaíso, Chile.

6 **Jonnathan Rodríguez** *Nuevas demostraciones en la obtención de grafos uniciclos con spread Laplaciano maximal.* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

7 **Oscar Rojo** *El mayor índice en una clase de caterpillars*.Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

El mayor índice en una clase de caterpillars

Oscar Rojo*
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

Resumen

Sea $\mathcal{C}_{n,d}$ la clase de caterpillars de orden n y diámetro d obtenidos de las estrellas

$$K_{1,p_1}, K_{1,p_2}, ..., K_{1,p_{d-1}},$$

con $p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, ..., p_{d-1} \geq 1$, y el camino P_{d-1} identificando la raíz de K_{1,p_i} con el $i-$ésimo vértice de P_{d-1}. Sea $\mathcal{A}_{n,d}$ la subclase de caterpillars A_k en $\mathcal{C}_{n,d}$ tal que $p_i = 1$ para $i \neq k$ and $p_k = n - 2d + 3$. Probamos que entre los caterpillars en $\mathcal{C}_{n,d}$ el mayor índice o radio espectral es alcanzado por un caterpillar en la subclase $\mathcal{A}_{n,d}$. Después ordenamos los caterpillars en $\mathcal{A}_{n,d}$ usando este invariante espectral, concluyendo que entre los caterpillars en $\mathcal{C}_{n,d}$ el mayor índice es alcanzado por by $A_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$.

Trabajo realizado en conjunto con:
Nair M. M. de Abreu[1], Production Engineering Program, PEP/COPPE, Universidade Federal do Rio do Janeiro, Rio de Janeiro , Brazil.
Eber Lenes[2], Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.

Referencias

[1] R. Grone, R. Merris, V.S. Sunder, The Laplacian spectrum of a graph, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (2) (1990) 218–238.

[2] J.- M. Guo, The effect on the Laplacian spectral radius of a graph by adding or grafting edges, Linear Algebra Appl. 413 (2006) 59–71.

[3] O. Rojo, L. Medina, Spectra of generalized Bethe trees attached to a path, Linear Algebra and its Applications 430 (2009) 483-503.

*Financiado por Proyecto Fondecyt Regular 1130135, Chile, e-mail: orojo@ucn.cl
[1] Grant 305372/2009-2, CNPq, Brazil, e-mail: nairabreunovoa@gmail.com
[2] Financiado por Proyecto Mecesup UCN 0711 y Proyecto Fondecyt Regular 1130135, Chile, e-mail: elenes@ucn.cl

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

July 31, August 04 2013, La Serena, Chile

Nuevas demostraciones en la obtención de grafos uniciclos con spread Laplaciano maximal.

Jonnathan Rodríguez*

Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile.

Abstract

El spread Laplaciano de un grafo es la diferencia entre el mayor autovalor Laplaciano y la conectividad algebraica.(el segundo menor autovalor Laplaciano). En:"The Laplacian spread of unicyclic graph by Yan - Hong Bao, Ying - Ying Tan, Yi - Zheng Fan", los autores obtienen los grafos uniciclos con spread Laplaciano maximal entre todos los grafos uniciclos conectados de orden determinado, el presente trabajo revisa el anterior, presentando nuevas demostraciones.

References

[1] Yan-Hong Bao, Ying-Ying Tan, Yi-Zheng Fan, *The Laplacian spread of unicyclic graphs*, Applied Mathematics Letters 22 (2009) 1011-1015.

*e-mail: `jonnathanrodriguez97@gmail.com`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31,August 04 2013, La Serena, Chile

LINEAR REPRESENTATION OF A GRAPH

Eduardo Montenegro Valenzuela [*]
Department of Mathematics and Statistic
University of Playa Ancha
Valparaíso, Chile

Linear representation of a graph

Abstract

In this work it will be proven that all graph admits at least one lineal representation. Let $S_n = f : \{\{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} / f$ is bijective$\}$ be, $n \in \mathbb{Z}^+$, the permutation set . We know that S_n form a group with the composition. Consider $\rho \in S_n$.Then we say that $M \in GL(n, \mathbb{R}), M = \left[\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{C}_1 & . & . & . & \mathrm{C}_i & . & . & . & \mathrm{C}_p \end{array}\right]$, where $C_i = [a_{ij}]$ is the i-th column of M, is the matrix of the permutation ρ, if and only if,$\forall i, i = 1, ..., p, C_i = e^t_{\rho(i)}$.. The matrix of the permutation ρ is noted by M_ρ. From the above it has to $M_\rho = \left[\delta_{j\rho(i)}\right]$. If $H \leq S_p$,then $M(H) = \{M_\rho / \rho \in H\}$ will be called the *linear group* of H. We say that $M(H)$ is a *linear representation* of a graph G of order p if, and only if, $M(H) \cong Aut(G)$ ($\cong$ denotes isomorphism of groups). Framed in the area of the Theory of the Graphs, in the present written it will be used, preferentially, simple and finite graphs.

Joint work with:
Eduardo Cabrera de Arrizabalaga[1], Department of Mathematics and Statistic, University of Playa Ancha, Valparaíso, Chile.
José Alejandro González Campos[2], Department of Mathematics and Statistic, University of Playa Ancha, Valparaíso, Chile. Departament of Statistic,University of estadual de Campinas, Sao Paulo, Brasil.

References

[1] A.Cayley, *The theory of groups, graphical representation.*, American Journal of Mathematics, v.1, 174 - 176. 1876

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software Pacific Grove, C.A., 1996.

[3] G. Godsil, *Graphs, Groups and Polytopes*, Combinatorial Mathematics, v.6. 1977.

[4] F. Harary, *A characterization of block graphs*, Canad. Math. Bull. 6. 01-06. 1963.

[*] Partially supported by University of Playa Ancha, e-mail: `emontene@upla.cl`
[1] Partially supported by University of Playa Ancha, e-mail: `ecabrera@upla.cl`
[2] Partially supported by CAPES and University Estadual de Campinas, e-mail: `jgonzalez@upla.cl`

[5] E.Montenegro, *A result on the order and size of graphs that represent a finite group*, Extracta Mathematicae.v.1. 14-16. 1987.

[6] E. Montenegro, Power D., Ruiz S., Salazar R, *Spectra of related graphs and Self Reproducing Polyhedra*, Proyecciones, v.11, 01-09. 1992.

[7] E. Montenegro, *Graph with given Automorphism Group and given Nuclear Number*, Proyecciones, v.11, 21-28. 1992.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
July 31, August 04 2013, La Serena, Chile

The spectra of the line graph of a weighted generalized Bethe tree

Luis Medina*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Antofagasta
Antofagasta, Chile.

Abstract

The line graph $l(\mathcal{G})$ of a graph $\mathcal{G}$ is the graph whose vertex set is in one-to-one correspondence with the set of edges of $\mathcal{G}$, where two vertices of $l(\mathcal{G})$ are adjacent if and only if the corresponding edges in $\mathcal{G}$ have a vertex in common [1]. Furthermore, for a weighted graph, the weight assigned to an edge of the line graph $l(\mathcal{G})$ is the sum of the weights of the respective edges of $\mathcal{G}$ that generate it.

In a graph, any vertex can be chosen as the root vertex. For a rooted graph the level of a vertex is one more than its distance from the root vertex. A weighted generalized Bethe tree is a rooted tree in which vertices at the same level have the same degree and edges joining vertices at consecutive levels have the same weight.

The aim of this work is to show the spectra of the line graph of a weighted generalized Bethe tree. To obtain this, we use the results presented in [2].

References

[1] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1969.

[2] O. Rojo, L. Medina, *Spectral caracterization of some weighted rooted graphs with cliques*, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1388-1409.

*e-mail: `luis.medina@uantof.cl`

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Maximizando el índice Laplaciano sin signo en términos de conectividad

Eber Lenes*
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

Resumen

Sea G un grafo simple no dirigido de n vértices. Sea $K(p,q)$ $(p \geq q \geq 0)$ el grafo obtenido del grafo completo K_p y un nuevo vértice junto con los lados uniendo este vértice con q vértices de K_p. Probamos que el grafo $K(n-1,r)$ tiene el mayor índice Laplaciano sin signo entre todos los grafos con una conectividad de vértices (respectivamente, de lados) menor o igual a r. Nuestras técnicas de demostración no requieren de largos cómputos.

Trabajo realizado en conjunto con:
Oscar Rojo[1], Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte, Chile.

Referencias

[1] M-L Ye, Y-Z Fan, H-F Wang, Maximizing signless Laplacian or adjacency spectral radius of graphs subject to fixed connectivity, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1180-1186.

[2] O. Rojo, E. Lenes, A sharp upper bound on the incidence energy in terms of connectivity, Linear Algebra Appl. 438 (2013) 1485-1493.

*Financiado por Proyecto Mecesup UCN 0711 y Proyecto Fondecyt Regular 1130135, Chile, e-mail: elenes@ucn.cl
[1] Proyecto Fondecyt Regular 1130135, Chile, e-mail: orojo@ucn.cl

Problema Inverso de autovalor para matriz de Jacobi y un problema de identificación.

Raúl Jiménez Alarcón*

Departamento de Matemáticas

Universidad Católica del Norte

Antofagasta, Chile

Resumen

El problema inverso de autovalor para matrices de Jacobi tiene una interesante aplicación en los problemas inversos de vibración. En particular, en los problemas inversos para sistemas dinámicos discretos, en donde la modelización de estructuras simples ya genera problemas inversos complejos de resolver. Un problema inverso importante de abordar es el problema de identificación en donde algunos parámetros discretos son dinámicos y se requiere de una revisión en el tiempo. En este trabajo se muestra como un problema de identificación permite, a través de un problema inverso de autovalor, detectar cambio físicos en una estructura.

Referencias

[1] G. M. L. GLADWELL "The reconstruction of a tridiagonal system from its frequency response at an interior point", Inverse Problems 4(1988)PP1013-1024.

[2] R. JIMENEZ "On Detection of Stuctural Failure Using an Inverse Technique on Vibration", Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their applications in Engineering Sciences, Iconne 2000. V5, pp 11-22.

[3] R. JIMENEZ et als. "An Inverse Eigenvalue Procedure for Damage Detection in Rod", Computer and Mathematics with Application, V47,4-5 PP 643-657, 2004

[4] M. CHU and G. GOLUB "Inverse Eigenvalue Problems", Theory, Algorithms ans Applications, Numerical Mathematics ans Scientific Computation, Oxford Science Publications. 2005.

[5] R. JIMENEZ et als. "A Reconstrucction of a SpetiallyStructurated Jacobi Matrix and Applications to Damage Detection in Rod" Computer and Mathematics with Application, V49,11-12 PP1815-1823, 2005.

[6] R. JIMENEZ "The reconstruction of a periodic structure from its dynamical behaviour"(2011) ,Proyecciones Journal of Mathematics, V30, N°1, pp 91-109

*Parcialmente financiado por VRIDT-UCN

e-mail: rjimen@ucn.cl

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 04 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Algunas Reconstrucciones de Matrices Simétricas Tridiagonales-Flechas

Juan Carlos Egaña*
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

Resumen

En este trabajo presentamos algunos resultados acerca de la reconstrucción de una matriz tridiagonal-flecha A a partir de información espectral dada. En particular, se muestran condiciones necesarias y suficientes para reconstruir la matriz A a partir de sus autovalores extremales (mínimo y máximo), de dos autopares, y de un autopar y un autovalor de cada submatriz principal líder de A. Se dan algoritmos y ejemplos que ilustran los resultados.

Referencias

[1] Pickmann H., Soto R.L., Egaña J.C., Salas M., *An inverse problem for symmetric tridiagonal matrices*, Computer and Mathematics with Applications, 2007, 54, 699-708.

[2] Pickmann H., Egaña J.C., Soto R.L., *Extremal inverse eigenvalue problem for bordered diagonal matrices*, Linear Algebra Appl., 2007, 427, 256-271.

[3] Pickmann H., Egaña J.C., and Ricardo Soto, *Extreme spectra realization by real symmetric tridiagonal and real symmetric arrow matrices*, Elec. Journal of Linear Algebra, 2011, Vol 22, 780-795.

[4] Pickmann H., Egaña J.C. and Ricardo Soto, *Two inverse eigenproblems for symmetric doubly arrow matrices*, Elec. Journal of Linear Algebra, 2011, Vol 18, pp. 700-718.

[5] Z. Li, C. Bu and H. Wang, *Inverse Eigenvalue Problem for Generalized Arrow-Like Matrices*, Applied Mathematics, 2011, 2, 1443-1445.

[6] W. Xu, Y. Lei, X. Gu and P. Yang, *The Inverse Eigenvalue Problems for Symmetric Tridiagonal Plus Paw Form Matrices*, Preprint, 2013.

*Parcialmente financiado por Proyecto Interno VRIDT-UCN, e-mail: `jegana@ucn.cl`

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN SISTEMAS DINÁMICOS

Coordinación: Bernardo San Martín
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

1 **Álvaro Castañeda** *Algunos Resultados sobre Estabilidad Global* Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile. Santiago, Chile

2 **Luis F. Del Campo Conejeros** *Ecuaciones en Diferencia y Dicotomías para su análisis* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte. Antofagasta, Chile

3 **Bernardo San Martín** C^1 *robust transitivity of the geometric Lorenz attractor* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte. Antofagasta, Chile.

4 **Richard Urzúa Luz** *Acciones afines libres de* $\mathbb{Z}^p$ *sobre toros* Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del Norte. Antofagasta, Chile.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Algunos Resultados sobre Estabilidad Global

Álvaro Castañeda*
Departamento de Matemáticas
Universidad de Chile
Santiago, Chile

Resumen

Daremos algunos resultados acerca de la Conjetura de Markus-Yamabe en dimensión 3. Además, explicaremos como modificar el contraejemplo de Bernat–Llibre para obtener un campo vectorial acotado en dimensión 4 el cual satisface las hipótesis de Markus–Yamabe y tiene una órbita periódica.

Trabajo realizado en conjunto con: **Víctor Guíñez, USACH.**

Referencias

[1] J. Bernat, J. Llibre, *Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe Conjectures in dimension* 4, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems **1** (1996).

[2] M. Chamberland, A. van den Essen, *Nilpotent Jacobians in dimension three*, Journal of Pure and Applied Algebra **205** (2006) 146–155.

[3] A. Cima, A. van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers and F. Mañosas, *A Polynomial Counterexample to the Markus–Yamabe Conjecture*, Advances in Mathematics **131** (1997) 453–457.

[4] A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas, *A Polynomial Class of Markus–Yamabe Counterexamples*, Publicacions Matemàtiques **41** (1997), 85–100.

*Parcialmente financiado por Fondecyt 11121122 y U-Inicia 11/12-03, e-mail: castaneda@uchile.cl

[5] A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas, *The discrete Markus–Yamabe problem*, Nonlinear Anal. **35** (1999), 343–354.

[6] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics, vol. 190, Birkhauser, Basel, 2000.

[7] L. Markus, H. Yamabe, *Global Stability Criteria for Differential Systems*, Osaka Math. J. **12** (1960), 305–317.

XXII COMCA
Congreso de Matem'atica Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Ecuaciones en Diferencia y Dicotomías para su análisis

Luis F. Del Campo Conejeros*
Departamento de Matemáticas
Universidad Catĺica del Norte
Antofagasta, Chile

Resumen

En este trabajo se presenta el uso de algunas dicotomás en el estudio de las ecuaciones en diferencia. Combinando resultados como teoremas de punto fijo con determinadas dicotomías se obtienen resultados sobre existencia y comportamiento de soluciones. Particularmente interesante resulta el uso de dicotomía ordinaria, exponencial, sumable y (k1,k2)-dicotomía, junto a teoremas como los de Krasnoselsky y de Schauder.

Este trabajo está inspirado, principalmente, en los diversos estudios realizado junto a los académicos:
Manuel Pinto Jiménez[1], Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
Claudio Vidal Díaz[2], Departamento de Matemáticas, Universidad del Bio Bio, Concepción, Chile.

Referencias

[1] C. Cuevas and L. Del Campo, *An asymptotic theory for retarded functional difference equations*, Comput. Math. Appl., 49(2005), 841-855.

*Parcialmente financiado por UCN, e-mail: `lcampo@ucn.cl`
[1] Parcialmente financiado por U. de Ch., e-mail: `pintoj@uchile.cl`
[2] Parcialmente financiado por UBB, e-mail: `clvidal@ubiobio.cl`

[2] C. Cuevas and L. Del Campo, *Asymptotic expantion for difference equations with infinite delay*, Asian-Eur. J. Math., 2(1)(2009), 19-40.

[3] L. Del Campo, M. Pinto and C. Vidal, *Almost and asymptotically almost periodic solutions of abstract retarded functional difference equations in phase space*, J. Difference Eqs. Appl., 6(2011), 915-934.

[4] L. Del Campo, M. Pinto and C. Vidal, *Bounded and periodic solutions in retarded difference equations using summable dichotomies*, Dinamical Systems and Applications, 21(2012), 1-15.

C^1 robust transitivity of the geometric Lorenz attractor

Bernardo San Martín
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile.

Resumen

Numerical experiments performed by Lorenz [5] around the mid-sixties suggested that the polynomial vector field defined in $\mathbb{R}^3$ given by

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -\alpha x + \alpha y \\ \dot{y} & = & \beta x - y - xz \\ \dot{z} & = & -\gamma z + xy. \end{array}\right.$$

presents a strange attractor for some real parameters close to $\alpha = 10$, $\beta = 28$ and $\gamma = \frac{8}{3}$; a set which trap the positive orbit of all points in a full neighborhood of it. It is not structural stable and not hyperbolic, but exhibit an important phenomenon:*robust accumulation of singularities by regular orbits of the flow.*

In view of the not existence of an explicit solution for the above Lorenz system, it was achieved the introduction of the geometric model, independently by Guckenheimer, Williams [4] and Afraimovich, Bykov, Shilnikov,[1], actually known as the *geometric Lorenz attractor*. Essentially, to prove different dynamical properties of the geometric Lorenz attractor we suppose that the vector field X associated to the geometric Lorenz attractor has a expansive one-dimensional quotient map (induced by a contracting invariant foliation associated to your return Poincaré map), such one-dimensional map persist expansive for every vector field C^k close to X (such number k is because the assumption of the uniformly linearizing coordinates around the singularity associated to the vector field X). Therefore, the geometric Lorenz attractor is C^k-robust, see [2]. Then, the assumption of uniformly linearizing coordinates around the singularity of the vector file X is the principal obstruction for obtain the C^1-robust transitive of the geometric Lorenz attractor.

Then motivated by the obstruction that generate the assumption of uniformly linearizing coordinates around a singularity we present a proof for this result which has become in a folklore result knows only by specialists in the area.

Referencias

[1] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, and L. P. Shilnikov, *On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type* Trudy Moskov. Mat. Obshch. **44** (1982), 150–212 (Russian).

[2] V. Araújo and M.J. Pacifico, Three dimensional flows Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 53. *Springer, Heidelberg*, 2010.

[3] S. Bautista, *The geometric Lorenz attractor is a homoclinic class* Bol. Mat. (N.S.), **11**, no 1, (2004), 69–78.

[4] J. Guckenheimer and R. F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors.* Inst. Hautes Â´Etudes Sci. Publ. Math., (1979), no. 50, 59–72.

[5] E.N. Lorenz. *Deterministic non-periodic flow.* J. Atmos. Sci. **20**, (1963), 130–141.

[6] C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals, *Robust Transitive Singular Sets for 3-Flows Are Partially Hyperbolic Attractors or Repellers.* The Ann. of Math., **160** (2004), 275–432.

XXII COMCA
Congreso de Matemática Capricornio
31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

Acciones afines libres de $\mathbb{Z}^p$ sobre toros

Richard Urzúa Luz*
Departamento de Matemáticas
Universidad Católica del Norte
Antofagasta, Chile

Resumen

Mostraremos que toda acción A de $\mathbb{Z}^p$ sobre $\mathbb{Z}^q$ que actúa por automorfismos de $\mathbb{Z}^q$ con conjunto de puntos fijos $\mathrm{Fix}(A) \neq 0$ induce una acción unipotente máxima de $\mathbb{Z}^p$ sobre $\mathbb{Z}^{q'}$, $1 \leq q' \leq q$ que determina si la acción A es la parte lineal de una acción afín libre de $\mathbb{Z}^p$ sobre el toro T^q. En general , no es cierto que toda acción unipotente U de $\mathbb{Z}^p$ sobre $\mathbb{Z}^q$ es la parte lineal de una acción afín de $\mathbb{Z}^p$ sobre el toro T^q, pero si la dimensión de $\mathrm{Fix}(U)$ es menor que $q/2$ entonces U tiene esta propiedad. Finalmente, mostramos que en dimensión baja, la condición $\mathrm{Fix}(A) \neq 0$ garantiza la existencia de una acción afín libre $\mathbb{Z}^p$ sobre el toro T^q, cuya parte lineal es precisamente la acción A.

Referencias

[1] F.J. Hahn. *On affine transformations of compact abelian groups.* America J. of Math., 85 (1963), 428-446.

[2] M Hirsch. *Flat manifolds and cohomology of group*. Algebraic and Geometric Topology(Lecture Notes in Mathematics, 664). Springer, berlin, 1977, pp. 94-103.

[3] S. Hurder. *Affine Anososv actions.* Michigan Math. J. 40 (1993), 561-575.

[4] M. Newman *Integral matrices.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 45. Academic Press, New York-London, 1972. xvii+224 pp.

*Parcialmente financiado por fondecyt 1100832, e-mail: `rurzua@ucn.cl`

[5] N. dos Santos. *Cohomologically rigid $\mathbb{Z}^p$-actions on low-dimension tori.* Ergodic Theory and Dynamical Systems. (2004), 24:1041-1050

[6] L.E. Sigler. *Algebra.*, UTM, Springer Verlag, 1976

[7] R. Urzúa Luz. *The first cohomology of affine $\mathbb{Z}^p$-actions on tori and applications to rigidity.* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 34 (2003), no. 2, 287-302.

XXII COMCA

Congreso de Matemática Capricornio

31 de Julio, 02 de Agosto 2013, La Serena, Chile

SESIÓN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Coordinación: Margarita García

Departamento de Matemáticas

Universidad de La Serena

La Serena, Chile

1 **Palmenia Rodríguez Rojas** *Medición del Conocimiento Profundo del Profesor acerca de las Fracciones* Universidad de La Serena. La Serena. Chile.

2 **Elizabeth Ramos Rodríguez** *Una mirada sobre la enseñanza de la multiplicación de Números Naturales conjugando material manipulativo y digital* Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

3 **Catalina Cvitanic Abarca** *Modelo Escénico para la enseñanza de la Matemática. Depto. de Matemáticas* Universidad de La Serena. La Serena, Chile.

4 **María Leonor Varas, Nancy Lacourly, Valentina Giaconi** *Evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido para enseñar Matemáticas en Enseñanza Básica* Centro de Investigación Avanzada en Educación. Universidad de Chile.

5 **Fredi Veas Marín, Armando Mallegas Vera** *Aprendiendo el Álgebra Básica desde la perspectiva de la Geometría Tradicional* Facultad de Ciencias Humanas. Universidad Arturo Prat.Iquique, Chile.

6 **Daniela Bonilla, Marcela Parraguez, Leonardo Solanilla** *Las Cónicas en la Geometría del Taxista: Una propuesta Didáctica desde la Teoría de los Modos de Pensamiento* Universidad de La Serena, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad del Tolima.

7 **Víctor Estay Glasinovich, Armando Mallegas** *Fractales en Enseñanza Media* Universidad Arturo Prat. Iquique. Chile.

8 **María del Valle Leo, Máximo Muñoz** *Atribuciones Causales y Aprendizaje Matemático* Universidad de Concepción, Universidad Andrés Bello. Chile.

9 **Iván Aguirre, Yurilev Chalco, Karen Álvarez** *Formación de Profesores de Matemática* Universidad de Tarapacá. Arica, Chile.

10 **Violeta Chavez, Marcela Parraguez, Isabel Vargas** *Construcciones mentales para el objeto Recta de Euler. Una propuesta para el currículum chileno* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso Chile.

11 **Miguel Rodríguez, Marcela Parraguez** *Una Descomposición Genética para el concepto Espacio Vectorial* $\mathbb{R}^2$ Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

12 **Marcela Parraguez, Isabel Maturana, Miguel Rodríguez** *Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje de la Matriz asociada a un Transformación Lineal* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

13 **Fernando Toledo, Natanael Guerrero, Julio Borja** *Implementación de la Estrategia P2P para grupos grandes: estructura de experimentos on-line para un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* Universidad del Bío Bío. Chile.

14 **Elías Irazoqui, Claudio Olate, Juan Ortega** *Aproximación al concepto de Límite* Universidad del Bío Bío. Chile.

SESION INVITADA

MATEMÁTICA EDUCATIVA

SESION INVITADA

MATEMÁTICA EDUCATIVA

EDUCACIÓN BÁSICA

Sesión Invitada EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 1. MEDICIÓN DEL CONOCIMIENTO PROFUNDO DEL PROFESOR ACERCA DE LAS FRACCIONES

Palmenia Rodríguez Rojas. Universidad de La Serena
prodríguez@userena.cl

RESUMEN

En Chile, y América Latina en general, se hace necesario disponer de instrumentos consistentes que midan los conocimientos que requiere un profesor para lograr que sus alumnos aprendan. Se trata de instrumentos útiles para la evaluación y promoción del profesorado. Este estudio tuvo como propósito elaborar un instrumento consistente, sobre el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones. El instrumento fue aplicado en dos oportunidades a grupos de 30 profesores de primaria. Finalmente se obtuvo un instrumento de 12 preguntas, con una consistencia interna de 0,74 (alfa de Cronbach).

PALABRAS CLAVE: Conocimiento pedagógico del Contenido, Conocimiento profundo del contenido, validación de instrumentos, fracciones.

ABSTRACT

In Chile and Latin-American in general, it is necessary to have consistent instruments that measure the skills required by teachers to make students learn. Instruments that are useful tools for the evaluation and promotion of teachers. This study aimed to develop one consistent instrument, about the teacher's deep knowledge about fractions. The instrument was applied on two occasions to groups of 30 primary teachers. Finally, the instrument had 12 questions, with an internal consistency of 0.74 (Cronbach's alpha).

KEYWORDS: pedagogical content knowledge, deep content knowledge, validation instrument, fractions.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han mostrado que el conocimiento del profesor es un factor de alta incidencia en los aprendizajes de los alumnos, lo que se evidencia en el informe de McKinsey & Company (2007), cuyo objetivo fue comprender por qué los sistemas educativos con más alto desempeño del mundo alcanzan mejores resultados, el informe señala "Todos los distintos sistemas educativos que han experimentado importantes mejoras lo han logrado fundamentalmente porque han creado un sistema que es más eficiente en tres aspectos: conseguir gente más talentosa que se interese por la docencia, desarrollar a sus docentes para que sean mejores instructores y garantizar que estos instructores se brinden en forma consistente a todos los niños del sistema" (p. 70). En concordancia con esta información, el grupo de trabajo de PREAL (2009) ha sugerido que el problema de la baja calidad de los aprendizajes escolares en América se aborde desde la dimensión del profesorado. En Chile particularmente, se están introduciendo evaluaciones masivas a los profesores nóveles que miden conocimientos disciplinarios y pedagógicos, dentro de un programa para mejorar la formación inicial de los profesores, y se está requiriendo instrumentos consistentes para la evaluación del profesorado.

El marco conceptual que sustenta este trabajo de investigación corresponde al Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC), noción acuñada por Shulman (1986), quien lo identificara de manera genérica como “esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional” (Ortiz, Batanero y Contreras, 2012). Shulman propone un mínimo de conocimientos que debe tener el profesor y los agrupó en tres categorías: conocimiento del contenido de la materia específica (CC), conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y conocimiento curricular.

Al referirnos al conocimiento de la materia específica (CC), pareciera ser evidente que un profesor debe manejar los conocimientos que enseña, pero ¿cuál es la profundidad de los conocimientos matemáticos que maneja un profesor?, en 1999 Liping Ma, mostró por medio de la comparación de profesores de China y de Estados Unidos, que un conocimiento profundo y sustancial del contenido matemático por parte del profesor es esencial para otorgar educación matemática de calidad. Sorto et al. (2009), en consistencia con las ideas de Ma (1999), tras examinar la relación entre el conocimiento pedagógico del contenido (CPC) del profesor y las prácticas en tercero y séptimo grado en Panamá y Costa Rica, identifican una asociación positiva entre la capacidad del profesor para responder a preguntas de matemáticas y su desempeño en el aula, y advierten que los maestros eficaces tienen altos niveles de conocimiento especializado.

Atendiendo a estos antecedentes y a la necesidad internacional de disponer de instrumentos consistentes que midan los conocimientos del profesorado y de paso la calidad de la formación docente, uno de los objetivos de esta investigación fue elaborar un instrumento consistente sobre el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones, Cprofu-F (Rodríguez & Olfos, 2012).

ANTECEDENTES SOBRE EL CONOCIMIENTO PROFUNDO DEL CONTENIDO

Según Ma (1999), para promover el aprendizaje de las matemáticas, los profesores deben tener una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF), deben conocer bien las matemáticas que enseñan cada día, sentir seguridad y comodidad al referirse a los contenidos. Atesoramos la comprensión profunda de las matemáticas fundamentales de los docentes exitosos como un tipo de conocimiento, que en nuestro estudio denominamos “conocimiento profundo del contenido”, y quisiéramos sea adquirido por la mayoría de los docentes. Con el propósito de esclarecer el significado de comprensión profunda de las matemáticas fundamentales del libro de Ma (2010) extrajimos algunos episodios de entrevistas, que a continuación presentamos.

Se les pide a 23 profesores norteamericanos y 72 profesores chinos, calcular $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=$. Las siguientes son algunas explicaciones dadas por profesores norteamericanos:

1) El Sr. Felix: Yo convertiría el $1\frac{3}{4}$ a cuartos, lo que me daría $\frac{7}{4}$. Luego lo dividiría por $\frac{1}{2}$, invertiría $\frac{1}{2}$ y multiplicaría. Entonces, multiplicaría $\frac{7}{4}$ por 2, y me daría $\frac{14}{4}$ y luego dividiría 14 por 4 y volvería al número mixto $3\frac{2}{4}$ o lo reduciría después a $3\frac{1}{2}$.

2) Srta. Felice: Lo primero que tienes que hacer es cambiarlas para que queden iguales. Bueno, se supone que tienes que multiplicar eso y sumarle eso. Así que eso es 4, más es $\frac{7}{4}$ y después tienes que hacerlo igual. Divido por $\frac{2}{4}$. ¿Cierto? y luego, simplemente los multiplicas cruzado así. Te da $\frac{28}{8}$.

3) Srta. Frances: Por alguna razón, está en mi subconsciente que se invierte una de las fracciones. Que, mmm, o que $\frac{7}{4}$ se transforma en $\frac{4}{7}$ o que $\frac{1}{2}$ se convierte en 2. No estoy segura.

Las siguientes son explicaciones dadas por los profesores chinos:

1) Dividir por fracciones usando decimales. Más de un tercio de los profesores informó que la tarea era más fácil de resolver con decimales: $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2} = 1{,}75 : 0{,}5 = 3{,}5.$

2) Aplicar la propiedad distributiva. Siete profesores dijeron que se podía usar la propiedad distributiva para calcular $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2} =$. Como se ilustra a continuación:

$$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{4}:\tfrac{1}{2} &= \left(1+\tfrac{3}{4}\right):\tfrac{1}{2} \\ &= \left(1+\tfrac{3}{4}\right)\text{x}\tfrac{2}{1} \\ &= (1\text{x}2) + \left(\tfrac{3}{4}\text{x}2\right) \\ &= 2 + 1\tfrac{1}{2} \\ &= 3\,\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{4}:\tfrac{1}{2} &= \left(1+\tfrac{3}{4}\right):\tfrac{1}{2} \\ &= \left(1:\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{3}{4}:\tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2 + 1\tfrac{1}{2} \\ &= 3\,\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

3) “no es necesario multiplicar”. Tres profesores señalaron que algunas veces los problemas de división por fracciones se pueden resolver sin usar la multiplicación, como por ejemplo:

$$1\tfrac{3}{4}:\tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{4}:\tfrac{1}{2} = \tfrac{7:1}{4:2} = \tfrac{7}{2} = 3\,\tfrac{1}{2}$$

Liping Ma señala que al comparar las respuestas dadas, se observa que sólo 13 de los 23 profesores norteamericanos realizaron correctamente el procedimiento. Ninguno de los profesores que tuvo éxito, demostró una comprensión de la base lógica del algoritmo de la división por fracciones. Muchos confundieron el algoritmo con otros. La operatoria con fracciones fue débil, sentían poca seguridad al calcular. Mencionaron solo un enfoque, “invertir y multiplicar”. El número mixto fue obstáculo para algunos profesores norteamericanos.

De los 72 profesores chinos entrevistados, todos hicieron el cálculo correctamente. La mayoría usó la frase: “dividir por un número es equivalente a multiplicar por su recíproco”, frase de textos escolares chinos para justificar. La mayoría no recurrió a la propiedad para recordar el procedimiento, lo hicieron para justificar. El uso de la propiedad distributiva otorgó evidencia de la comprensión de la propiedad y su confianza al usarla, y la comprensión del número mixto, además mostraron un amplio repertorio de estrategias para explicar el contenido matemático. Se observa por medio de estos ejemplos que la forma de enfrentar la tarea es diferente, con seguridad, en el caso de los profesores chinos. Ellos no están sujetos a una única forma de proceder ni a una forma de la cual se vean imposibilitados de variar o justificar. Es el conocimiento de la estructura que hay detrás lo que les da soltura para trabajar el problema y sentirse a gusto en la forma de abordarlo. Pareciera que es a esta manera de entender lo que Ma identifica como comprensión profunda de la matemática fundamental, y que en nuestra investigación denominamos “conocimiento profundo del contenido”.

MARCO CONCEPTUAL DEL ESTUDIO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO

En la presente investigación utilizamos nociones del constructo teórico CPC de Shulman (1987) descrito para el área matemática por Ball (2000), y el estudio de Liping Ma (1999). Para este estudio consideramos que el profesor debe tener una profunda comprensión de las matemáticas presentes en el currículum, por esta razón para conceptualizar la dimensión Cprofu-F, utilizaremos las características del CPMF señaladas por Ma (1999) y proponemos las preguntas del instrumento. A continuación se explica cada una de las categorías del Cprofu-F:

Conectividad: El conocimiento del profesor debe estar completamente conectado, debe ser capaz de ver como los conceptos matemáticos se relacionan entre sí. Para evitar una experiencia fragmentada de temas aislados en matemáticas, estos maestros tratan de presentar un "cuerpo unificado de conocimiento" (Ma, 1999, p.122).

Múltiples Perspectivas: El conocimiento del profesor le permite acercarse a la matemática de diversas maneras, lo que significa que el profesor debe tener un completo conocimiento de cada tema matemático que enseña. Los profesores harán hincapié en la idea de que son posibles múltiples soluciones, y en las ventajas y desventajas del uso de ciertos métodos en determinadas situaciones.

Ideas básicas: El conocimiento del profesor le permite comprender que las matemáticas fundamentales se componen de ideas básicas, las cuales se repiten a lo largo del aprendizaje de las matemáticas. Los profesores deben construir una base sólida sobre la que se construirá el futuro aprendizaje de sus alumnos.

Coherencia Longitudinal: El profesor debe saber que el conocimiento se construye sobre el conocimiento anterior. Los profesores CPMF están conscientes de todo el currículo elemental (y no sólo a los grados que están enseñando o han enseñado). Estos maestros saben de dónde vienen sus alumnos y hacia dónde se dirigen en el currículo de matemáticas.

DISEÑO METODOLÓGICO DEL PROCESO DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

El instrumento Cprofu-F, fue analizado por dos profesores de matemáticas que evaluaron la relevancia, coherencia y claridad en la redacción de las preguntas, aportando a la validez de contenido, a partir del juicio de experto. Este estudio se circunscribe al contenido de las fracciones según lo establece el currículo chileno. El Programa de Estudio de cuarto año básico (MINEDUC, 2003) presenta los contenidos mínimos obligatorios (C.M.O.) referentes al tema de las fracciones. Tales contenidos, como se observa en la Tabla I, están presentes de manera equilibrada en la construcción de las preguntas del instrumento de Cprofu-F, proveyendo validez de contenido al instrumento.

Tabla I

(C.M.O.) Programa 4º básico (MINEDUC, 2003) Unidad fracciones	TEST Cprofu-F Nº de la pregunta
Situaciones de reparto equitativo	12
Fraccionamiento en partes iguales de objetos	11
Lectura y escritura de fracciones	4 – 5
Uso de fracciones	6
Familias de fracciones de igual valor	9 – 10
Comparación de fracciones (gráfico y recta numérica)	1 – 2
Comparación de fracciones unitarias	-
Ubicación de fracciones mayores que la unidad en la recta numérica	3
Uso de fracciones para precisar la descripción de la realidad	7 – 8
Total	12

El instrumento para medir el Cprofu-F contiene preguntas referidas a las cuatro categorías que define Ma (1999) al caracterizar CPMF; a saber, conectividad, múltiples perspectivas, ideas básicas, y coherencia longitudinal. (Ver Tabla II). Lo que ofrece validez de contenido del instrumento en relación al constructo Cprofu-F.

Tabla II

Cprofu-F	Preguntas
Conectividad	1– 2 – 3
Múltiples perspectivas	6 – 9 – 10
Ideas básicas	4 – 5 – 11 – 12
Coherencia longitudinal	7 – 8

Etapas y Procedimientos

Primera Etapa: Se ha elegido un instrumento desarrollado y probado que consta de 37 preguntas relativas al conocimiento matemático y pedagógico sobre fracciones del proyecto FONIDE 10980 (Olfos et al., 2010), el cual fue aplicado a un total de 53 profesores de primaria. Del total de preguntas del instrumento se eligen 10 preguntas referentes al conocimiento del contenido del profesor (CC). Posteriormente se realiza un estudio de los índices de dificultad y de discriminación de las 10 preguntas elegidas, agrupándolas de diversas formas para ver cuál de ellas discriminaba mejor y presentaba mejor índice de dificultad. Para analizar el grado de dificultad y discriminación de las preguntas utilizamos los parámetros establecidos para la aceptación de preguntas, planteados por Guilford (1975, citado por López P., 2009) donde el rango aceptable para el índice de dificultad oscila entre 0,2 y 0,85 y en el caso de la discriminación se asume un índice mínimo de 0,3.

Segunda Etapa: Revisión y redacción de preguntas Cprofu-F. Se eligen 4 preguntas CC las cuales no fueron modificadas y 6 preguntas CC que se adaptaron y 4 preguntas inventadas para cubrir contenidos del curriculum, y para que evaluaran Cprofu-F, las preguntas se juntan de pares procurando que midan lo mismo, esto permite construir el instrumento Cprofu-F constituido por 14 preguntas. Como mencionamos anteriormente las preguntas son abarcativas de los contenidos presentados en el currículo dado el actual programa de estudio.

Tercera Etapa: Primera aplicación del instrumento Cprofu-F que se realizó a 30 profesores de enseñanza primaria.

Cuarta Etapa: Transcurrida tres semanas desde la primera aplicación los mismos 30 profesores de enseñanza primaria proceden a responder el instrumento Cprofu-F (no modificado).

Quinta Etapa: El instrumento Cprofu-F (no modificado) fue aplicado a 20 estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática.

RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Finalmente obtuvimos un instrumento Cprofu-F con una confiabilidad aceptable, estimada con el coeficiente alfa de Cronbach 0,74. A continuación se muestran los índices de dificultad y discriminación de los instrumentos Cprofu-F (ver tabla III), además para ilustrar en parte el análisis realizado para obtener instrumentos confiables se presenta el análisis de dificultad y discriminación de dos ejemplos de preguntas Cprofu-F.

Tabla III

Nº pregunta Cprofu-F	Índice de dificultad	Índice de discriminación
1	0,9	0,4
2	0,7	0,3
3	0,6	0,9
4	0,7	0,6
5	0,8	0,5
6	0,6	0,8
7	0,8	0,4
8	0,8	0,3
9	0,8	0,3

10	0,8	0,4
11	0,8	0,4
12	0,8	0,5

Análisis de ejemplos de dos preguntas del instrumento Cprofu-F

Análisis (ver tabla IV): Esta pregunta es extraída del instrumento inicial del proyecto FONIDE que fue aplicado a 53 profesores de enseñanza primaria, al realizar el análisis de las preguntas, procedimos a calcular el índice de dificultad y el resultado fue 0,2 lo que indica que la pregunta es muy difícil, y advertimos que la alternativa d) ninguna de las anteriores no era un buen distractor, por esta razón decidimos cambiarla, para que el profesor piense más en la respuesta y recurra a sus conocimientos matemáticos para responder. Esta pregunta da cuenta de un conocimiento profundo del profesor acerca de las Fracciones relacionado con la categoría múltiples perspectivas, en la cual la respuesta correcta del profesor se fundamenta en la extensión del concepto de fracción y en el uso en la representación de cantidades. El profesor que responde bien se da cuenta que 3 de 3 es 9, o usa el modelo multiplicativo $\frac{a}{b}$ *de* c como $\frac{a}{b} \cdot c$, o bien representa el número 12 como doce objetos y posteriormente formará 4 grupos de tres objetos, recurriendo al concepto de fracción para señalar que 9 objetos representan 3/4 de 12.

Tabla IV

Pregunta 6

La expresión “3/4 de 12”, equivale a:

a) Un cuarto de 3 doceavos   b) Tres veces 4 doceavos

c) 12 cuartos de tres   d) Cuatro veces 12 tercios

Respuesta correcta: c

	Índice de dificultad	Índice de discriminación
Instrumento Inicial	0,2	0,6
Test 1	0,5	0,9
Test 2	0,6	0,8
Test 3	0,4	0,6

Análisis (ver tabla V): Esta pregunta es extraída del instrumento inicial del proyecto FONIDE, esta pregunta no fue modificada debido a que presenta buen índice de dificultad y discriminación, además da cuenta de un conocimiento profundo del profesor acerca de las Fracciones relacionado con la categoría coherencia longitudinal, en la cual la respuesta del profesor debe mostrar que no solo sabe lo que enseña en cierto nivel sino debe manejar un conocimiento de todo el curriculum. La respuesta correcta del profesor se fundamenta en el conocimiento del concepto de fracción según definición. El profesor que responde que muchas fracciones cumplen esa condición, tiene un conocimiento profundo, se da cuenta que Q es denso en R.

Tabla V

Pregunta 7

Juan busca una fracción entre 7/8 y 1. ¿Qué frase es correcta?

a. No la encontrará, puesto que 8/8 es igual a 1.

b. Solo es posible encontrar una fracción entre esos números.

c. Muchas fracciones cumplen esa condición.
d. Ninguna de las anteriores.
Respuesta correcta: c

	Índice de dificultad	Índice de discriminación
Instrumento Inicial	0,3	0,9
Test 1	0,3	0,5
Test 2	0,8	0,4
Test 3	0,6	0,8

CONCLUSIONES

El estudio se enfocó en la construcción de un instrumento consistente, que evalúa el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones, Cprofu-F. El análisis de los índices de dificultad y discriminación, además de la revisión de los distractores y de la redacción de las preguntas del instrumento inicial (Olfos et al., 2010), permitieron dilucidar que las preguntas CC que presentaban mejores índices de dificultad y discriminación median un conocimiento matemático, que difiere en ciertos aspectos al presentado en otras investigaciones relacionadas con el tema. Por ejemplo, Ball et al. (2008) utilizan la expresión conocimiento matemático para enseñar, distinguiendo las componentes, conocimiento del contenido común (CCK), conocimiento del contenido específico (SCK). En la componente CCK el profesor es capaz de realizar el trabajo que se ha asignado a los estudiantes, por ejemplo, realizar cálculos correctos o resolver un problema. Mientras que dimensionar la naturaleza del error es el conocimiento del contenido especializado (SCK), esto si el profesor se basa principalmente en su conocimiento matemático.

El instrumento inicial aplicado a 53 profesores de primaria del proyecto FONIDE presentaba preguntas CC, que median las componentes del conocimiento del contenido común (CCK) y del contenido específico (SCK) propuestos por Ball, estas preguntas presentaban grados de dificultad y discriminación aceptable, pero además advertimos que aquellas preguntas CC, que presentaban mejores índices de dificultad y de discriminación, median un conocimiento matemático del profesor, que se aproximaba más a la idea de comprensión profunda de las matemáticas fundamentales de Ma (1999). Asumimos en este estudio que este es un tipo “especial” de conocimiento matemático, que denominamos “conocimiento profundo del contenido”, y supusimos que este conocimiento se podía evaluar confiablemente. El instrumento Cprofu-F mostró confiabilidad aceptable en las tres aplicaciones, por lo que no fue modificado. Este resultado se acerca a los resultados de Ball, que logró medir con éxito el conocimiento matemático para enseñar.

En síntesis, se evalúa la dimensión Cprofu-F conformando un instrumento con validez de contenido y confiabilidad aceptable. El trabajo de validación presenta definición conceptual para medir el constructo, mostramos dos tablas de especificaciones que proporcionan validez de contenido. Cabe hacer notar que este instrumento tiene validez teórica y permite identificar cuál es el nivel de conocimiento de un profesor. Se postula que este es el conocimiento que requiere para enseñar. Pero no hay evidencias de que este conocimiento sea una condición necesaria o suficiente para favorecer los aprendizajes de los estudiantes o al menos llevar adelante una instrucción de calidad. En este sentido, emerge el desafío de recabar evidencias al respecto, ámbito de investigación al que abren los resultados de este estudio.

REFERENCIAS

[1] Ball, D. L. (2000). Bridging Practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of teacher education, 51, 241-247.
[2] Ball, D.,Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59, 389-407.
[3] GTD-PREAL (2009), Boletín n° 50, Una herramienta para la valoración de la calidad del desempeño docente, octubre.
[4] López, P. (2009). Construcción y validación de una prueba para medir conocimientos matemáticos. Revista horizontes pedagógicos, 11, 29-37.
[5] Ma., L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
[6] Ma., L. (2010). Conocimiento y Enseñanza de las Matemáticas Elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tiene los profesores en China y los EE.UU. Editado por Academia Chilena de Ciencias.
[7] MINEDUC, Programa de estudio 4º Básico Matemática 2003. Ministerio de Educación. Chile. Recuperado el 13 de enero de 2012 de: http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3264&c=10
[8] McKinsey & Company (2007). "Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos". Buenos Aires. Recuperado el 6 de abril de 2012 de: http://www.eduteka.org/pdfdir/McKENSEY_InformeReformaEducativa.pdf
[9] Olfos, R., Guzmán, I. y Galbiati, J. (2010) Informe Final Proyecto F410980 "Conocimiento pedagógico del Contenido y su incidencia en la Enseñanza de la Matemática Nivel de Educación Básica" del Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación – FONIDE Ministerio de Educación. Chile. Recuperado el 11 enero de 2013 de: http://centroestudios.mineduc.cl/index.php?t=96&i=2&cc=2180&tm=2
[10] Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores sobre la idea de juego equitativo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15, 63 – 91.
[11] Rodríguez, P., & Olfos, R. (2012). Medición del conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y de su conocimiento acerca del saber del alumno en torno a las fracciones en 4º básico. Tesis de Magister. PUCV, Chile.
[12] Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15, 4–14.
[13] Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57, 1–22.
[14] Sorto, M. A., Marshall, J. H., Luschei, T. F. Carnoy, M. (2009). Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: a comparative study in primary and secondary education. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12, 251 – 290.

Sesión Invitada EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 2. UNA MIRADA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES CONJUGANDO MATERIAL MANIPULATIVO Y DIGITAL

Elisabeth Ramos-Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
elisabeth.ramos@ucv.cl
Iris Pichuante Argandoña irispichuante@efectoeducativo.cl
Isabel Núñez Carbullanca isabelnunez@efectoeducativo.cl

Resumen

Diversas investigaciones demuestran el fuerte impacto que tiene la utilización de material digital y concreto en la enseñanza de la matemática (Miranda y Villarroel, 2010; Schacter, 1999). Por otro lado hay estudios que muestran sobre las dificultades en el tratamiento de la multiplicación de números naturales, como por ejemplo, el de Mendes, Brocardo y Oliveira (2011). Bajo esta perspectiva, este trabajo muestra los resultados de un estudio realizado en Chile a principios del año 2013, en el cual se realizó una intervención educativa que tiene por objetivo indagar el impacto de la articulación de un material, que conjuga el material manipulativo y digital sobre algunos tópicos de la multiplicación de números naturales en el aprendizaje de los estudiantes.

Introducción

El uso del material manipulativo y digital para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido ampliamente estudiando desde hace varias décadas y su impacto es incuestionable (Pestalozzi y Cabanas, 1982; Valenzuela, 2011). Actualmente el desafío se ha focalizado en integrar el uso de tecnologías en el aula, para lo cual también existe evidencia que puede generar resultados positivos en el aprendizaje (Luque y Rodríguez, 2012; Schacter, 1999). En los últimos años han surgido varias propuestas innovadores que articulan el material manipulativo y digital para abordar algún tema matemático (Miranda y Villarroel, 2010; Teixidor, 2010).
En virtud de lo mencionado, esta investigación tiene como propósito describir el impacto que tiene un material que conjuga lo digital y lo manipulativo en la comprensión de algunos tópicos referentes a la multiplicación de números naturales al emplearlo con estudiantes de 8 a 10 años. Estudio realizado por una académica de una universidad chilena, junto con un equipo de *efecto educativo*, coordinado por Alberto Mora Silva[1].

Desarrollo

El fundamento teórico del estudio se basa en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS) planteada por Duval (2004) y en elementos de la método COPISI (Koedinger, 2002; Sousa, 2008) como parte esencial para llegar a la diversidad de registros de representación, es decir, antes de llegar a lo abstracto, el aprendizaje debe iniciarse por medio de manipulación con material concreto, pasando a un modelo pictórico que finalmente se reemplaza por símbolos.

Bajo un paradigma cuantitativo con diseño cuasiexperimental, se aplicó un pre y pos test como instrumentos de recogida de datos, en individuos intactos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). La población consistió en estudiantes de dos cursos de 4° año básico (8 a 10 años) del colegio Santa Juliana de la Región Metropolitana de Chile, seleccionando aleatoriamente a uno de ellos como grupo control y al otro como grupo experimental (con el que se trabajó con el material, laboratorio temático,

[1] albertomora@efectoeducativo.cl

diseñado por la empresa *efecto educativo*). Los grupos abordan las mismas temáticas sobre multiplicación de números naturales.

La variable independiente fue el laboratorio temático y las variables dependientes los RRS y el método COPISI. Se realizó un análisis estadístico clásico, considerando los porcentajes de logro de cada ítem de los test aplicados en relación con los objetivos de aprendizaje y un análisis de tipo estadístico implicativo, buscando relaciones de implicatividad entre variables.

Tras el análisis de datos, se destacan las gráficas ilustradas en la figura 1.

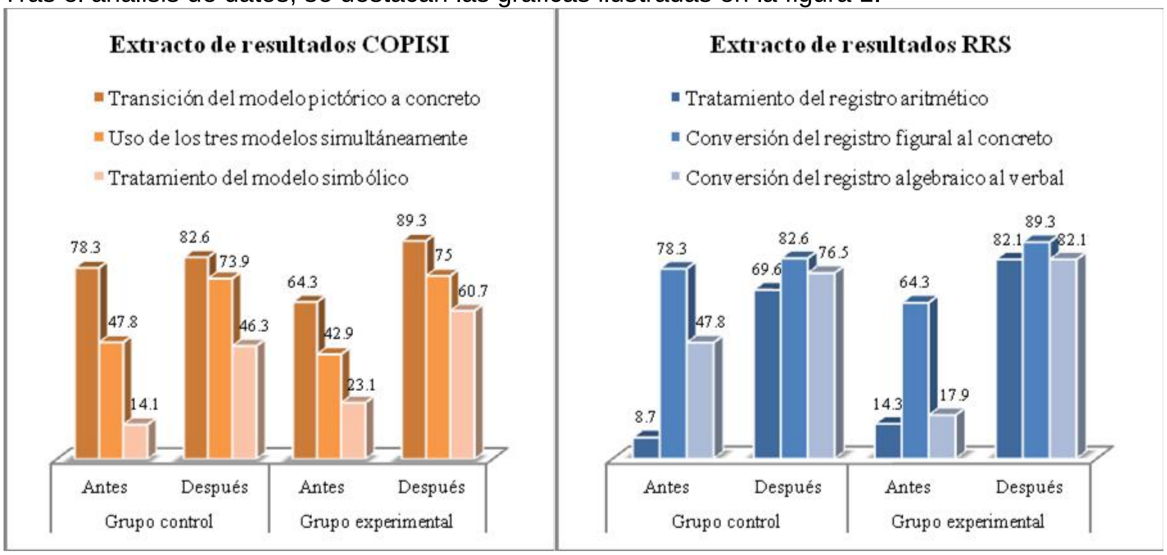


Figura 1. Extracto de resultados

Con respecto al análisis estadístico clásico, se observa que el grupo experimental tiene un mayor porcentaje de logro de aprendizajes al utilizar el método COPISI, utilizando los tres modelos simultáneamente y haciendo un uso más significativo, en términos de porcentaje, del modelo simbólico, implicando que el tránsito por estos modelos facilita la comprensión de los conceptos por parte de este grupo.

En relación al uso de RRS, se evidencia que el grupo experimental, luego de la experiencia de intervención obtiene mayores porcentajes de logros en diversos procesos de uso de registros que el grupo control, resultado que se ratifica tras el análisis estadístico implicativo.

Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos, es posible afirmar que el *laboratorio temático* fue un aporte para la comprensión de la multiplicación de los números naturales, afirmación fundamentada en los elementos teóricos del método COPISI como a la teoría RRS.
Nuestras proyecciones de estudio van en la búsqueda de mecanismos que permitan fortalecer el material implementado en el cual no ha mostrado logros significativos. Este estudio puede aportar a futuras investigaciones sobre otro material que conjugue lo digital y manipulativo, en pos de entregar mejores herramientas a nuestros futuros estudiantes.

Referencias

Duval, R. (2004) *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción al español de Vega M. de Sémiosis et pensée Humaine. Registres Sémiotiques et Apprentissages intellectuels.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*.México, McGraw-Hill.

Koedinger, K. R. (2002). Toward evidence for instructional design principles: Examples from Cognitive Tutor Math 6. In *Proceedings of PME-NA XXXIII*.

Mendes, F., Brocardo, J., y Oliveira, H. (2011). La multiplicación: Construyendo oportunidades para su aprendizaje. En M. Isoda y R. Olfos (Orgs.), *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas* (pp. 321-350). Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Miranda, H. & Villarreal, G. (2010). Tecnologías digitales en el contexto de un modelo de innovación curricular en matemática en Chile. En *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *1*(1).

Pestalozzi, J. H (2006). Cartas sobre educación infantil. (3ª Edición). Madrid: Tecnos. [Traducción al español por J. M. Quintana Cabañas]

Schacter, J. (1999). *The Impact of Educational Technology on Student Achievement. What the Most Current Research Has to Say*. Santa Monica, CA: Milken Family Foundation.

Sousa, D. A. (2008). How the Brain Learns Mathematics. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Teixidor Cadenas, E. (2010). Pajifiguri: un material manipulativo y cuento interactivo. Números, (74), 75-92.

Valenzuela Molina, Macarena. 2011. Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM%20Macarena%20Valenzuela_.pdf (Consulta 15/05/2013).

Sesión Invitada MATEMÁTICA EDUCATIVA

Id 3. MODELO ESCÉNICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA (MESCEMAT)

Catalina Cvitanic. Universidad de La Serena. La Serena.
cvitanic@userena.cl

RESUMEN:

En este trabajo se presenta una estrategia innovadora para la enseñanza de la matemática en el nivel escolar y/o universitario, cuyo producto es un Material Didáctico que puede complementar favorablemente las clases efectuadas en el aula.
El producto generado consiste en un set metodológico para la enseñanza de la matemática a través de la teatralización de sus conceptos. Se han puesto en escena nociones matemáticas incluidas en los planes de enseñanza básica, media y universitaria por medio de una obra que es complementada con material pedagógico.
Con esta metodología se pretende influir positivamente en los aprendizajes de los estudiantes, trasmitiendo a la par conocimientos y valores.

ABSTRACT:

In this paper we present an innovative approach to the teaching of mathematics at the school level and/or university, whose product is a didactic material that can complement favorably the classes conducted in the classroom.
The product generated is a methodology set for teaching mathematics through the dramatization of his concepts. They have staged mathematical notions plans included in primary, secondary and universitary education through a performance which is supplemented with educational material.
With this methodology we intend to influence and positively affect student learning, transmitting at the same time knowledge and values.

INTRODUCCIÓN

La propuesta que presentamos en este trabajo, apunta al diseño e implementación de experiencias de aprendizaje, elaboración de material didáctico, elaboración de objetos de aprendizaje y uso de tecnologías para el aprendizaje.

Se plantea un método novedoso para generar el gusto por la Matemática utilizando el enorme potencial integrador que posee el teatro. Esta nueva alianza entre las matemáticas y el teatro puede inyectar emociones y sentimientos a los entes que habitan en el mundo matemático, motivando un acercamiento amistoso hacia ellos. Si además, le agregamos una puesta en escena atractiva para el espectador, se pueden obtener resultados formativos y de aprendizaje muchísimo más enriquecedores que los conseguidos con metodologías tradicionales de enseñanza que son poco dinámicas y menos acordes con nuestros tiempos.

Se utiliza una representación dramática para lograr el acercamiento y valoración de la matemática por cualquier persona, principalmente los alumnos y alumnas de la etapa escolar. Se trata de teatralizar objetos matemáticos vinculándolos con situaciones cotidianas dándole un carácter educativo, otorgando un espacio de difusión tanto al teatro como a la matemática. De esta manera el docente podrá en conjunto con sus estudiantes crear actividades integradas que fomenten la creatividad en el aula.

DESARROLLO

Nuestro propósito consiste en poner a disposición de los docentes y estudiantes, metodologías pedagógicas innovadoras para la enseñanza de la matemática a través de la teatralización, mostrando que el teatro puede convertirse en un nexo concreto entre el arte y la Matemática y que utilizado como herramienta pedagógica permite influir positivamente en la formación integral de los estudiantes trasmitiendo a la par conocimientos y valores.

Para conseguir este objetivo, hemos implementado y puesto en escena la obra de teatro "El Universo Matemágico", una comedia pedagógica que recrea en forma lúdica algunos temas de la Matemática, tales como geometría, aritmética, álgebra y lógica, y que además pretende destacar que la matemática es una ciencia que contribuye a la formación del pensamiento lógico. La obra contiene una base teórica que utiliza variados textos de Matemáticas Recreativas, siendo un referente el libro "El Hombre que Calculaba" del autor Malba Tahan.

Con la ejecución de la propuesta se espera lograr resultados concretos tanto en los aspectos formativos como didácticos.

En los aspectos formativos:

- Del modelo escénico matemático crear un nexo positivo para trasmitir que la Matemática está presente en nuestra vida, y que su conocimiento y comprensión nos puede ayudar a resolver los problemas de la cotidianidad de forma mucho más simple de lo que pudiésemos pensar.

- Se espera que las presentaciones de la obra dejen lecciones al espectador; la búsqueda de la simpleza de los números así como descubrir que en la naturaleza está presente la geometría y apreciar la belleza de las fórmulas matemáticas.

En los aspectos didácticos:

- Brindar al estudiante un esclarecimiento contextualizado de conceptos abstractos a través de la teatralización de situaciones de aprendizaje matemático participativas.

- Posibilitar al estudiante realizar conjeturas y estimaciones relativas a sus observaciones generadas en el desarrollo de la obra.

- Generar una mejor disposición en los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática, motivados por su participación activa en la obra.

- Entregar material complementario como guías y pautas que tratan los contenidos matemáticos de la obra para que los estudiantes puedan realizar las actividades que vinculan la Matemática con elementos presentes en nuestro entorno.

- Entregar a los docentes el set metodológico que, creemos, influirá positivamente en su disposición para innovar en los métodos de enseñanza de la matemática.

La obra está dirigida a estudiantes desde 5° Básico a 4° Medio y tiene una duración de aproximadamente 1 hora.

Respecto de la valoración de la Matemática por los estudiantes y público general, se incorporan escenarios de la ciencia formal como es el caso del tratamiento demostrativo y plausible de las nociones matemáticas, agregando lo tecnológico educativo y lo multimedial como es la utilización de formatos electrónicos computador y data, donde los asistentes percibirán por medio de situaciones teatrales de aprendizaje los diversos objetos matemáticos ayudando a su comprensión. Mientras van ocurriendo las escenas se muestra a través de data los distintos objetos matemáticos vinculados a la trama de la obra, lo que ayuda a educar de manera interactiva.

En la obra se contempla la participación de los escolares y los docentes a través de los medios tecnológicos y la interacción en los problemas matemáticos planteados. Los temas abordados se refieren específicamente a curiosidades sobre la tabla del nueve, fracciones, problemas de lógica matemática, geometría del espacio, progresiones geométricas, unidades de medida, etc. y son entregados al espectador (escolar y docente) a través del uso de computador, data y pantalla gigante dando la posibilidad de involucrarse.

Se entregan esquemas conceptuales de la naturaleza de cada noción matemática con definiciones, ejemplos y aplicaciones, la valorización dentro de la cultura científica del aporte de la matemática a la sociedad a través de los aspectos formativos del pensamiento, así como lo funcional y lo instrumental de la disciplina.

El material pedagógico como soporte teórico referido a los temas tratados en la obra que se entrega a los docentes consiste en un DVD explicativo, una guía de trabajo para desarrollar en el aula y un guión de clase al estilo de enseñanza japonesa relativo al juego de números que se muestra en la obra.

CONCLUSIÓN

Indudablemente que un proyecto de corte educativo requerirá de un tiempo para verificar el efecto que ha producido. No bastará con que un estudiante disponga de recursos audiovisuales durante un período de tiempo o asista a una obra de teatro, para que sus dificultades de compresión se eliminen. En educación, los cambios son lentos por la gran inercia del propio sistema y asumir la conveniencia educativa de nuevas metodologías no es algo instantáneo. Sin embargo, la recepción del proyecto por parte de los destinatarios ha sido óptima.

Desde una mirada práctica, en el sentido de acercar y divulgar la Matemática, no hay duda que el teatro matemático está provocando un gran impacto en los destinatarios: alumnos, profesores y público en general. El hecho que la praxis del teatro sea diversa, pudiendo abarcar a todas las temáticas lo hace atractivo en el mundo escolar, ya que el método del mismo refunde una universalidad que se construye desde el planteamiento personal y el accionar colectivo, que va en búsqueda de una misma meta (objetos teatrales y contenidos educativos). Y es que en la diversidad se logran afianzar los valores más nobles del ser humano, como también, los aprendizajes significativos que están presentes en el Currículo en Chile.

En síntesis, estamos ciertos que el teatro puede convertirse en un nexo concreto entre el arte y la matemática y que utilizado como herramienta pedagógica permitirá influir positivamente en la formación integral de los estudiantes trasmitiendo a la par conocimientos y valores.

REFERENCIAS:

[1] Tahan Malva, “El Hombre que Calculaba”. 1994

Sesión Invitada EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 4. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DEL CONTENIDO PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS EN ENSEÑANZA BÁSICA

María Leonor Varas, Nancy Lacourly, Valentina Giaconi
Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile
mlvaras@dim.uchile.cl

Resumen

El conocimiento del profesor que se pone en juego al enseñar matemática, aún a niveles escolares básicos, ha recibido gran atención en los últimos años. Se presenta un estudio que permitió validar un instrumento internacional para evaluar el conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar la matemática escolar y desarrollar un instrumento para evaluar una componente del conocimiento pedagógico del contenido: el conocimiento del profesor acerca de cómo aprenden matemática los alumnos. Esta componente ha sido descrita teóricamente por otros autores pero no había podido ser evaluada de manera confiable en pruebas masivas. Los resultados muestran tanto la validez como la confiabilidad de ambos instrumentos así como la existencia de factores distinguibles que se detectan con claridad y muestran aspectos de este conocimiento que no son explicados por el conocimiento disciplinar puro, aunque este los afecta.

Abstract

In recent years the teacher’s knowledge that is put into play when teaching mathematic, even at basic school levels, has received much attention. We present a study that allowed to validate an international instrument to assess the mathematical knowledge specific to the task of teaching school mathematics and the development of an instrument to assess a component of pedagogical content knowledge to teach mathematics: the teacher´s knowledge about how students learn mathematics. This component has been described theoretically by other authors but could not be assessed reliably in mass testing. The results show the validity and reliability of both instruments and the existence of distinct factors that are clearly detected and show aspects of this knowledge that are not explained by pure subject matter knowledge, although is affected by it.

Introducción

La importancia de contar con mejores profesores para satisfacer las necesidades de mejorar los resultados educacionales, es cada vez más consensual. En Chile como en muchos otros países, la política pública ha girado desde un énfasis en las reformas curriculares a la promoción de la calidad de los profesores. Los profesores competentes se han caracterizado a través de los Estándares y el Marco para la Buena Enseñanza. En estas caracterizaciones se atribuye importancia primordial a los conocimientos del profesor, en particular a su dominio de las materias que debe enseñar.

En los últimos años ha habido un gran progreso en describir en profundidad y extensión el tipo de conocimiento específico de la tarea de enseñar que requiere poseer un profesor [1] [2]. Un modelo que se ha vuelto popular y que se presenta en la figura 1, distingue tres tipos de conocimiento disciplinar y tres tipos de conocimiento pedagógico del contenido.

El conocimiento matemático común (CC) corresponde exactamente a los contenidos del currículo escolar que se debe enseñar mientras que el conocimiento de un horizonte matemático excede estos contenidos. Este último conocimiento abarca contenidos disciplinares adicionales a los que se deben enseñar, conformando un marco disciplinar en el cual se inscriben y adquieren mayor sentido los contenidos escolares. El conocimiento especializado (CE) es un conocimiento disciplinar que solo necesitan los profesores, no los otros usuarios de la matemática. Incluye el comprender porqué funcionan los algoritmos usuales, el disponer de variedad de representaciones, de definiciones exactas y precisas. Por su parte, dentro del conocimiento pedagógico del contenido se distinguen el conocimiento de los alumnos en cuanto a aprendices de la matemática, el conocimiento del currículo y el conocimiento de la enseñanza.

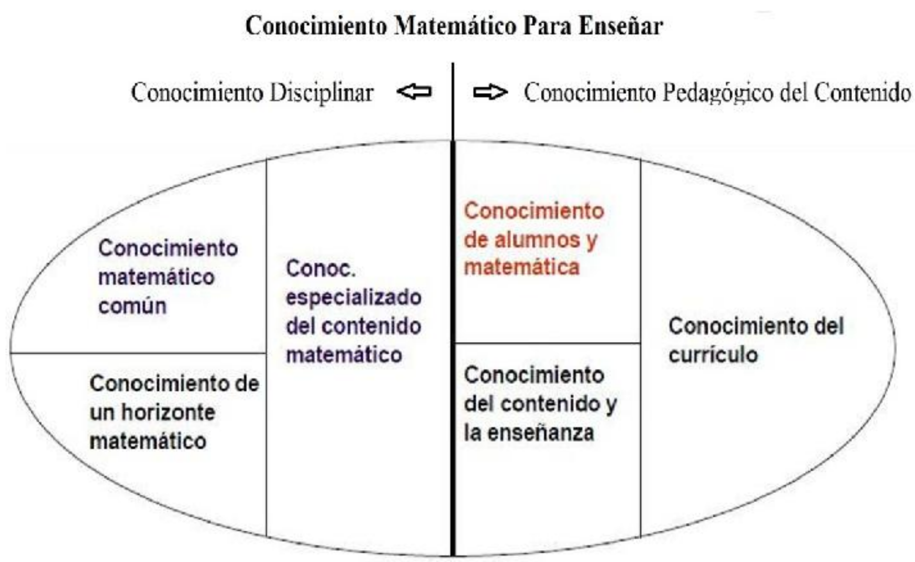


Figura 1
Modelo originado en el proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT) de la Universidad de Michigan (Ball, Thames, Phelps, 2008; Hill, Ball Schilling, 2008)

El mismo equipo del proyecto LMT que propuso este modelo, desarrolló instrumentos que han permitido evaluar confiablemente el conocimiento común y el conocimiento especializado de la matemática en grandes muestras en Estados Unidos [7][8], Noruega [6], Irlanda [5], Corea [14], Indonesia [15] y Ghana [4]. En algunos de estos casos se ha establecido la relación del conocimiento evaluado con la calidad de la instrucción [11] y con la ganancia de aprendizaje que obtienen los alumnos de estos profesores [9].

El proyecto alemán COACTIV [12] [13] investigó el conocimiento de 181 profesores cuyos 4.353 alumnos rindieron la prueba PISA 2003 en ese país y lo vinculó con las ganancias de aprendizaje a lo largo del año en que cursaron el grado 10. Evaluaron tres tipos de conocimientos: el conocimiento matemático común, el conocimiento pedagógico del contenido matemático y el conocimiento pedagógico general. La clasificación usada por estos autores es distinta de la utilizada por el proyecto LMT y en el conocimiento pedagógico del contenido incluyen tanto el conocimiento especializado como el conocimiento de alumnos y matemáticas. También en este caso se estableció claramente la relación entre el conocimiento pedagógico del contenido y la ganancia de aprendizaje de los alumnos [3].

En este trabajo presentamos una investigación [16] que desarrolló un nuevo instrumento para evaluar un tipo de conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas en la escuela elemental que a pesar de estar bien identificado había resultado difícil de evaluar confiablemente en test de opciones múltiples [10]: el conocimiento de cómo los alumnos aprenden esas matemáticas (CAM). Este conocimiento es muy distintivo de la profesión de enseñar y teóricamente depende fuertemente de la práctica. Idealmente los ítems de este constructo no los podría responder correctamente quién no haya tenido experiencia en aula.

Simultáneamente se validó en Chile una prueba del proyecto LMT. La aplicación de ambas pruebas a la misma población de profesores en ejercicio y en formación, permitió diferenciar las componentes del conocimiento evaluadas y estudiar la estructura del conocimiento matemático para enseñar. En la prueba LMT aplicada distinguimos los ítems que evalúan el conocimiento matemático especializado en la enseñanza (CE) del conocimiento matemático común a otros usuarios de la matemática (CC). Esta distinción sumada al nuevo test de conocimiento de alumnos y matemáticas (CAM), permitió identificar factores más vinculados al ejercicio profesional de la enseñanza de la matemática, que no se deduzcan exclusivamente del conocimiento matemático. La posibilidad de evaluar confiablemente estos factores permite distinguir la contribución de la práctica en la preparación de profesores competentes y destacar la profesión docente como un trabajo complejo y muy especializado.

Desarrollo

Evaluar el conocimiento del profesor acerca de como sus alumnos aprenden matemáticas es muy complejo pues muchas de las dificultades que enfrentan los alumnos dependen de la enseñanza. Así, lo que se considera un error común de los alumnos, puede no serlo en un curso particular donde el profesor haya implementado métodos de enseñanza que eviten que ese error se produzca. Puede ocurrir entonces que ese profesor no identifique ese error como un error común y se considere errónea su respuesta a una pregunta tendiente a reconocerlo. Por otra parte los buenos ítems para medir este conocimiento no deben depender del conocimiento matemático del profesor, pero es imposible evaluar este conocimiento sin el contexto matemático. Así, la construcción de ítems resultó extraordinariamente laboriosa. Hubo que conformar equipos con personas con muy diversas experiencias para construir preguntas, que en su mayoría quedaron de respuesta abierta, las que se pilotearon entre profesores de aula reconocidos por su excelencia. A partir de sus respuestas se elaboraron las alternativas para preguntas de selección múltiple. Estas preguntas se pilotearon y a partir del piloto se seleccionaron 61 preguntas que formaron la prueba CAM. Esta prueba durante los años 2011 y 2012 se aplicó a una gran muestra de profesores y estudiantes de pedagogía (N=287, de los cuales 209 eran profesores de básica y 78 estudiantes de pedagogía básica). Además a esta muestra se le aplicó también la prueba LMT que mide el CC y CE.

Por otra parte aunque la prueba de LMT ya esta validada en otros países es importante comprobar que sirve en el contexto chileno, ya que hay muchos factores culturales que pueden afectar el desempeño de una prueba en diversos países. En el caso de esta prueba se hizo un proceso iterativo de traducción, en el cual se revisó y se adaptó cada ítem al contexto chileno.

A continuación se presentan los análisis hechos a cada prueba, que las validan como instrumentos de medición y un análisis de componentes principales con ambas pruebas para ver como se relacionan los constructos que miden (CAM, CC y CE).

Análisis psicométrico de la prueba CAM

Para ver que la prueba tuviera un buen comportamiento como instrumento de medición se realizaron diversos análisis psicométricos. Primero se aplicó un análisis de componentes principales (ACP). En una prueba que mide un solo constructo el ACP debiera producir sólo un factor relevante (que represente al constructo). En el caso de esta prueba este análisis produjo más de un factor, siendo el factor que explicaba más varianza el que representaba al constructo y el resto de los factores representaban grupos de ítems que tenían un enunciado en común. Aclaramos que esto no se produjo en todos los ítems con enunciado en común.

Por otro lado se realizó un análisis de confiabilidad y de correlación ítem-test. Una medida de calidad de una prueba consiste en tener una confiabilidad alta y lo ideal es que los ítems sean lo más discriminantes posible. Un ítem es discriminante si una persona con alto nivel de constructo (en este caso de

conocimiento de alumnos y matemáticas) responde bien al ítem y una persona con bajo nivel lo responde incorrectamente. La discriminación se mide a través de la correlación entre el ítem y el puntaje de la prueba.
En la prueba CAM los ítems con menor correlación ítem-test coincidieron con los ítems que formaban a los factores indeseables en el análisis de componentes principales. Estos ítems se eliminaron y se formó una nueva prueba CAM depurada con 28 ítems. Las características técnicas de la nueva prueba se detallan en la Tabla 1.

Prueba CAM depurada	
Confiabilidad (Alfa de Cronbach)	0.79
Discriminaciones de los ítems (correlación ítem-test)	Todas fueron mayores a 0.25
Análisis de componentes principales	Se produjo sólo un factor, todos los ítems tenían una correlación significativamente positiva con este factor.

Tabla 1: Características psicométricas de la prueba CAM de 28 ítems

Las propiedades psicométricas de la nueva prueba CAM permiten utilizarla como instrumento de medición ya que tiene una buena confiabilidad y todos sus ítems aportan a la medición del constructo. Sin embargo como se eliminaron ítems se verificó que este proceso no haya eliminado alguna de las facetas del conocimiento de alumnos y matemáticas que se evalúan en la prueba. Se analizó el contenido de los ítems seleccionados y de los eliminados y se determinó que los ítems seleccionados siguen representando de manera adecuada al constructo.
En efecto, los 28 ítems que forman parte de la selección, cubren los distintos matices del constructo:

- Identificar errores comunes de los alumnos, por ejemplo para incluirlos como alternativas en preguntas de selección múltiple, junto a la respuesta correcta.
- Identificar causas de errores. Esto incluye identificar preconcepciones erróneas, analogías que producen conflictos cognitivos, prácticas pedagógicas usuales que inducen a errores como por ejemplo, mostrar solo casos prototípicos y una gama limitada de ejemplos que limitan un concepto. Los ítems que evalúan este aspecto pueden tener varios matices por ejemplo incluir como alternativas causas de error que son posibles y comunes pero que no explican el error específico mostrado.
- Saber cómo piensan los niños, lo que incluye ordenar una secuencia de ejercicios según su dificultad para los alumnos e identificar argumentos que son suficientes para producir convicción y cuáles no.
- Identificar ventajas, limitaciones o errores inducidos por representaciones o modelos usuales, así como afirmaciones o definiciones comunes.

En conclusión la prueba CAM depurada cumple los estándares técnicos de calidad de medición y mide las distintas facetas del conocimiento matemático para enseñar.

Análisis psicométrico de la prueba LMT

La prueba LMT ya ha sido estandarizada y probada en diversos contextos internacionales. Sin embargo nunca se había validado en población chilena, por lo que en esta prueba se realizaron los mismos análisis psicométricos hechos sobre la prueba CAM.

El análisis de componentes principales sobre la prueba LMT produjo sólo un factor, lo que muestra que la prueba mide una dimensión. Se calcularon además las correlaciones ítem-test y se eliminaron 7 ítems cuya correlación ítem-test era baja. El resultado fue una prueba muy confiable donde todos los ítems aportan significativamente a medir el constructo. A esta prueba la llamamos prueba LMT depurada.

Prueba LMT depurada	
Confiabilidad (Alfa de Cronbach)	0.93
Discriminaciones de los ítems (correlación ítem-test)	Todas fueron mayores a 0.26
Análisis de componentes principales	Se produjo sólo un factor, todos los ítems tenían una correlación significativamente positiva con este factor.

Tabla 2: Características psicométricas de la prueba LMT de 54 ítems.

Análisis factorial de las pruebas CAM y LMT

Con las pruebas depuradas se obtiene una medición confiable del conocimiento de alumnos y matemáticas y del conocimiento matemático para enseñar común y especializado. Además, por la selección de ítems hecha a partir de las correlaciones ítem-test todos los ítems de las pruebas depuradas aportan a la medición (es decir no hay ítems que sean principalmente error o que no midan los constructos). Esto permite analizar el comportamiento del conjunto de los ítems de la prueba CAM y LMT y con esto poder determinar cómo interactúan estas pruebas. Poder hacer este análisis es tremendamente importante, ya que no es evidente que los conocimientos que miden estas pruebas se puedan distinguir ni se sabe a priori cómo interactúan.

Se analizó el comportamiento en conjunto de las pruebas depuradas a través de un análisis de componentes principales sobre los ítems de CAM y LMT juntos (en total 28+54=82 variables). Se presenta el plano factorial en la Figura 2. Las estrellas son los ítems de CAM, los ítems de LMT son los círculos y los triángulos. La prueba de LMT tiene dos símbolos porque se distinguió entre sus ítems si eran de conocimiento matemático para enseñar común (círculos) o especializado (triángulos).

En el plano factorial (Figura 2) se produce una separación entre los ítems de la prueba CAM y la prueba LMT. Esto muestra que se pueden distinguir los constructos. Además los ítems de LMT de conocimiento matemático especializado (triángulos) se sitúan entre medio de los ítems de CAM y de los ítems de LMT de conocimiento común, esto coincide con la conexión con la práctica que tiene cada conocimiento. Teóricamente CAM es el conocimiento más asociado a la práctica y el conocimiento común el menos (ya que este último es un conocimiento que cualquier persona que sepa matemáticas debiera tener). Lo interesante es que el conocimiento matemático especializado de la tarea de enseñar, que es completamente disciplinar, se sitúa entre el CAM y el conocimiento común. Esto tiene sentido ya que a pesar de que el conocimiento específico es puramente disciplinar, solo se hace presente y necesario en la tarea de enseñar, luego está más asociado a la práctica que el conocimiento común. Con esto el factor 2 ordena a los ítems de ambas pruebas según su relación con la práctica y separa al conocimiento de alumnos y matemáticas del conocimiento matemático.

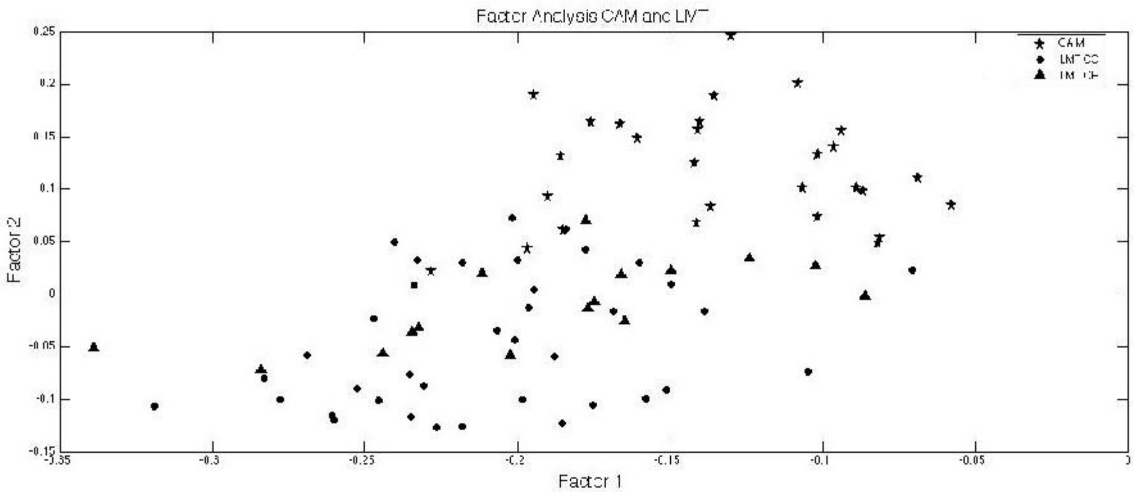


Figura 2: Plano factorial del análisis hecho sobre los ítems de las pruebas CAM y LMT depuradas

Conclusiones

Se validaron instrumentos extranjeros que se han convertido en un estándar internacional, en el contexto chileno, lo que contribuye a su valor universal. Simultáneamente se logró evaluar de manera confiable y válida un factor importante del conocimiento pedagógico del contenido, que había resultado difícil en intentos previos. Los resultados obtenidos muestran la existencia de distintos tipos de conocimientos específicos de la tarea de enseñar matemáticas que son claramente distinguibles. Particularmente interesante resulta comprobar la presencia de componentes del conocimiento matemático para enseñar que no se deducen del conocimiento disciplinar puro. Estas componentes son características de la práctica en aula y conforman por lo tanto un conocimiento profesional propio de la docencia. Contar con instrumentos adecuados para evaluarlo permite distinguir la contribución de la práctica en la preparación de profesores competentes y monitorear su desarrollo durante la formación inicial de profesores. En el marco de los programas que se ejecutan en nuestro país para mejorar la calidad de la formación de los profesores, resulta necesario contar con herramientas que aporten a evaluar la eficacia de estos esfuerzos y a reconocer la tarea de enseñar matemáticas, aún a niveles básicos de escolaridad, como un trabajo complejo y muy especializado.

Agradecimientos
Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 1090292, por el proyecto CIE 05 del Centro de Investigación Avanzada em Educación y por el proyecto Basal del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile

REFERENCIAS:
[1] BALL, D. L., HILL, H. C., BASS H. (2005), *Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? American Educator*, 29(1), pp. 14-17, 20-22, 43, 46.
[2] BALL, D. L., THAMES, M. H., PHELPS, G. (2008), *Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407.
[3] BAUMERT, J., KUNTER, M., BLUM, W., BRUNNER, M., VOSS, T., JORDAN, A., KLUSMANN, U., KRAUSS, S., NEUBRAND, M., TSAI, Y.M. (2010). *Teacher's Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress*. *American Education Research Journal*, 47(1), pp. 133-180.
[4] COLE, Y., (2012) Assesing elemental validity: the transfer and use of mathematical knowledge for teaching measures in Ghana, ZDM- The International Journal on Mathematics Education, Volume 44 Issue 3, July 2012, pp: 415- 426

[5] DELANEY, S., (2012) A validation study of the use of mathematical knowledge for teaching measures in Ireland, ZDM- The International Journal on Mathematics Education, Volume 44 Issue 3, July 2012, pp: 427- 441.
[6] FAUSKANGER, J., JACOBSEN, A., MOSVOLD, R., BJULAND, R., (2012), Analysis of psychometric properties as part of an iterative adaptation process of MKT items for use in other countries, ZDM- The International Journal on Mathematics Education, Volume 44 Issue 3, July 2012, pp: 387- 400.
[7] HILL, H., BALL, D. L., SCHILLING, S. (2004), *Developing Measures of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching*. The *Elementary School Journal*, 105(1), pp. 11-30.
[8] HILL, H. C., BALL, D. L. (2004), *Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), pp. 330-351.
[9] HILL, H. C., ROWAN, B., BALL, D. L. (2005), *Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement*. *American Educational Research Journal*, 42(2), pp. 371-406.
[10] HILL, H.C., BALL, D.L., SCHILLING S.G., (2008) *Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), pp. 372-400
[11] HILL, H. C., BLUNK, M.L., CHARALAMBOUS, C.Y., LEWIS, J. M., PHELPS, G. C., SLEEP, L., BALL, D.L., (2008) *Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. Cognition and Instruction*, 26(4), pp. 430–511.
[12] KRAUSS, S., BRUNNER, M., KUNTER, M., BAUMERT, J., BLUM, W., NEUBRAND, M., JORDAN, A. (2008), *Pedagogical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers*. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), pp. 716-725.
[13] KRAUSS S., BAUMERT, J., BLUM, W. (2008), *Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs*. *Journal ZDM,* 40(5), pp. 873-892.
[14] KWON, M.,THAMES, M.H., PANG, J., (2012), To change or not to change: adapting mathematical knowledge for teaching (MKT) measures for use in Korea, ZDM- The International Journal on Mathematics Education, Volume 44 Issue 3, July 2012, pp: 371- 386.
[15] NG, D., (2012) Using the MKT measures to reveal Indonesian teachers' mathematical knowledge: challenges and potentials, ZDM- The International Journal on Mathematics Education, Volume 44 Issue 3, July 2012, pp: 401- 414
[16]VARAS, L., LACOURLY, N., LÓPEZ, A., GIACONI, V., (2012) "Evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido para enseñar matemáticas elementales", Enseñanza de las Ciencias, Núm.31.1; pp. 171-187.

Sesión Invitada EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 5. APRENDIENDO EL ÁLGEBRA BÀSICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA GEOMETRÍA TRADICIONAL

Fredi Veas Marín, Armando Mallegas Vera
Facultad de Ciencias Humanas
Universidad Arturo Prat. Iquique
fveas@unap.cl amallegas@unap.cl

Resumen

La enseñanza del álgebra se ha propuesto iniciarse en el Quinto Año de Educación Básica, de acuerdo a las Bases Curriculares dadas a conocer a partir de mayo de 2013. Esto significa posesionarse del primer eslabón para introducirnos en el mundo científico y tecnológico que hoy nos envuelve a través de la globalización. Se propone iniciar dicho estudio mediante la utilización de los elementos básicos de la geometria euclidiana tales como punto, rectas, planos, cuadrados, rectángulos, etc, nuestra propuesta se sustenta en que el mundo es geométrico y el alumno es muy concreto de forma que en bases a los elementos de su contexto podemos proponer que se introduzcan en el estudio de los elementos básicos del álgebra tradicional.

Abstract

The teaching of algebra is proposed to start in the Fifth Year of Basic Education, according to the Curriculum Bases released from May 2013. This means possession of the first link to enter the world of science and technology that surrounds us today through globalization. This study is proposed to begin using the basic elements of Euclidean geometry such as point, lines, planes, squares, rectangles, etc. Our proposal is based on that the world is geometric and student is very specific way in bases its context elements we propose to introduce a higher stage of knowledge as is the study of the basic elements of traditional algebra.

INTRODUCCIÓN

Sabemos por experiencia que los sistemas educacionales afrontan grandes retos, por una parte tienen el propósito de consolidar una escuela comprensiva y, por otra, formar sujetos autónomos que sean capaces de tomar decisiones. Actualmente, considerando los resultados logrados en el SIMCE podemos preguntarnos ¿nuestros alumnos, en la Educación Básica, son sujetos que ingresan a un sistema en el cual aprenden a reflexionar, a vivir en sistemas multiculturales, a respetar las diferencias individuales, a adquirir valores tales como la honestidad, el respeto, etc?.

La matemática tiene una responsabilidad muy importante en este aspecto ya que le corresponde capacitar a nuestra juventud en el desarrollo del pensamento reflexivo, en habilidades, en actitudes, en valores y motivaciones que cada uno de ellos se ponen en acción en un contexto concreto para hacer frente a las demandas peculiares de cada situación.

En este aspecto, cuando los alumnos de la Educación Básica se enfrentan, en Quinto Año, con el inicio del álgebra básica tiene, para el común denominador de ellos, complicaciones que afectan su desarrollo psicológico. Aunque el álgebra tiene como propósito de que los alumnos internalicen procesos que involucran regularidades, comparaciones, sustituciones, abstracciones en muchas ocasiones ellos se ven envueltos en procesos que dan cuenta que la matemática es aprender fórmulas, procedimentos y símbolos para lo cual gran parte de ellos no se encuentran ni espiritual ni psicológicamente preparados. Mientras que todos sabemos que la matemática tiende a entregarnos explicaciones de fenómenos inciertos de la vida diaria, permitiendo que el pensamiento estadístico y probabilístico se haya constituído en un componente destacado de lo cotidiano.

La presente ponencia presenta una visualizaciòn geométrica que no es innovadora ya que ella la conocí cuando cursaba el segundo año de humanidades en el Liceo de Hombres de Antofagasta en épocas pretéritas. Sin embargo, es una buena estrategia metodológica que nos visualiza gráficamante tanto los axiomas, teoremas como corolarios que reglan las diferentes operaciones algebraicas. Sustantivamente está dirigida para aquellas o aquellos estudiantes de Educación Básica cuyo pensamiento concreto les puede ayudar a adquirir habilidades de reflexión y que no poseen las habilidades en el ámbito de la matemática. Es decir, esperamos que la o el alumno perciba a la matemática en su entorno y que utilice los conocimientos adquiridos para describir nuevas aplicaciones operacionales algebraicas. Este descubrimiento de la utilización de la matemática conduce irremediablemente a la internalización de dichos procesos, lo que serán de mucha utilidad en el futuro.

El propósito que regula el inicio de la enseñanza del álgebra en el Quinto años de Educación Básica tiende a enfatizar el transito entre los diferentes niveles educacionales, traduciendo problemáticas de la vida diaria en lenguaje formal y utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas, obteniéndo con ésto que las expresiones algebraicas adquieran sentido para las y los estudiantes.

El enfoque metafórico en matemática, en esta ocasiòn, consiste en abordar experiencias próximas a las o los alumnos para que comprendan los símbolos matemáticos. Es decir, ordenar los números en una recta, que denominamos recta numérica, explicar la suma algebraica como desplazamiento hacia la derecha en una recta numérica. Este proceso permite señalar algunas ventajas para el aprendizaje: relacionar el conocimientos intuitivo con una explicación formal de las diversas problemáticas; ligar niveles de representación en forma concreta, simbólica; potenciar la comprensión, la memorización y explicación de las operaciones y conceptos matemáticos; y, brindar a las expresiones algebraicas un significado muy cercano a las y los alumnos.

Finalmente es menester mencionar que la matemática entrega las herramientas adecuadas, únicas y poderosas para comprender, para entender el entorno de las o los alumnos. Dichas herramientas comprenden el razonamiento lógico, el pensamiento abstracto y las habilidades para resolver y modelar el entorno de las o los alumnos.

DESARROLLO

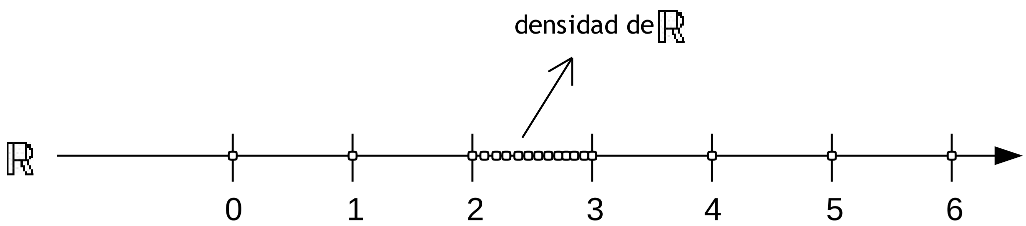
En la organización curricular de los Planes y Programas de estudio en Matemática de Educación Básica se pretende desarrollar las habilidades del pensamiento matemático consistentes en resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar resultados orientados a la adquisición de nuevas capacidades, conceptos y la visualizaciòn pragmática de los conocimientos en diversos contextos.

En los ejes temáticos considerados en esta ponencia corresponden a una introducción al álgebra en temas tales como: Recta numérica. Expresiòn algebraica. Monomio, términos semejantes. Binomio, o bien dos términos algebraicos no semejantes. Trinomio, es decir, tres términos homogéneos. Polinomio, suma algebraica de términos semejantes. Suma Algebraica. Producto algebraico. Algunos produtos especiales.
Finalmente, en el aspecto actitudinal nos preocuparemos aquellas referidas a actitudes personales y sociales, tanto en el ámbito del conocimientos y en el de la cultura, saber: Expresar y escuchar ideas en formas respetuosas; manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de la matemática; abordar flexible y creativamente la búsqueda de soluciones a problemas; ymanifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico.

El Principio de Triconomía establece que un número es real, o bien el número es positivo, o bien el número es un cero, o bien el número es negativo. Es decir:

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow \quad a = \begin{cases} a > 0 & es \quad positivo \\ a = 0 & es \quad cero \\ a < 0 & es \quad negativo \end{cases}$$

Podemos graficar en una recta numérica horizontal:

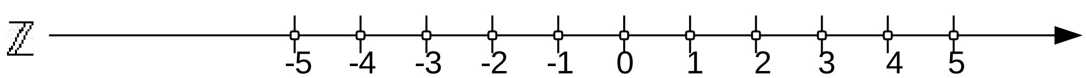


Esto nos señala que en dicha recta horizontal cada sucesión de números de forma tal que desde el Cero (sin considerar el cero) hacia la derecha se indican los números positivos. El cero se encuentra separando los números positivos de los números negativos. Y, desde el cero hacia la izquierda se encuentran los números negativos (sin considerar el cero). Ademàs, de acuerdo a Peano, cada número entero es menor a su sucesor en una unidad, v.gr: 2=1+1; 3=2+1=1+1+1; 4=3+1=1+1+1+1, etc.

Podríamos afirmar que los números enteros forman un conjunto homogéneo, o bien que, son semejantes.

Se define el conjunto de los números enteros, que abreviamos Z, por:

Z={...,-n,...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,,,,,,,,,,n,,,,,,}



Si consideramos en Z las operaciones fundamentales tales como la suma y el producto de enteros podemos concluir que:

A) Cualesquiera que sean a , b ϵ Z, entonces la suma es (a + b) ϵ Z

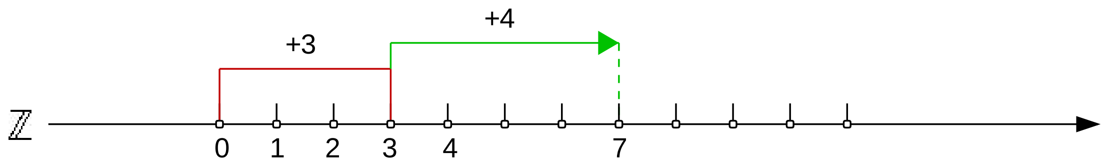
De acuerdo con el Principio de Tricotomía podemos analizar las siguientes posibilidades:

1) a > 0 , b > 0 entonces a + b > 0

Por ejemplo: Sumar 3 con 4. Ambos son positivos y tenemos:

3 + 4 = (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) = 7 · 1 = 7.

Graficamente:

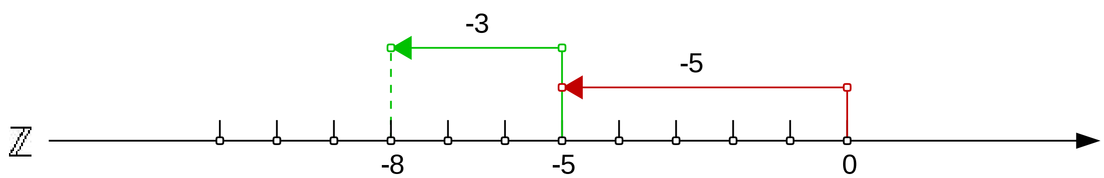


2) a < 0 , b < 0 entonces a + b < 0

Por ejemplo: Sumar -5 con -3. Ambos son negativos, tenemos:

(-5) + (-3) = (- 1 - 1 - 1 - 1 - 1) + (-1 - 1 - 1) =- 8 · 1 = - 8.

Graficamente:



Podemos concluir que, para "sumar enteros de igual signos conservamos el signo y sumamos aritmeticamente las cantidades dadas".

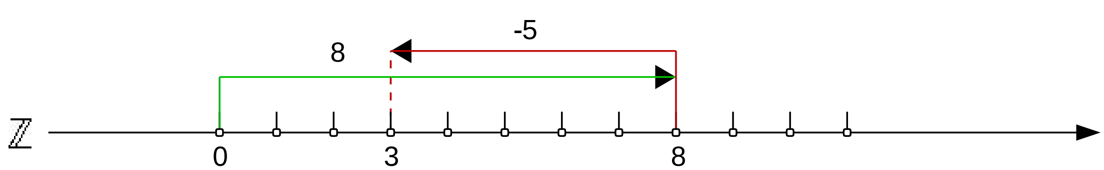
Por ejemplo, (- 3) + (- 6) = - (3 + 6) = - 9
7 + 8 = (+ 15) = 15

3) a > 0 , b < 0 , con IaI > IbI , entonces a + b > 0

Por ejemplo: Sumar 8 con - 5. El mayor numéricamente es positivo, tenemos:

8 + (- 5) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (- 1 - 1 - 1 - 1 – 1) = 3 · 1 = 3.

Graficamente:

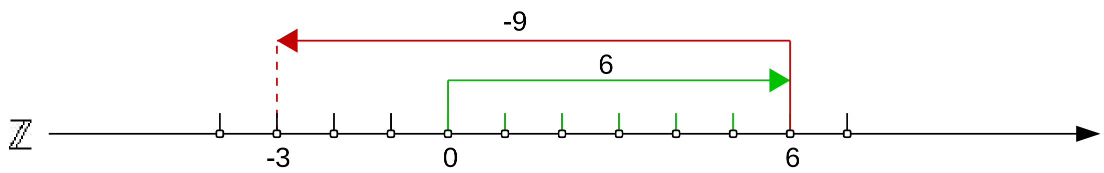


4) a > 0 , b < 0 , con IaI < IbI , entonces a + b < 0

Por ejemplo: Sumar 6 con - 9. El número aritmeticamente es mayor es el negativos, tenemos:

6 + (- 9) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (- 1 - 1 - 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1) = 3 · (- 1) = **- 3.**

Graficamente:



Observando, éstos dos últimos resultados concluímos que “para sumar enteros de distinto signo, conservamos el signo del nùmero aritméticamente mayor, y al número mayor se le resta el número menor”.

Finalmente, si consideramos sumar varias cantidades tanto negativas como positivas. Procedemos de la siguientes forma, sumamos las cantidades positivas, enseguida sumamos las cantidades negativa y nos quedamos en una suma de números de distinto signo, correspondiente a algunos de las posibilidades analizadas anteriormente en 3 o en 4.
Por ejemplo:

Sumar: 14 + (- 7) + (- 21) + 32 + 5 + (- 36) = ?

<u>Solución</u>:

La expresión numérica 14 + (- 7) + (- 21) + 32 + 5 + (- 36), est aonctituida por números positivos y negativos, entonces:

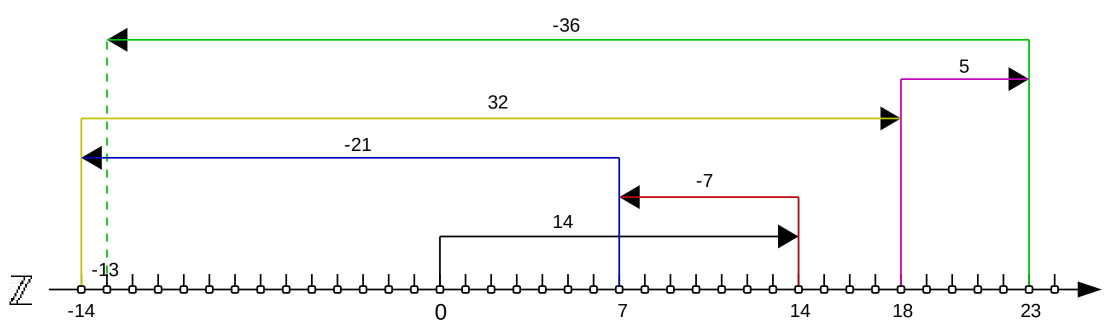
La suma de las cantidades positivas es: 14 + 32 + 5 = 51

La suma de las cantidades negativas es: 7 + 21 + 36 = - 64

Por lo tanto, nuestra expresión algebraica 14 + (- 7) + (- 21) + 32 + 5 + (- 36), se nos reduce a:

14 + (- 7) + (- 21) + 32 + 5 + (- 36) = 51 + (- 64) = - 13.

Graficamente:



Hemos procedidos a sumar enteros. Esta situación ha sido posible ya que los números “enteros” son homogéneos o semejantes (recordemos que el sucesor difiere en una unidad de su antecesor).

Al graficar una recta numérica la representación de dichos números corresponde a números homogéneos o semejantes.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sumar: 12a + 5a + (- 7a) + a + (- 12a) + (- 3a) = ?

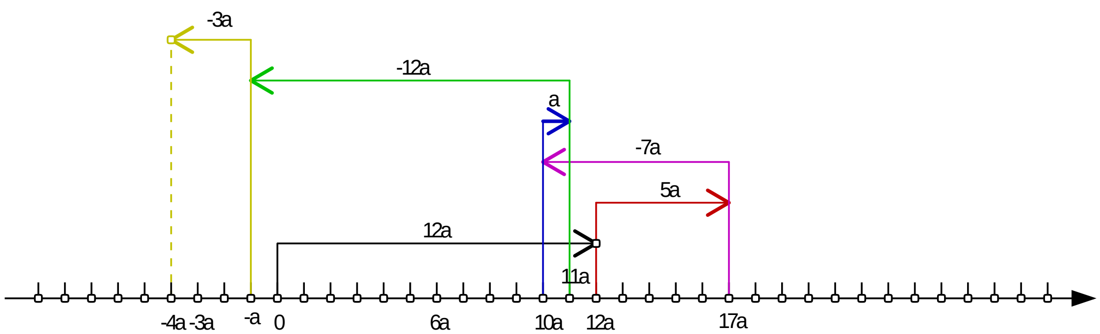
Solución:

1) Numérica:

12a + 5a + (- 7a) + a + (- 12a) + (- 3a) = (12a + 5a + a) + ((- 7a) + (- 12a) + (- 3a)) =
= (12 + 5 + 1)a + ((- 7) + (- 12) + (- 3)) a = 18a + (- 22) = - 4a .

En este ejemplo, que facilmente puede generalizarse, todos los sumandos son términos semejantes u homogéneos, que corresponden a una semejanza: "aes"

2) Gráfica:



Por lo expresado, podemos designar a diferentes recta literales tales como "aby", "xy", "a^2b^3", etc. Sin embargo, cualesquiera que sea la problemática considerada, ella se reduce al sumar los sumandos a un solo término que denominado monomio.

El monomio tiene las siguientes caracteticas:

$$- 4\, x^2y^3z$$

Consta de

Signo negativo : -
Coeficiente : 4
Parte literal : x^2y^3z
Grado del término : 6

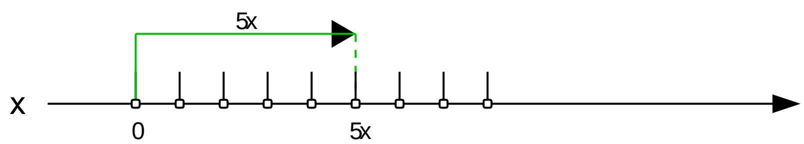
De este modo, el signo puede ser positivo o negativo; el coeficiente está representado por la cantidad numérica; la parte literal constituído por las letras del abecedario; y, el grado es la suma de los exponentes de la letras del abecedario del monomio.

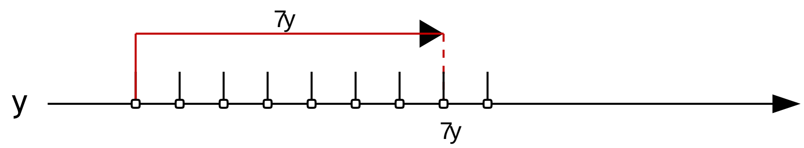
Así, la suma de términos no semejantes o hetereogéneos, se puede analizar si consideremos el siguientes problema:

Sumar $5x + 7y = ?$

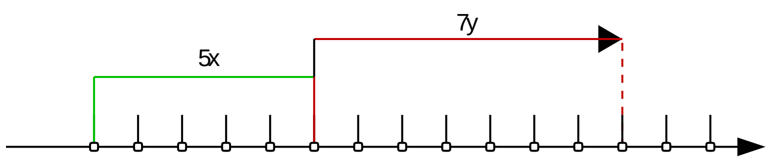
<u>Solución</u>:

Tenemos dos rectas numéricas no semejantes: Una de las “exis” y la otra de las “igriegas”.
cuya representación gráfica es:





Luego, la suma gráficamente de $5x + 7y$ es:



Y, así podríamos sumar diferente expresiones algebraicas, por ejemplo:

Sumar los polinômios: $27m^3 + 125n^2$, $- 9m^2n + 25mn^2$, $-14mn^2 – 8$, $11mn^2 + 10m^2n$

<u>Solución</u>:

$(27m^3 + 125n^2) + (- 9m^2n + 25mn^2) + (-14mn^2 – 8) + (11mn^2 + 10m^2n) =$
$= 27m^3 + 125n^2 + (- 9m^2n + 10m^2n) + (25mn^2 + (-14mn^2) + 11mn^2) + (- 8) =$
$= 27m^3 + 125n^2 + 10m^2n + 22mn^2 - 8$

B) Cualesquiera que sean $a , b \in Z$, entonces el producto es $(a \cdot b) = ab \in Z$

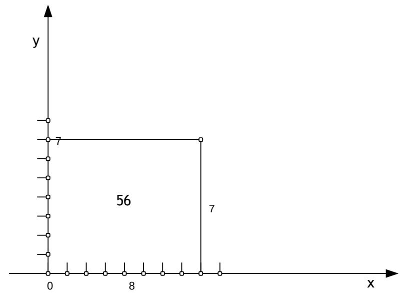
De acuerdo con el Principio de Tricotomía podemos analizar las siguientes posibilidades:

5) $a > 0$, $b > 0$ entonces $ab > 0$

Por ejemplo: Multiplicar 7 por 8. Ambos son positivos y tenemos:

$7 \cdot 8$ = Siete grupo de 8 elementos = $7 \cdot 8 = 56$.

Gràficamente:

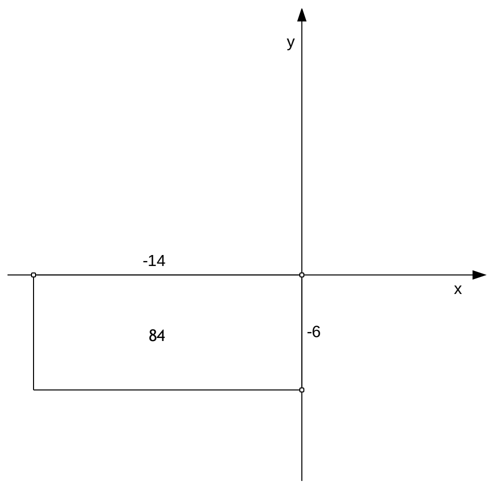


6) a < 0 , b < 0 entonces ab > 0

Por ejemplo: Multiplicar - 14 por - 6. Ambos son negativos, tenemos:

(- 14) · (- 6) = 84.

Gràficamente:



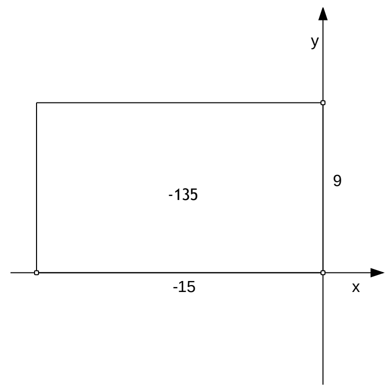
Podemos concluir que, para multiplicar dos enteros negativos, el producto es positivo.

7) a > 0 , b < 0 , entonces el producto ab < 0

Por ejemplo: Multiplicar 9 por – 15, tenemos:

9 · (- 15) = - 135.

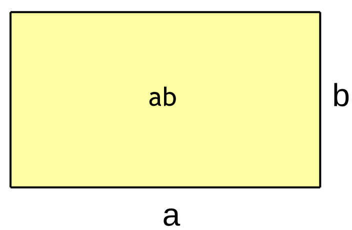
Graficamente:



Observando, este resultado concluímos que "para multiplicar enteros de distinto signo, el producto es negativo".

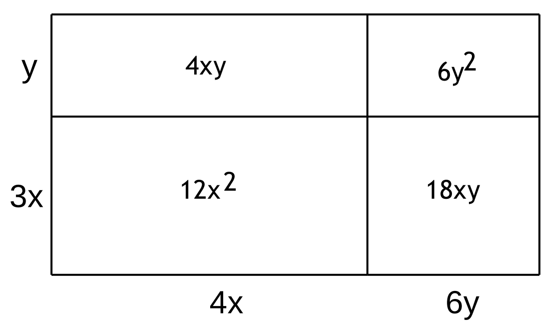
Recordemos el área de un rectángulo. Se ha definido en que dicha área se encuentra multiplicando el largo por el alto. Si el largo es "a" y el alto es "b", entonces el área (A) es igual a "ab", todo esto medido en unidades de longitudes al cuadrado:

Es decir: $A = ab\left[L^2\right]$



Supongamos que el largo $a = 4x + 6y$ y el alto $b = 3x + y$

Entonces gráficamente nos queda que el área ab se puede determinar calculando las áreas de cada uno de los rectángulos en que se particiona el área ab: A_1 , A_2 , A_3 , A_4.



$A_1 = 4x \cdot 3x = 12x^2$, $A_2 = 4x \cdot y = 4xy$, $A_3 = 6y \cdot 3x = 18xy$, $A_4 = 6y \cdot y = 6y^2$

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Reemplazando las áreas A_1, A_2, A_3, A_4 por sus valores algebraicos encontrados:

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 12x^2 + 4xy + 18xy + 6y^2$$

Reduciendo los términos semejantes en “xy”, nos queda:

$$A_{TOTAL} = 12x^2 + 22xy + 6y^2$$

Esta área nos visualiza el producto algebraico:

$$(3x + y)(4x + 6y) = 12x^2 + 22xy + 6y^2$$

que responde al axioma de la distribución del producto respecto a la suma algebraica, que nos dice:

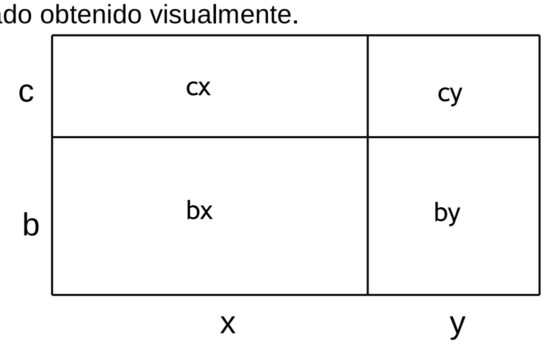
$$\forall\ a,b,c \text{ con } a,b,c \in \Re \quad \Rightarrow \quad a(b+c) = (ab+ac) \in \Re$$

ALGUNOS PRODUCTOS ESPECIALES.

A. Si consideramos que en el axioma de la distributividad del producto respecto a la suma algebraica en los números reales, si hacemos en dicho axioma hacemos que “a = x + y” , entonces nuestro axioma se nos transforma en:

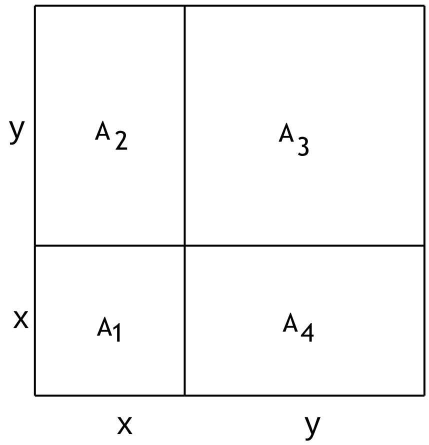
$$\forall\ a,b,c \text{ con } a,b,c \in \Re,\ a = x+y \quad \Rightarrow \quad (x+y)(b+c) = x(b+c) + y(b+c) = bx + cx + by + cy$$

que justifica el resultado obtenido visualmente.



Supongamos que el largo sea $a = x + y$ y el alto sea $b = x + y$

Entonces gráficamente nos queda que el área ab se puede encontrar mediante la suma de las subáreas de los rectángulos A_1 , A_2 , A_3 , A_4:



$$A_1 = x \cdot x = x^2, \quad A_2 = x \cdot y = xy, \quad A_3 = y \cdot x = xy, \quad A_4 = y \cdot y = y^2$$

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Reemplazando las áreas A_1, A_2, A_3, A_4 por sus valores algebraicos encontrados:

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = x^2 + xy + xy + y^2$$

Reduciendo los términos semejantes en "xy", nos queda:

$$A_{TOTAL} = x^2 + 2xy + y^2$$

Esta área nos visualiza el producto algebraico:

$$(x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

Este resultado responde visualmente al desarrollo del cuadrado de un binomio.

B. Consideremos que en $(x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$, tomemos a $y = -y$, entonces, nos queda:

$$(x-y)(x-y) = x^2 + 2x(-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

Hemos determinado que:

$$\forall\, a,b,c \text{ con } a,b,c \in \Re,\ a = x+y \quad \Rightarrow \quad (x+y)(b+c) = x(b+c) + y(b+c) = bx + cx + by + cy$$

Si en esta expresión reemplazamos b por x y c por – y, entonces nos queda:

$$\forall\, x,y \text{ con } x,y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x-y) = x(x-y) + y(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

Es decir: $\forall\, x,y \text{ con } x,y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
que corresponde al producto de la suma de dos expresiones algebraicas por su diferencia.

C. Consideremos el siguiente problema

$$\forall\ x, y\ con\ x, y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)^3 = ?$$

Solución:

Tenemos $\forall\ x, y\ con\ x, y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2$

Pero, tenemos que $\forall\ x, y\ con\ x, y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Entonces nuestra expresión queda como:

$$\forall\ x, y\ con\ x, y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right) =$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right) = x\left(x^2+2xy+y^2\right) + y\left(x^2+2xy+y^2\right) =$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Finalmente, $\forall\ x, y\ con\ x, y \in \Re, \quad \Rightarrow \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Este resultado corresponde a aquel obtenido en el cubo de um binomio.

CONCLUSIONES

Esta ponencia tiene como propósito que en el inicio del estudio del álgebra elemental, las y los alumnos desde Quinto Año de Educación Básica pueden visualizar resultados algebraicos que requieren de un proceso cercano al análisis como a la abstracción. Sin embargo, observamos que el acercamiento desde la perspectiva de la geometria proporciona la posibilidad de mostrar y obtener resultados que normalmente se muestra a alumnas y alumnos que poseen tanto las competencias como las habilidades para utilizar este tipo de análisis y de reflexión matemática.

REFERENCIAS:

[1] "Álgebra para futuros professores de enseñanza básica", Documento elaborado en el marco del Proyecto FONDEF D091-1023, Santiago de Chile, julio 2012.
[2] "Bases curriculares: Matemática", Unidad de Curriculum y Evaluación, Ministerio de Educación, Santiago de Chile, mayo 2013.
[3] "Estándares de aprendizaje", Ministerio de Educación, Santiago de Chile, 2013.
[4] Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, E. John Jr., "Matemática: Razonamiento y Aplicaciones", Octava Edición, Editorial Addison Wesley Longman, Ciudad de México, 1999.
[5] http://www.efdeportes.com/Revista Digital, Ruiz Nebrera, Juan Jesús, "Las competencias básicas en la Educación primaria", Buenos Aires, Año 13-Nº127-Diciembre de 2008.

MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LA ENSEÑANZA MEDIA

Sesión Invitada: MATEMÁTICA EDUCATIVA

Id 6. LAS CÓNICAS EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DESDE LA TEORÍA DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González, Leonardo Solanilla Chavarro
Universidad de La Serena. Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile, Universidad del Tolima. Colombia
danielabonillab@gmail.com marcela.parraguez@ucv.cl leonsolc@ut.edu.co

Resumen

Se sustenta una propuesta didáctica para la comprensión de las cónicas en estudiantes de 16 a 18 años de edad, a partir de una investigación con enfoque cognitivo, desde la teoría los modos de pensamiento de Anna Sierpinska, donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Nuestra problemática se sitúa en la enseñanza-aprendizaje de las cónicas cuando el discurso matemático escolar da prioridad a las ecuaciones cartesianas que las describen. Consideramos que el énfasis en esas ecuaciones, promueve la pérdida de su estructura como lugares geométricos. Como resultado de investigación, se diseña una propuesta didáctica exploratoria en la geometría del taxista, con la convicción de que el aprendiz entiende las cónicas cuando transita entre los distintos modos de comprenderlas: SG (como figuras que las representan), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico).

Abstract

It supports a teaching proposal for the understanding of the Conics in students 16 to 18 years of age, starting from an investigation with cognitive approach, since the theory modes of thought of Anna Sierpinska, where there are three distinct ways of thinking a concept: synthetic-geometric (SG), analytical-arithmetic (AA) and analytic-structural (AE). Our problem lies in the teaching and learning of conics when school mathematical discourse prioritizes Cartesian equations that describe them. We believe that the emphasis on these equations, promotes the loss of its structure as loci. As a result of research, designing an exploratory didactic driver geometry, with the conviction that the learner understands the conical when transitions between different modes of understanding: SG (as figures representing them), AA (as ordered pairs that satisfy an equation) and AE (as locus).

Introducción

La cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) se trata en nuestro país en la asignatura *álgebra y modelos analíticos*, correspondiente al tercer año de enseñanza media (16-18 años). En el tratamiento de las cónicas, el programa de estudio promueve el uso de técnicas analíticas, y se espera que los aprendices puedan “Reconocer la circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan”. (Ministerio de Educación, 2001, p.41), (Figura 1):

i) ¿Qué lugar geométrico en el plano representan las siguientes ecuaciones?

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

Figura 1: Actividad del programa de estudio.

Consideramos que este enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas propicia la pérdida de sus definiciones como lugares geométricos. Específicamente, en la investigación realizada por Bonilla y Parraguez (2012) sobre la elipse, manifiestan, que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico.
Con el propósito de que los aprendices comprendan cada una de las cónicas –como figuras que las representan, como pares ordenados y como lugar geométrico–, nos propusimos como objetivo general de investigación: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito entre estos tres modos de pensar las cónicas SG, AA y AE, para estudiantes de 16-18 años, utilizando como sistema de referencia el plano en la geometría del taxista.

Desarrollo

Marco teórico: los modos de pensamiento

La propuesta didáctica y la investigación se sustentan en el marco teórico, los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000). Ella distingue tres modos de pensar un concepto: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE). Para esta teoría comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde SG, AA y AE (Parraguez, 2012). Por lo tanto, consideramos que para lograr una comprensión de las cónicas es necesario que el aprendiz de estos tópicos transite entre los distintos modos de comprenderla: SG (como figuras que las representan), AA (como pares ordenados que satisfacen una ecuación) y AE (como lugar geométrico), y la geometría que brinda los elementos para tal articulación es la geometría del taxista (Bonilla y Parraguez, 2013). La figura 2, nos muestra el caso de la circunferencia en la geometría del taxista.

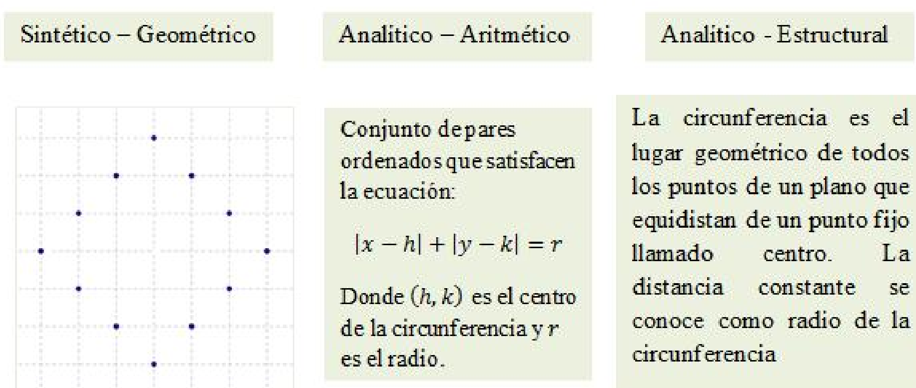


Figura 2: Modos de pensar la circunferencia en la geometría del taxista.

Estos tres modos de pensar, que hemos definido para las cónicas permiten analizar la forma en que los estudiantes las comprenden, además explicitar los enfoques (analíticos, geométricos o estructurales) que priorizan los estudiantes al momento de desarrollar diferentes tareas y mostrar en sus argumentos observables conexiones que logran establecer entre ellos.

Descripción general de la Geometría del Taxista

En este artículo, la Geometría del Taxista es una estructura algebraica y topológica sobre el producto cartesiano $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$, entendido como una versión discreta del plano cartesiano. Al trabajar en los enteros, en lugar que en los reales, se espera simplificar grandemente la situación para los aprendices, ya que se evita la complejidad que encierra la completitud de los números reales. La estructura algebraica de $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$

es aquella de módulo bilateral sobre el dominio entero $\mathbb{Z}$. Sin embargo, lo que marca la diferencia con la Geometría Euclidiana es la parte topológica de la estructura. Como el lector lo habrá entendido seguramente de las explicaciones anteriores, la distancia entre los puntos *(x,y) y (z,w)* de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es $|x\text{-}z| + |y\text{-}w|$. Con esta distancia o métrica, $\mathbb{Z}\mathrm{x}\mathbb{Z}$ posee una estructura de espacio métrico, la cual difiere de la que se obtiene con la métrica euclidiana usual (raíz cuadrada de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas). Por ello, la Geometría del Taxista puede llamarse no-Euclidiana. La diferencia radica en el hecho de que la métrica remeda la forma cómo un taxi recorre una ciudad. Sólo puede recorrer tramos en dirección norte-sur o este-oeste y no puede pasar a través de los bloques o manzanas.

En consecuencia, entendemos como plano cartesiano discreto *P* al conjunto de puntos formados por las parejas ordenadas de números enteros *(x,y)*. A este conjunto lo dotamos de su estructura algebraica natural de módulo sobre $\mathbb{Z}$. Y también lo dotamos con una estructura de espacio métrico, una vez elegida una métrica o distancia *d* para él. Esto se resume diciendo que nuestra estructura *(P,+,d)* está formada por el plano cartesiano discreto, la suma correspondiente al grupo abeliano subyacente al módulo, el producto por escalares y una distancia o métrica *d*. En este artículo, la métrica es la del taxista, o sea,

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_2-x_1|+|y_2-y_1| \quad \text{, para } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \text{ en } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Es interesante detenerse un momento a considerar la compatibilidad entre la estructura de módulo y la estructura métrica o topológica. Si no se resuelve este asunto se pueden presentar dificultades serias para la comprensión. Por ejemplo, las rectas se pueden definir usando Álgebra o usando la métrica. El asunto es tan delicado, que las dos definiciones pudieran no coincidir. Así lo dejan ver los artículos de Moser y Kramer (1982) y Iny (1984), entre otros. Con la Geometría del Taxista no se presenta la fuerte compatibilidad de la Geometría Euclidiana. Para evitar estas dificultades, aquí se toma el siguiente principio de trabajo, que resuelve las dificultades: *"Sí una figura geométrica admite una definición algebraica y una definición métrica, se elige la definición métrica"*.

Por lo tanto, la recta, se definirá como *el lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano P tales que la distancia de uno de ellos a un punto dado* (x_1,y_1) *es igual a la distancia de él mismo a otro punto dado* (x_2,y_2)*. Es decir, una recta es un subconjunto de* $\mathbb{Z}\mathrm{x}\mathbb{Z}$ *de la forma:*

$$L = \{(x,y) \in P \mid d((x,y),(x_1,y_1)) = d((x,y),(x_2,y_2))\}$$

La figura 3, nos muestra ejemplos de rectas en la geometría del taxista.

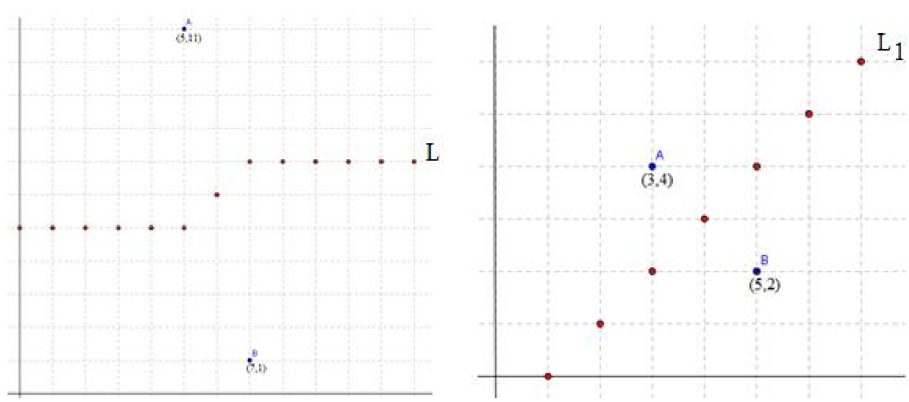


Figura 3: Ejemplos de rectas en la geometría del taxista.

Sobre la propuesta didáctica

Para diseñar la propuesta didáctica, indagamos en las bases epistemológicas de los modos práctico y teórico de pensar una cónica, las cuales nos dio luces sobre los elementos matemáticos que permiten articular estos tres modos de comprenderlas, que estamos especificando.

Destacamos como antecedentes didácticos, la investigación de Parraguez y Bozt (2012), que en una de sus conclusiones, reportan para su objeto matemático de estudio, que aquellos estudiantes que logran transitar entre los modos de pensamiento, muestran en sus argumentos una cercanía con las definiciones formales de los conceptos. Así también, Bonilla y Parraguez (2013) en su estudio sobre la elipse, afirman, que los estudiantes que comprenden la elipse en el modo AE, presentan mayores posibilidades de alcanzar la articulación de éste con los otros modos SG y AA de la elipse.
Un componente importante a destacar en nuestra propuesta didáctica es la métrica discreta propia de la geometría del taxista (Krausse, 1996), puesto que nos entrega importantes beneficios en la comprensión del modo AE a partir de un modo SG. Específicamente Bonilla y Parraguez (2013) reportan que para el caso de la elipse "Los elementos de esta geometría (distancia discreta, puntos como "esquinas") facilitan la comprensión de la propiedad que la define como lugar geométrico "la suma de las distancias de un punto de la elipse a ambos focos es siempre constante", además permite probar que ésta se cumple para todos los puntos de la elipse, situación que no es evidente en la geometría euclidiana."(Bonilla y Parraguez, 2013, p.199).

A partir de los antecedentes mencionados, diseñamos una propuesta didáctica exploratoria, con la finalidad de indagar en los elementos matemáticos que estaría propiciando los tránsitos entre los modos SG- AE- AA de cada una de las cónicas. La propuesta exploratoria, considera como trabajo previo la familiarización de algunos conceptos matemáticos en la geometría del taxista, estos son: plano, distancia entre dos puntos, recta, distancia entre un punto y una recta. Dado que estos son elementos matemáticos, que sustentan la comprensión de las cónicas. En particular, la parábola es la sección cónica que más exige un dominio de estos conceptos.

La secuencia, en su parte inicial promueve el tránsito entre los modos SG a AE de las cónicas, para ello, se muestran las representaciones de cada una de ellas en la geometría del taxista, y se espera que los aprendices sean capaces de identificar características que presentan los puntos que forman la elipse, parábola, circunferencia e hipérbola, en relación a puntos fijos o rectas fijas según sea el caso. Un elemento matemático esencial a destacar en este tránsito de SG a AE, es el concepto de distancia en la geometría del taxista, la utilización de esta métrica discreta ayuda en el entendimiento de las cónicas, como conjuntos de puntos que cumplen una cierta condición. Posteriormente la secuencia aborda el tránsito de AE a AA, con la intensión que los estudiantes puedan obtener ecuaciones de cónicas, conociendo la representación geométrica asociada, y entendiendo las definiciones formales de cada una de ellas.

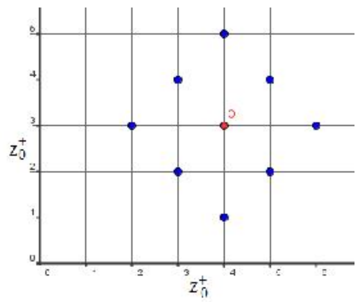
Metodología y resultados

En relación a nuestro objetivo de investigación, realizaremos un estudio de caso, puesto que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad del caso (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), "permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo" (Goetz y Le Compte, 1988, p.69), contribuyendo con ideas que puedan aportar al diseño de la secuencia didáctica.

La unidad de análisis la conforma un grupo de 10 estudiantes de un establecimiento educacional de dependencia compartida (particular subvencionado). Estos estudiantes aprobaron la *asignatura de álgebra y modelos analíticos*. Por lo tanto, ya han trabajado con las cónicas, con un enfoque centrado en las ecuaciones. Actualmente (2013) cursan cuarto año de enseñanza Media. Por otra parte es preciso dejar en claro que los estudiantes accedieron voluntariamente a ser partícipes de esta investigación.

En búsqueda de evidencias empíricas para los tránsitos SG-AE-AA
Las actividades realizadas por los estudiantes muestran evidencias de los tránsitos, para la circunferencia y la elipse.
Hemos seleccionados dos preguntas de nuestra secuencia exploratoria para darla a conocer en esta artículo. En efecto, en la circunferencia, se plantea la siguiente actividad:

Pregunta 1: *En el plano discreto definido* de $\mathbf{z}_0^+ \times \mathbf{z}_0^+$ *con la métrica del taxista. se representa la siguiente circunferencia. El punto O es el centro de la circunferencia.*



En base a la descripción anterior, responde las siguientes preguntas:
a) ¿Qué característica común tienen los puntos de la circunferencia en relación al centro?
b) escribe una definición para la circunferencia.
c) encuentra una ecuación que permita describir la circunferencia dada.

Análisis de respuestas

Las preguntas a) y b) dan cuenta sobre el tránsito SG-AE de la circunferencia, donde todos los estudiantes determinaron características que se acercan a su definición como lugar geométrico (figura 4 y figura 5). Es importante destacar que esta figura geométrica es una de las más trabajadas en el currículo, por lo tanto, es posible que los educandos posean algún conocimiento sobre ella.

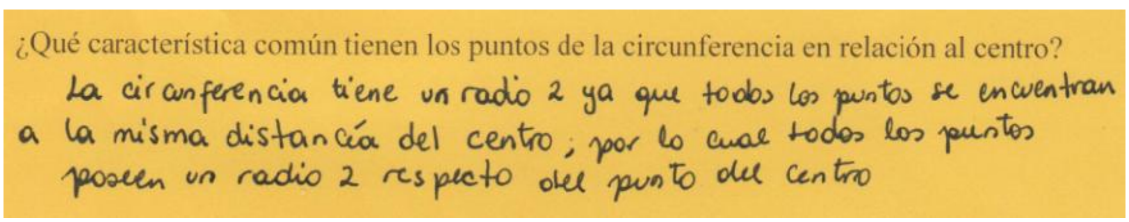


Figura 4: respuesta de estudiante 7.

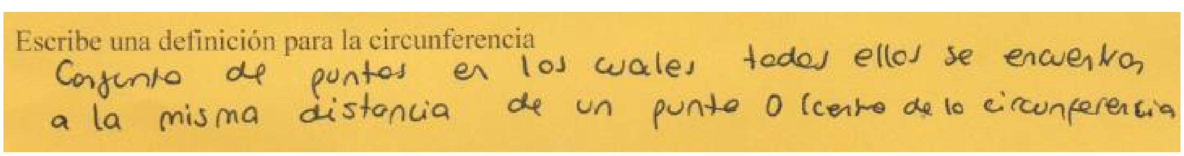
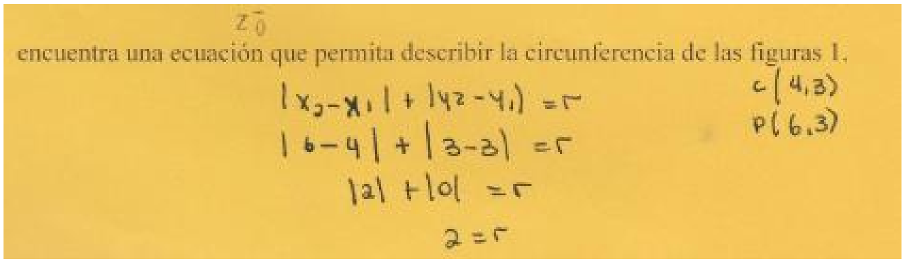


Figura 5: respuesta de estudiante 8.

La pregunta c) busca conectar los modos AE-AA de la circunferencia, en este caso la mayoría de los estudiantes (6 de 10) muestra evidencias de estar en vías de comprender el modo AA de la circunferencia, entienden que los puntos de la circunferencia están a una distancia constante del centro, pero solo prueba para algunos puntos particulares (ver figura 6), solo 4 de los estudiantes logran realizar con éxito la conexión AE-AA, estableciendo una ecuación para todos los puntos de la circunferencia, destacamos en este tránsito la comprensión de la circunferencia como un conjunto de puntos que cumple una ecuación (ver figura 7).



encuentra una ecuación que permita describir la circunferencia de las figuras 1.

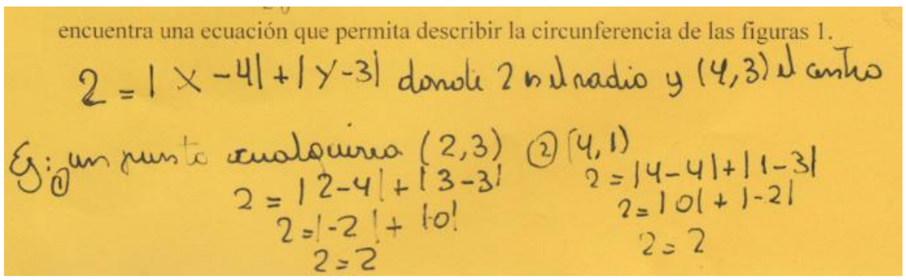
$|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=r$ c(4,3)

$|6-4|+|3-3|=r$ P(6,3)

$|2|+|0|=r$

$2=r$

Figura 6: respuesta de estudiante 5



encuentra una ecuación que permita describir la circunferencia de las figuras 1.

$2=|x-4|+|y-3|$ donde 2 es el radio y (4,3) el centro

Ej: un punto cualquiera (1) (2,3)

$2=|2-4|+|3-3|$

$2=|-2|+|0|$

$2=2$

(2) (4,1)

$2=|4-4|+|1-3|$

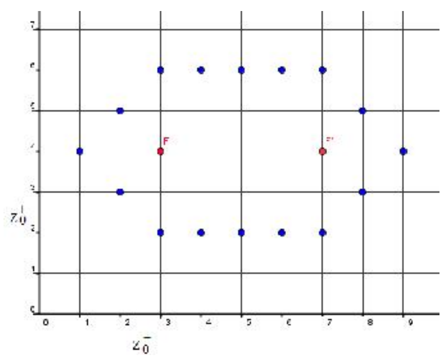
$2=|0|+|-2|$

$2=2$

Figura 7: respuesta de estudiante 1

Pregunta 2: En la secuencia exploratoria se plantea la siguiente actividad, con respecto a la elipse:

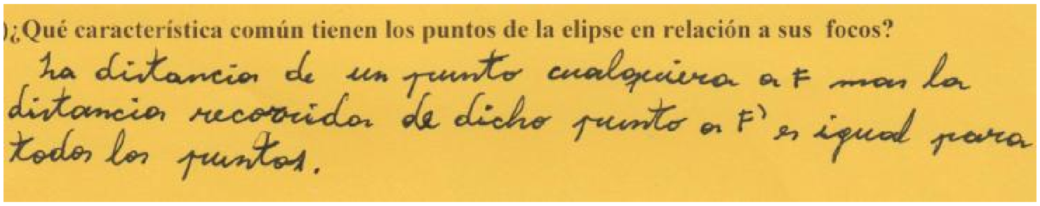
La figura siguiente representa una elipse en la geometría del taxista. (Los puntos F y F´ se llaman focos).



En base a la descripción anterior, responde las siguientes preguntas:
a)¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a sus focos?
b) Escribe una definición para la elipse
c) Grafique una elipse en la geometría del taxista. de focos F(4,2) y F(6,4)
d) Encuentre una ecuación que permita describir la elipse dada.

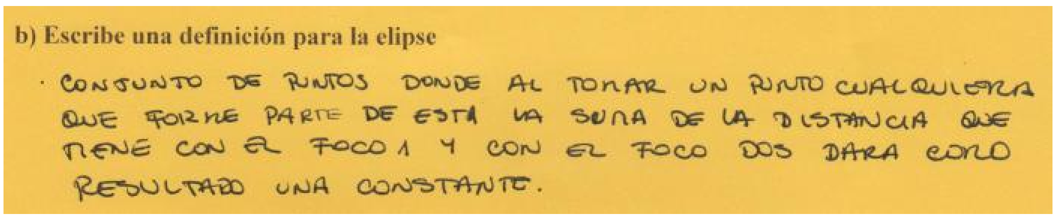
análisis de respuestas

El propósito de las preguntas a) b) y c) es dar cuenta de los tránsitos SG-AE-SG de la elipse. La mayoría de los estudiantes (8 de 10) muestran en sus respuestas evidencias de comprensión del modo AE a partir del modo SG de la elipse, es decir, dada la representación de una elipse identifican la propiedad que caracteriza al conjunto de puntos que la forman, (figura 8 y figura 9).


)¿Qué característica común tienen los puntos de la elipse en relación a sus focos?

La distancia de un punto cualquiera a F mas la distancia recorrida de dicho punto a F' es igual para todos los puntos.

Figura 8: respuesta del estudiante 6.


b) Escribe una definición para la elipse

· CONJUNTO DE PUNTOS DONDE AL TOMAR UN PUNTO CUALQUIERA QUE FORME PARTE DE ESTA LA SUMA DE LA DISTANCIA QUE TIENE CON EL FOCO 1 Y CON EL FOCO DOS DARA COMO RESULTADO UNA CONSTANTE.

Figura 9: respuesta del estudiante 3.

Con respecto al tránsito AE-SG de la elipse, el cual se evalúa en la pregunta c), la mayoría de los estudiantes (7 de 10) logra graficar elipses, para ello se sitúan en un modo AE de la elipse, puesto que los focos están ubicados en distinta filas y columnas y no le es suficiente con recurrir a propiedades geométricas como la simetría, (ver figura 10).

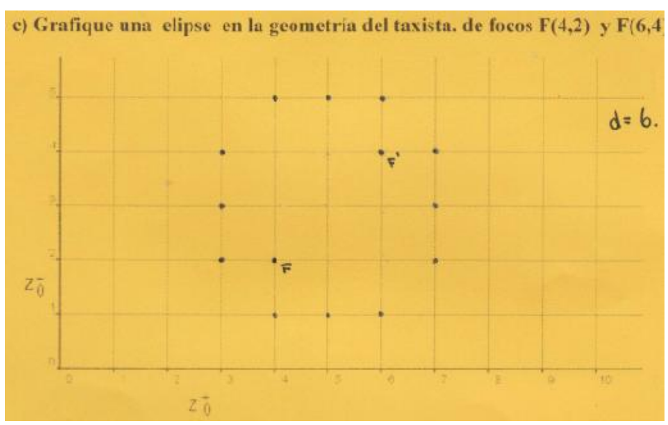


Figura 10: respuesta del estudiante 6.

En relación a la conexión en los modos AE -AA, la mayoría de los informantes (7 de 10) muestra evidencias de estar en vía de comprender el modo AA, prueban a través de las distancias la propiedad que define la elipse, pero no logran establecer una ecuación, (ver figura 11) El resto de los estudiantes (3 de 10) son capaces de establecer una ecuación para todos los puntos que forman la elipse, (ver figura 12).

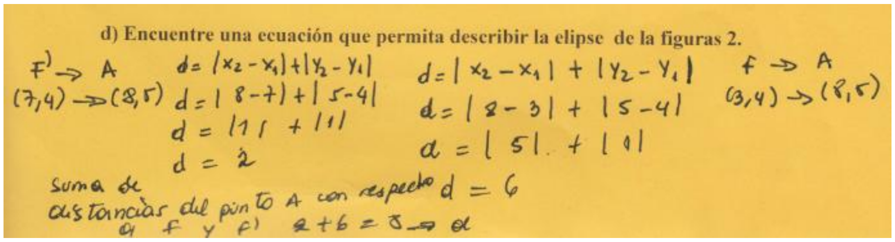


Figura 11: respuesta del estudiante 2.

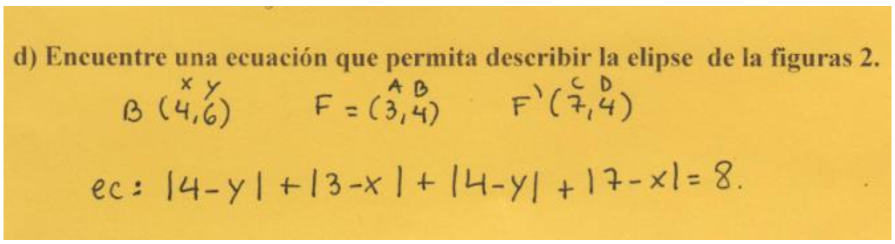


Figura 12: respuesta del estudiante 10

Es importante destacar que los estudiantes pueden mostrar que un punto específico es parte de la elipse, sin embargo, la dificultad de los estudiantes radica en generalizar un punto de la elipse, es decir, si *(a,b)* es un punto ¿cómo se muestra que ese punto es parte de la elipse? Por otro lado, evidenciamos que unos de los elementos que favorecen la conexión entre los modos de comprender la elipse es la concepción del conjunto solución de una ecuación. Además damos cuenta, que si bien los estudiantes han trabajado las cónicas en la geometría euclidiana, las definiciones presentadas en la actividad exploratoria acuden al concepto de lugar geométrico, por lo tanto, es posible que las definiciones de elipse, en la geometría del taxista como lugar geométrico se hayan construido a través de las actividades realizadas en el mismo instrumento exploratorio.

Conclusiones

En relación a la secuencia exploratoria realizada, damos cuenta de la factibilidad del tránsito entre los modos SG y AE de la circunferencia y elipse, donde el concepto de distancia es fundamental como elemento matemático que conecta ambos modos. Por otra parte en la interacción entre los modos AE y AA evidenciamos que los estudiantes presentan dificultades para plantear la ecuación, si bien la comprensión del modo AE es esencial para llegar a obtener las ecuaciones, también es importante que los aprendices comprendan el concepto de conjunto solución de una ecuación, y que cuenten con herramientas analíticas que permitan generalizar, por ejemplo, identificar un punto en el plano como *P(x,y)*.

Sobre lineamientos a seguir en la investigación, a partir de las evidencias empíricas con sustento teórico, obtenidas en el estudio exploratorio, se trabajará en el diseño de la secuencia didáctica para el tratamiento de todas las cónicas, potenciando aquellos elementos que favorezcan la conexión entre los modos de pensamiento para así alcanzar la comprensión del objeto matemático –cónicas–.
Sobre beneficios de la investigación para nuestros aprendices, consideramos por una parte que trabajar las cónicas en la geometría del taxista favorece la comprensión de los objetos matemáticos, a través de sus definiciones como estructuras, situación que trasciende a las representaciones. Además al plantear a los aprendices actividades en geometrías no usuales, los invita a la reflexión, a "hacer matemática",

puesto que pueden establecer cuáles cónicas existen en esta geometría analítica y las cuáles son las condiciones de su existencia, entre otros análisis.

Por otro lado, el desarrollo de las actividades en esta geometría no euclidiana, nos brinda posibilidades al tratamiento unificado de las cónicas, es decir, comprenderlas integradamente bajo tres dimensiones: geométrica, analítica y estructural.

Referencias

[1] Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.
[2] Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento.* Alemania: Editorial académica española.
[3] Iny, D. (1984) *Taxicab Geometry: Another Look at Conic Sections*.The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol. 7, No. 10 (Primavera 1984), pp. 645-647.
[4] Krause, E. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York, United States of America: Dover Publications.
[5] Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata.
[6] Moser, J. M. y Kramer F. (1982) *Lines and Parabolas in Taxicab Geometry*. The Pi Mu Epsilon Journal, Worcester, MA. Vol. 7, No. 7 (Otoño 1982), pp. 441-448.
[7] Parraguez, M. y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. Revista REIEC, Revista electrónica de investigación en ciencias ISSN 1850-6666, pp. 49-72.
[8] Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.- L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.
[9] Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática.* Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Sesión Invitada EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 7. FRACTALES EN ENSEÑANZA MEDIA

Victor Estay Glasinovich, Armando Mallegas Vera
Universidad Arturo Prat. Iquique
vestay@unap.cl amallega@unap.cl

Resumen

¿Por qué estudiar fractales? El programa de Estudio de cuarto año de Enseñanza Media comprende dentro de su formación diferenciada conceptos de iteraciones sucesivas y nociones de fractales como ejemplo de figuras de área finita y perímetro infinito. ¿Qué es un fractal? Se proporciona uma definición con sus ejemplos respectivos. ¿Cuáles son las principales aplicaciones de los fractales? Se muestran diferentes tipos de fractales y las aplicaciones y uso en distintos campos. ¿Cómo se genera un fractal? Se propone un programa generador de fractales mediante el uso del software Geómetra.

Abstract

Why to study fractals? The program of Study of fourth year of Average Education understands inside his differentiated formation concepts of successive iterations and notions of fractals as example of figures of finite area and infinite perimeter. What is an fractal? Definition is provided by his respective examples. Which are the principal applications of fractals? There appear different types of fractals and the applications and use in different fields. How is fractal generated? Geometer proposes a generating program of fractals himself by means of the use of the software.

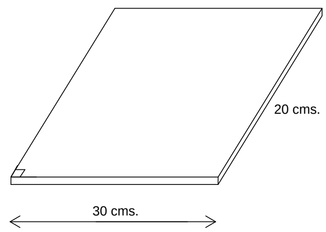
Introducción

¿Por qué estudiar fractales? El programa de estudio para la formación diferenciada en matemática para cuarto año de educación media se orienta a la profundización en algunos temas y a la apertura de nuevos conceptos, siempre en el marco ya definido para la formación general como un proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos.

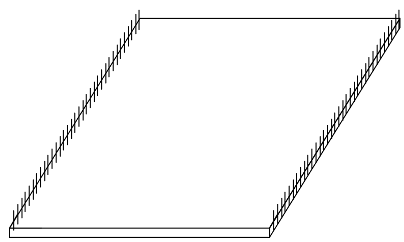
En este programa de estudio se propone como primera unidad un estudio centrado en procesos infinitos, en el que se perfila el contexto de iteraciones sucesivas dando cabida a los fractales, tema que se ha desarrollado en el siglo 20, junto con otros temas ya tradicionales de la matemática como progresiones geométricas, aritméticas y series. Interesa que los alumnos y alumnas continuen el desarrollo de sus capacidades de abstracción, que tengan claras distinciones sobre los casos particulares y las generalizaciones y que lleguen a utliizar algunas técnicas de demostración.

Desarrollo

El ser humano siempre ha tratado de medir (cubrir) las cosas, por ejemplo, un trozo de madera; ¿cuánta agua se necesita para cubrir este trozo de madera? Si se cambia el agua por aceite o por leche, ¿se necesitaría la misma cantidad?



Y si se quiere medir (cubrir) el mismo trozo de madera em forma lineal, vale decir, utilizando lienza. Y se cambia la lienza por lana, ¿se necesita la misma cantidad de lana?



Se pueden dar varios ejemplos de cubrimiento hasta encontrar objetos que tienen áreas finitas pero perímetro infinito, lo cual hace imposible de recorrer la figura que representan estos objetos. Estos son los fractales.

Definición:

- FRACTAL es un objeto semigeométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas.
- El término fue propuesto por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 y deriva del latín fractus que significa quebrado o fracturado.

Características: A un objeto geométrico fractal se le atribuyen las siguientes características:

a) Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
b) Es autosimilar. Su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura, las copias son similares al todo: misma forma pero diferente tamaño.
c) Su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
d) Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

En resumen se puede decir que un fractal es una entidad matemática o conjunto cuya frontera es imposible dibujar a pulso por ser de longitud infinita.

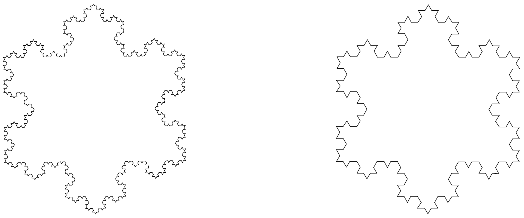
Aplicaciones de los fractales:

COMUNICACIONES	:	Modelado del tráfico de redes
INFORMATICA	:	Técnicas de compresión (Audio y video)
ROBOTICA	:	Robots fractales
INFOGRAFIA	:	Paisajes fractales
MATEMATICA	:	Convergencia de métodos numéricos

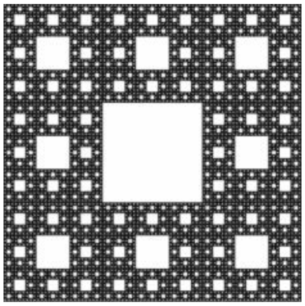
BIOLOGIA	: Crecimiento de tejidos, organización celular, evolución de poblaciones depredador-presa
FISICA	: Transiciones de fase en magenetismo
QUIMICA	: Agregación por difusión limitada
GEOLOGIA	: Análisis de patrones sísmicos, fenómenos de erosión y modelos de formaciones geológicas
ECONOMIA	: Análisis bursátil y de mercado

Algunos fractales conocidos:

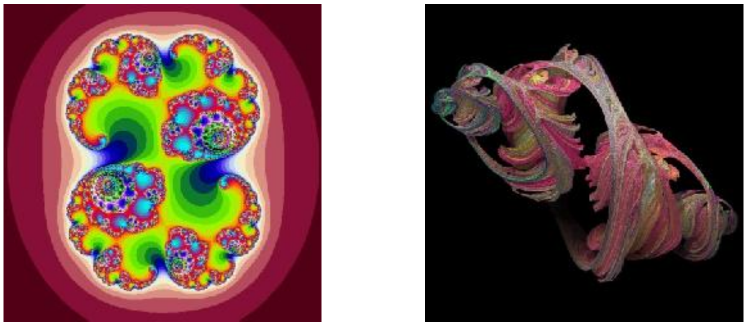
Curva de Koch o copo de nieve (1904)



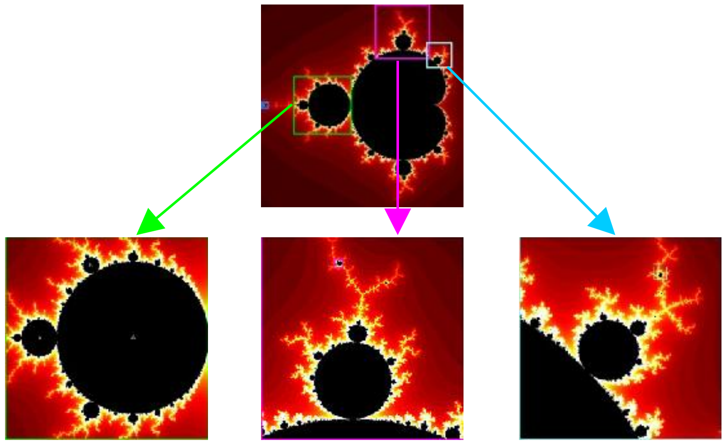
Alfombra de Sierpinski (1915)



Conjuntos de Julia
(Pierre Fatou y Gastón Julia - 1920)



Conjunto de Mandelbrot



Dimensión Fractal:

Dimensión fractal puede definirse en términos del mínimo número de bolas N(£) de radio £ necesarias para recubrir el conjunto.

$$D_F = \lim_{£ \to 0} \frac{\ln N(£)}{\ln\left(\frac{1}{£}\right)}$$

Se puede decir entonces que la dimensión fractal es el límite del cuociente entre la variación del tamaño y el cambio de escala, ambos en escala logarítmica, cuando la escala de medida tiende a cero.

*Generación de fractales con el software Geómet*ra:

Una de las características principales del software Geómetra es la de permitir procesos recursivos y de grabar los pasos que se ejecutan al realizar construcciones geométricas y transformaciones. El conjunto de instrucciones grabadas recibe el nombre de Scripts, es decir, este constituye un pequeño programa que registra todos los pasos en la construcción de objetos geométricos. Al ejecutar un Scripts, se crea un nuevo objeto geométrico equivalente al objeto original, manteniendo todas sus características.

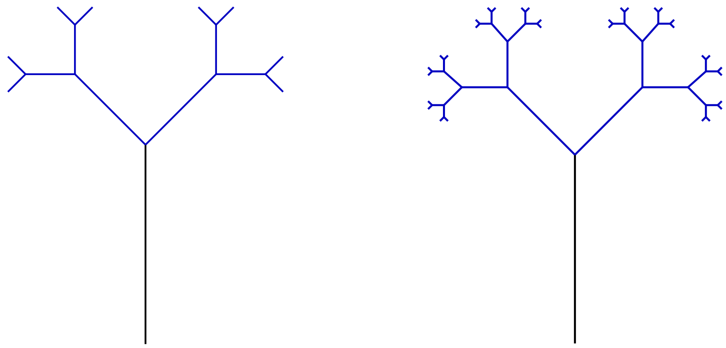
Las características anteriores permiten generar fractales, ya que estos poseen cualidades intrinsicamente recursivas.

Un típico Script que genera un fractal es el siguiente ejemplo:

Dado:
Punto A
Punto B

Pasos:
1. Sea [i] = Segmento entre Punto A y Punto B (azul)
2. Sea [B’] = Imagen de Punto B con dilatación del 150% alrededor de Punto A
3. Sea [B’’] = Imagen de Punto [B’] rotada 45 grados alrededor de centro Punto B
4. Sea [B’’’] = Imagen de punto [B’] rotada -45 grados alrededor de centro Punto B
5. Hacer recursión en B y [B’’]

6. Hacer recursión en B y [B’’’]



Las figuras anteriores fueron generadas com el script del ejemplo. El de la iaquierda tien um nivel de recursividad de 3 pasos y el de la derecha de 5.

Conclusiones

El tema en sí es interesante. Reconocemos un fractal porque lo que vemos a nivel macro lo seguiremos viendo a nivel micro.

El ejemplo típico de fractal es el colifor. Si se corta um colifor, lo que queda es otro colifor de tamaño menor y si seguimos el mismo proceso, seguiremos teniendo un coliflor a menor escala y así sucesivamente.

Quizás no nos hemos dado cuenta pero los fractales están presentes en nuestras vidas a través de la nauraleza, por ejemplo, los árboles, brócoli, nubes, montañas, etc.

Los invitamos a seguir generando fractales y buscar en la naturaleza otros de estos maravllosos fenómenos.

REFERENCIAS:

[1] Programa cuarto año de enseñanza media, Mineduc.
[2] Slide share, Geometría Fractal, Puerto Rico.
[3] Catalina, Udlap, Mx/U_df.

Sesión Invitada: MATEMÁTICA EDUCATIVA

Id 8. ATRIBUCIONES CAUSALES Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Dra. María Del Valle Leo. Máximo Muñoz Reyes
Universidad de Concepción. Universidad Andrés Bello
mdelvall@udec.cl maximunoz@udec.cl

Resumen

La Matemática tiene un importante rol en el desarrollo humano pero no todas las personas piensan que aprender esta disciplina es fácil o agradable. El desarrollo de tal creencia ha conducido a la formación de prejuicios hacia esta disciplina y hacia su proceso de enseñanza y aprendizaje. Las investigaciones realizadas sobre este tema han permitido desarrollar teorías sobre las atribuciones que hacen las personas acerca de lo que les ocurre en su relación con el medio en que se desenvuelven y las experiencias que este les provee; al mismo tiempo se ha podido establecer la relación entre el rendimiento en matemática y algunas variables relacionadas con el alumno, incluyendo la auto-eficacia, las creencias respecto a los conocimientos y las actitudes hacia la disciplina. Esta investigación analiza las atribuciones acerca de matemáticas que hace una muestra de estudiantes de secundaria en Concepción, 8ª Región de Chile.

Abstract

Mathematical knowledge has an important role in the human development but not everybody think to learn this discipline is easy or likely. This misconception produce en especial attitude about how to learn mathematics and how teachers teach mathematics. Different research about this problem goes to establish some theories. These theories try to explain the peoples ‘attribution according different kind of experiences they confront. At the same time researches confirm an important connection between academic goal and different variables as a beliefs and efficiency respect to the discipline. This research analyzes the students ‘attribution in mathematics in a sample of students in the secondary schools of Concepcion, 8ª Region of Chile.

Introducción:

La matemática siempre ha tenido un lugar privilegiado en el desarrollo humano por su presencia práctica en la vida cotidiana, su protagonismo en el ámbito científico-tecnológico y su influencia en el ámbito artístico pero, en general, las personas encuentran que es muy difícil aprender esta disciplina; los estudiantes por su parte afirman que la matemática es lo menos que les gusta aprender. El desarrollo de tales creencias ha conducido a la formación de prejuicios hacia la matemática y hacia su proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las investigaciones desarrolladas en ésta área han logrado establecer que las atribuciones causales en matemática afectan el rendimiento académico, especialmente en alumnos de Enseñanza Media, como también se ha logrado establecer que la atribución es un proceso por el cual las personas interpretan su comportamiento y el de otros asignándoles causas[Barraza,2005].

En el ámbito de la enseñanza formal el rendimiento de un estudiante dependerá, en gran medida, del tipo de atribuciones causales que experimente respecto de sus éxitos y fracasos. Además, estas atribuciones causales tendrán consecuencias relevantes sobre su motivación, pues influyen en las expectativas [Barreiro, 1996, citado por Díaz y Pérez, 2004]. El estudiante, al aprender matemática recibe continuos estímulos asociados con ésta disciplina: problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales entre otros, que le generan cierta tensión. Ante ellos reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa. Ésta es la razón que hace centrar el interés en dilucidar el rol de la variable "atribuciones causales" en el trabajo académico de los estudiantes. Esto permitiría generar estrategias de intervención en aula para el proceso de aprender matemática, que colaboren con la autoestima y la motivación de los estudiantes por aprender matemática teniendo en cuenta que en el país, que hace esfuerzos por mejorar los niveles de logros en la disciplina en calidad para todos, los esfuerzos centrados en metodologías de carácter cognoscitivos no han podido mostrar procesos eficientes y eficaces para revertir la situación actual debido a factores colaterales que dificultan el avance.

Una de las vertientes interesantes de explorar ha sido preguntarse ¿Por qué a los alumnos y alumnas les parece tan difícil aprender matemática?, ¿Cuáles han sido o son sus experiencias de aula que sus percepciones son más bien negativas en relación a esto? Investigaciones que comprometen a la sicología, la orientación escolar, la matemática y la didáctica de la matemática, entre otras disciplinas, han considerado a las "atribuciones causales" como una variable explicativa poco explorada y que, de hecho, está muy ligada al problema de revertir los malos rendimientos en matemática. La bibliografía disponible sobre este tema es amplia y cubre desde instrumentos para establecer y tipificar las atribuciones causales, hasta aspectos relacionados con vulnerabilidad social, económica y cultural, aspectos cognitivos, motivacionales y de rendimiento académico. Ésta investigación tipifica las atribuciones causales de una muestra de ochocientos (800) alumnos y alumnas de Educación Media de la ciudad de Concepción, 8ª Región de Chile. Para ello se aplicó el "Sydney Atribution Scale", cuestionario australiano que fue adaptado a la realidad española y desde allí, a la realidad chilena.

Desarrollo:

Uno de los propósitos de ésta investigación es "Analizar las atribuciones causales ante el éxito y ante el fracaso que generan los estudiantes de Educación Media de la ciudad de Concepción".

Para lograr este propósito se hizo necesario revisar la bibliografía pertinente a fin de tener claridad sobre el comportamiento de la variable a estudiar y las formas que puede asumir, según las circunstancias vividas por los estudiantes. Así se pudo establecer las ideas que a continuación se exponen.

La investigación en Educación Matemática intenta establecer las condiciones de mejora para un aprendizaje de calidad, sin embargo el conocimiento nuevo no logra afincarse definitivamente en nuestras aulas. Se afirma que la principal barrera que se enfrenta en Chile es que no se ha establecido un punto de referencia para, desde allí, elevar los estándares de comportamiento matemático [Barber, 2007]. Algunos apuntan a la Educación Básica por la falta de especialización específica en matemática; otros a la motivación que se genera en el aula, y otros, al funcionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Cada vez que los estudiantes conocen el resultado de alguna situación de logro, atribuyen su éxito o fracaso a distintas causas; estas atribuciones tienen consecuencias cognitivas que se relacionan con las expectativas de éxito en acciones futuras similares, las que a su vez, influyen en las orientaciones que hará el estudiante hacia diferentes tipos de metas. Por ejemplo, si un estudiante obtiene un resultado que no es el esperado y esto se hace repetitivo, tenderá a desmotivarse ante la tarea generando un sentimiento de frustración para acciones futuras. Así las atribuciones que los estudiantes realicen de sus resultados son un factor de importancia sobre todo para la dedicación y rendimiento en tareas similares a realizar posteriormente [Corral de Zurita, 2003]. La experiencia que tienen los estudiantes al aprender matemática le provoca distintas reacciones e influyen en ellas sus creencias y estas provocan una consecuencia directa en el comportamiento en situación de aprendizaje y la disposición para aprender [Gómez-Chacón, 2000, citado por Gamboa y

Pedreros, 2010]. Esta reacción está condicionada por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de la matemática. Estas actitudes y emociones influyen en las creencias y colaboran en su formación, ya sea positiva o negativamente, además las creencias que sostiene el alumno sobre sí mismo en relación con la Educación Matemática tienen una fuerte carga afectiva e incluyen creencias relativas al auto concepto, a la atribución causal del éxito y fracaso escolar y a la confianza. La motivación es, en síntesis, lo que hace que una persona actúe y se comporte de una determinada manera. Algunos patrones atribucionales favorecen la motivación del rendimiento y otros la inhiben, en este sentido, los primeros son adaptativos y los segundos son desadaptativos [González, González-Pienda, Nuñez y Valle, 1996]
El predictor más fuerte de logro en matemática es el de las creencias de los estudiantes sobre su capacidad de rendimiento en la asignatura (autoeficiencia). Mientras mayor es su autoconcepto (éxito por el esfuerzo o capacidad), mayor es su rendimiento académico. Si un docente tiene buenas expectativas de sus alumnos, ayudará a que su rendimiento mejore pues busca acciones para promover su aprendizaje [Ramírez, 2005].

La motivación del rendimiento aumenta cuando el alumno atribuye sus éxitos a la capacidad o al esfuerzo y cuando atribuye sus fracasos a causas internas y controlables, porque de esta forma siente que puede modificar los factores que han provocado ese mal resultado; o bien los atribuye a factores externos (dificultad de la tarea, mala suerte), que le permitan no sentirse responsable del fracaso. Por otra parte, la motivación de rendimiento disminuye en aquellos casos en que el individuo atribuye sus éxitos a factores externos e incontrolables y sus fracasos a falta de capacidad (factor interno, estable e incontrolable). Este patrimonio atribucional es claramente disfuncional, puesto que hará sentirse al sujeto desvalido, incompetente y desesperanzado respecto al futuro al ver disminuida su percepción de control sobre las cosas. La motivación será mayor si el sujeto atribuye sus éxitos a causas internas de preferencia estables como la capacidad y, también si atribuye sus fracasos a causas internas, inestables y controlables por su voluntad, como el uso de determinadas estrategias de aprendizaje [González et al., Op.Cit,1996].

Después de conocer un resultado en alguna situación de logro, los estudiantes atribuirán su éxito o fracaso a distintas causas, estas atribuciones tienen consecuencias cognitivas que se relacionan con las expectativas de éxito en acciones futuras similares, las que a su vez influyen en las orientaciones del estudiante hacia diferentes tipos de metas.

El tipo de atribuciones que los estudiantes realicen de sus resultados va a ser un factor de importancia para la dedicación y rendimiento posterior en tareas similares (Corral de Zurita,Op. Cit. 2003). Las atribuciones a causas relativamente estables como la capacidad o la dificultad de una determinada tarea, producen expectativas de que los resultados van a continuar siendo los mismos, mientras que las atribuciones más inestables, como la suerte, el esfuerzo y el estado de ánimo, producen cambios de expectativas respecto del resultado original [Del Valle, 2008].

Pero la motivación puede ser intrínseca. En aquellas condiciones en las que las recompensas y los castigos extrínsecos son mínimos las personas realizan] La conducta intrínsecamente motivada es aquella conducta que se realiza únicamente por el interés y el placer de realizarla. Podríamos decir que, en general, las personas realizan actividades intrínsecamente cuando practican sus hobbies. La motivación intrínseca se basa en necesidades sicológicas básicas que son responsables de la iniciación, persistencia y reenganche de la conducta frente a la ausencia de fuentes extrínsecas de motivación. Las conductas intrínsecamente motivadas, lejos de ser triviales y carentes de importancia (por ejemplo, el juego) animan al individuo a buscar novedades y enfrentarse a retos y, al hacerlo, satisfacer necesidades psicológicas importantes. La motivación intrínseca empuja al individuo a querer superar los retos del entorno y los logros de adquisición de dominio hacen que la persona sea más capaz de adaptarse a los retos y las curiosidades del entorno. Cuando las personas realizan actividades para satisfacer necesidades de causación personal, efectividad o curiosidad entonces actúan por motivación intrínseca.

La motivación extrínseca se alcanza por la acción de factores externos. El estudio de la motivación extrínseca se basa en los tres conceptos principales de recompensa, castigo e incentivo. Una «recompensa» es un objeto ambiental atractivo que se da al final de una secuencia de conducta y que aumenta la probabilidad de que esa conducta se vuelva a dar. Un «castigo» es un objeto ambiental no atractivo que se da al final de una secuencia de conducta y que reduce las probabilidades de que esa conducta se vuelva a dar. Un «incentivo» es un objeto ambiental que atrae o repele al individuo a que realice o no realice una secuencia de conducta, por lo tanto se otorga durante el desarrollo de la conducta. Existen diferencias entre recompensas y castigos por una parte e incentivos por la otra, pero la más importante es el momento en que se ejecutan. Las recompensas y los castigos se dan después de la conducta y aumentan o reducen la probabilidad de que se vuelva a repetir mientras que los incentivos se dan antes que la conducta y energizan su comienzo. Premiar la conducta obediente con incentivos atractivos es sólo un aspecto de la motivación extrínseca. Por ejemplo: “darle un punto para la prueba al alumno que pase a resolver bien un ejercicio en la pizarra”. Otra estrategia sería el uso de estímulos desagradables. Como por ejemplo: “restarle puntos de una prueba a un alumno por una mala acción que ejecute y que altere el desarrollo normal de la clase.

Existen dos maneras de disfrutar de una actividad, extrínseca o intrínsecamente; las personas motivadas extrínsecamente buscan estimuladores extrínsecos, como por ejemplo el dinero, elogio, reconocimiento social. En cambio, las personas motivadas intrínsecamente hacen las cosas por el simple gusto de hacerlas.

Cuando hablamos de rendimiento académico, no sólo nos podemos referir a las aptitudes y a la motivación del alumno, sino que también intervienen variables como los aspectos docentes, la relación profesor - alumno, y el entorno familiar, entre otras. Según [García, M., Alvarado, J. y Jiménez, A., 2000], el rendimiento es la productividad del sujeto, el producto final de la aplicación de su esfuerzo, matizado por sus actividades, rasgos y la percepción más o menos correcta de los cometidos asignados.

Si se trata de evaluar el rendimiento académico y cómo mejorarlo, se analizan los factores que pueden influir en él. Estos factores se resumen en tres grupos: estructura de la sociedad, entorno sociocultural y aspectos cognitivo motivacionales. Acorde con esta idea, se indica que, generalmente, se consideran entre otros, factores socioeconómicos, la amplitud de los programas de estudio, las metodologías de enseñanza utilizadas, la dificultad de emplear una enseñanza personalizada, los conceptos previos que tienen los alumnos, así como el nivel de pensamiento formal de los mismos.
.
Si analizamos lo anterior, nos podemos enfocar en las metodologías de enseñanza utilizadas. ¿Están siendo eficaces en nuestro país? Sabemos que el currículum se va renovando y que cada año contamos con nuevas metodologías, pero ¿las estamos usando? ¿Estamos motivando a nuestros alumnos? Y quizá podemos hacernos una pregunta muy interesante e importante ¿es importante para nosotros el rendimiento de nuestros alumnos? Y es aquí en donde nos encontramos con teorías que no tienen ningún fundamento como la de los “Tres Tercios” Si aplicamos la teoría anterior, estaríamos afirmando que un tercio de cada grupo, siempre reprobará. ¿Y qué hay de las acciones remediales?

Quizá no sea un tema que a muchos profesores le interese, pero cuando un alumno reprueba en forma reiterada, le atribuye este fracaso a una causa en específica (como se ha hablado anteriormente) y muchas veces crea una actitud negativa hacia una asignatura, en especial hacia la matemática.

De acuerdo a esto podemos decir que las personas crean constantemente significados y procedimientos para adecuar su conducta, en función de las situaciones en que se encuentra (reprobaciones reiteradas). En tal sentido, las creencias juegan un importante papel en la interpretación” constante que como proceso formativo, revisa y utiliza los significados como instrumentos para la orientación y configuración de nuestras acciones (rechazo a las matemáticas).

Después de hacer revisado la bibliografía y esclarecido significados de estimó conveniente aplicar el cuestionario “Sidney Atribution Scale” (SAS). Para ello fue necesario fijar algunos códigos que permitieran resguardar la privacidad de los datos y de la información conformada. El cuestionario SAS pone al/la estudiante ciertas situaciones y su objetivo es dilucidar a qué factores le atribuye su éxito o fracaso en matemática. En total son 12 situaciones con tres (3) afirmaciones cada una; el estudiante debe contestar las tres y para ello debe tomar en consideración que tan representado se siente con cada una de las afirmaciones presentadas en el contexto de dicha situación. Las situaciones se refieren, independientemente unas de otras, a experiencias de éxito o de fracaso. El éxito se indaga bajo la perspectiva del “esfuerzo”, “habilidad” y de “factores externos”. El fracaso se indaga de igual manera. Por lo tanto las 12 situaciones permiten el análisis de 36 posibilidades diferentes.

Como la escala contiene 36 consultas en total, se construyó el siguiente referente para interpretar el puntaje alcanzado por cada alumno en las diferentes categorías de éxito o fracaso que trabaja el cuestionario:

Cuadro Nº 1: valoración de resultados según puntaje alcanzado

Rango	Descripción
6 a 13 puntos	Bajo
14 a 20 puntos	Medio Bajo
21 a 27 puntos	Medio Alto
28 a 36 puntos	Alto

Participaron en la investigación dos (2) Liceos Municipalizados, cuatro (4) Colegios Particulares Subvencionados y un(1) Colegio Particular Pagado. La muestra se determinó por un muestreo estratificado por etapas múltiples y se logró testear a 800 alumnos de 1° a 4° medio.

El análisis de los datos por Institución Educativa permite afirmar que en el Liceo Nº1 una mayoría significativa (74%) atribuye el éxito en la asignatura de matemática en gran medida al esfuerzo que se realiza, Respecto de la atribución del éxito a la habilidad, es posible afirmar una mayoría de los estudiantes (56%) no percibe que el éxito en las matemáticas se relaciona con la habilidad que se tenga en esta, versus un 44% que establece una atribución más alta entre habilidad-éxito. En relación al éxito por causas externas se observa que un 57% del total de los estudiantes se ubica entre los rangos bajo y medio-bajo, lo cual significa que los encuestados atribuyen de manera débil el éxito en matemáticas a causas externas. Y en relación al fracaso la mayoría de los encuestados (52%) atribuye a la falta de esfuerzo el fracaso académico en la asignatura de matemática. Sin embargo es necesario destacar que los porcentajes de estudiantes según rango están distribuidos de una manera más o menos homogénea, ya que un 48% de los estudiantes no establece una vinculación fuerte entre fracaso-esfuerzo. En fracaso por habilidad se observa que un 52% de los estudiantes atribuye de manera relativamente baja el fracaso a la habilidad, versus un 48% que establece una vinculación alta entre habilidad y fracaso. Frente fracaso por causas externas una mayoría significativa (70%) no atribuye el fracaso en la asignatura de matemáticas a causas externas a su propia acción.

En relación al Liceo Nº2, se puede afirmar que las atribuciones del éxito por esfuerzo indican que más de la mitad de los encuestados (66%) atribuye el éxito en la asignatura de matemática en gran medida al esfuerzo que se realiza; en éxito por habilidad se puede establecer que la mayoría de los estudiantes (67%) atribuye una baja relación entre la habilidad y el éxito en la asignatura de matemáticas. En éxito por causas externas se concluye que un 67% de los encuestados percibe una relación entre causas externas y la asignatura de matemática. En relación al fracaso se observa que la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-alto y alto (57%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes atribuye al esfuerzo el fracaso en la asignatura de matemáticas. En fracaso por habilidad se observa que no existen diferencias entre los dos niveles (alto-bajo) y que al analizar por cada nivel las diferencias son mínimas, siendo está la dimensión más homogénea en su distribución porcentual de las analizadas en este grupo de alumnos. En fracaso por causas externas una mayoría significativa (67%) no atribuye el fracaso en la asignatura a causas externas.

En los Colegios Particulares Subvencionados la situación, Colegio a Colegio, se describe a continuación. En el Colegio Nº1 la atribución del éxito por esfuerzo la mitad de los encuestados (49%) atribuye el éxito en la asignatura de matemática en gran medida al esfuerzo que se realiza; respecto del éxito por habilidad, en general, los estudiantes no vinculan directamente el éxito en la asignatura de matemática a la habilidad que posean (52%); en atribución de éxito por causas externas un porcentaje significativo de los estudiantes (62%) atribuye el éxito en la asignatura de matemáticas a causas externas. En relación al fracaso por esfuerzo una mayoría considerable de los encuestados (56%) no atribuye al esfuerzo su fracaso en la asignatura de matemática; en fracaso por habilidad se observa que la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-bajo y bajo (61%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes no atribuye a la habilidad el fracaso en la asignatura; por otra parte una mayoría significativa (83%) no atribuye el fracaso en la asignatura a causas externas.

En el Colegio Nº2 la distribución de éxito por esfuerzo la mitad de los encuestados atribuye el éxito en la asignatura de matemática en gran medida al esfuerzo que se realiza; en éxito por habilidad se puede establecer que la mayoría de los estudiantes (54%) atribuye una alta relación entre la habilidad y el éxito en la asignatura de matemáticas; en éxito por causas externas, un porcentaje significativo de los estudiantes (59%) atribuye el éxito en la asignatura de matemáticas a causas externas de manera más o menos alta. La distribución del fracaso por esfuerzo muestra que la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-bajo y bajo (77%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes no atribuye al esfuerzo el fracaso en la asignatura de matemáticas; en relación al fracaso por habilidad se observa que la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-bajo y bajo (62%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes no atribuye a la habilidad el fracaso en la asignatura de matemáticas. Respecto del fracaso por causas externas esta distribución de los estudiantes, permite establecer que una mayoría significativa (75%) no atribuye el fracaso en la asignatura a causas externas.

En el Colegio Nº3 la distribución del éxito por esfuerzo señala que la mitad (52%) de los encuestados atribuye el éxito en la asignatura de matemática en gran medida al esfuerzo que se realiza; Respecto de la atribución del éxito a la habilidad, es posible afirmar que una mayoría significativa de los estudiantes (62%) percibe que el éxito en las matemáticas se relaciona con la habilidad que se tenga en esta; en relación al éxito por causas externas se observa que un 57% del total de los estudiantes se ubica entre los rangos bajo y medio-bajo, lo cual significa que los encuestados atribuyen de manera débil el éxito en matemáticas a causas externas. En relación a la atribución que se hace del fracaso por esfuerzo, los porcentajes son indicativos de que una mayoría considerable de los encuestados (55%) no atribuye de manera directa al esfuerzo su fracaso en la asignatura de matemática; en fracaso por habilidad la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-bajo y bajo (58%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes no atribuye a la habilidad el fracaso en la asignatura; por otra parte, en la atribución del fracaso a causas externas una mayoría significativa (78%) no atribuye el fracaso en la asignatura de matemáticas a causas externas a su propia acción.

Finalmente, en el Colegio Nº4 las atribuciones de éxito por esfuerzo señala que un 44,3% de los estudiantes está localizado en el rango alto, esto indica que casi la mitad de los encuestados atribuye el éxito en la asignatura de matemática en gran medida al esfuerzo que se realiza; en éxito por habilidad se puede establecer que la mayoría de los estudiantes (61,6%) atribuye una alta relación entre la habilidad y el éxito en la asignatura de matemáticas, en relación al esfuerzo por causas externas un porcentaje significativo de los estudiantes (56,4%) atribuye el éxito en la asignatura de matemáticas a causas externas. Por otra parte las atribuciones de fracaso por esfuerzo se observa que la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-bajo y bajo (65,1%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes no atribuye al esfuerzo el fracaso en la asignatura de matemáticas, en fracaso por habilidad se observa que la distribución porcentual de los estudiantes está claramente marcada en el nivel medio-bajo y bajo (61,7%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes no atribuye a la habilidad el fracaso en la asignatura de matemáticas; finalmente se puede establecer que una mayoría significativa (74,7%) no atribuye el fracaso en la asignatura a causas externas.

Como se señalara anteriormente sólo un Colegio Particular quedó seleccionado en la muestra y aquí la mitad de los encuestados (63%) atribuye el éxito en la asignatura de matemática, en gran medida, al esfuerzo que se realiza; en relación al éxito por habilidad, se puede establecer que la mayoría de los estudiantes (58%) atribuye a la habilidad el éxito en la asignatura de matemáticas; respecto del éxito por causas externas, se concluye que un 67% de los encuestados percibe una relación entre causas externas y la asignatura de matemática, mientras que respecto del fracaso se observa que la distribución porcentual de los estudiantes está levemente inclinada en los niveles medio-alto y alto (52%) lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes atribuye al esfuerzo el fracaso en la asignatura de matemáticas; en relación al fracaso por habilidad se observa que la mayoría de los estudiantes se ubica en el nivel alto y medio-alto (56%) lo cual permite afirmar que los estudiantes atribuyen en alto nivel el fracaso a la habilidad con las matemáticas, finalmente, en relación al fracaso por causas externas es posible establecer que la mayoría (56%) atribuye en un grado alto a causas externas el fracaso en la asignatura de matemáticas.

El siguiente cuadro muestra estas distribuciones porcentuales:

Cuadro Nº2: Distribuciones Porcentuales por Colegios y Tipos de Atribución

Colegios	Tipos de Atribuciones					
	el **ÉXITO** se debe			el **FRACASO** se debe		
	EE	**EH**	**EE$_X$**	**FE**	**FH**	**FE$_X$**
LICEOS:						
Nº 1	74,0	56,0	57,0	52,0	48,0	30,0
Nº2	66,0	67,0	67,0	57,0	50,0	32,0
COLEGIOS SUBVENCIONADOS:						
Nº1	49,0	52,0	62,0	42,0	39,0	17,0
Nº2	54,0	54,0	59,0	23,0	38,0	25,0
Nº3	52,0	62,0	57,0	45,0	42,0	22,0
Nº4	44,3	61,6	56,4	35,0	38,0	25,0
COLEGIO PARTICULAR	63,0	58,0	67,0	52,0	56,0	56,0

Conclusiones:

A partir del análisis de los datos se concluye:

- El comportamiento por dependencia administrativa de los establecimientos educacionales es diferente.
- En los Liceos Municipalizados los alumnos/as atribuyen a su falta de esfuerzo y de habilidad a falta de éxito, en cambio en los Colegios Subvencionados los alumnos/as se reconocen esforzados, hábiles y sin mayores problemas como causa externa para el éxito pero se observa fracaso en los grupos-cursos. En el Colegio Particular los alumnos/as atribuyen su fracaso a su falta de esfuerzo, habilidad y causas externas.
- En forma específica en los Liceos Municipalizados el éxito se atribuye más al esfuerzo que a la habilidad o a causas externas y hay una interpretación ambivalente frente al fracaso por esfuerzo pues algunos estudiantes lo interpretan como falta de esfuerzo pero otros no relacionan el esfuerzo con el fracaso, igual cosa pasa con la habilidad para aprender matemática y es importante destacar que la mayoría de los estudiantes no centra su fracaso a causas externas. En síntesis, el esfuerzo es muy importante para tener éxito en el aprendizaje de matemática; es más importante que se hábil, aunque hay causas externas que influyen en el éxito.
- En los Colegios Subvencionados se destaca el esfuerzo como generador de éxito, sin embargo se menciona a la habilidad como una variable concomitante. Llama la atención que se menciones que el éxito lo alcanzan por ayudas externas. Ellos se esfuerzan pero no siempre tienen éxito y no es por falta de habilidad ni ayuda externa.
- En el Colegio Particular los alumnos/as, cuando tienen éxito, es porque se esfuerzan pero, además, son hábiles y piensan que en ello influyen variables externas. Cuando fracasan

eso sucede porque hay poco esfuerzo, se sienten inhábiles para aprender matemáticas y piensan que esto se debe a causas externas.

REFERENCIAS:

[1] Barber, M. y Marched, M. (2007) "How the world's Best-Performing Shool System come out on top". Informe McKinsey. USA.
[2] Barraza, M. (2005) "Atribuciones Causales a la elección de Carrera".(LIE) http://www.monografías.com / trabajos30/
[3] Corral de Zurita, (2003) "Metas académicas, atribuciones causales y rendimiento académico". http://www.une.ar/Web/cyt/2003/comunicaciones/09- Educación/D-006.pdf
[4] Del Valle, M. (2008) "Modelamiento Matemático y Aprendizaje de La Función Lineal. Tesis doctoral. Universidad de Concepción.
[5] Díaz, y Pérez Mª Vª ET all (2004) "Atribuciones causales y autoconcepto acadêmico en estudiantes universitarios". Paideia, 36,77-93
[6] Gamboa, M., Pedreros, O. (2010) "Atribuciones Causales y Rendimiento en Matemáticas". Tesis Licenciatura en Educación. Facultad de Educación. Universidad de concepción. Chile.
[7] García M. et all (2000) "Motivación, Aprendizaje y Rendimiento Escolar". Rvta. Electrónica de Motivación y Emoción 1,6; 24-36
[8] González- Pienda et all (1996)"Autoconcepto, autoestima y aprendizaje escolar". Revista Psicotema, 9 (2), 271- 289
[9] Ramírez, Mº (2005) "Actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico entre estudiantes de Octavo Básico. En Estudios Pedagógicos XXXI, 1, 97-112

Sesión Invitada EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 9. FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Iván Aguirre Cipe, Yurilev Chalco Cano, Karen Álvarez Olivares
Instituto de Alta Investigación. Universidad de Tarapacá.
iaguirrec@uta.cl ychalco@uta.cl karenalvarezolivares@gmail.com

Resumen

En estos tiempos en nuestra sociedad se discute mucho acerca de una buena educación y como esta influye en la solución de los muchos problemas que se dan en esta sociedad. Por otro lado, para lograr una buena educación necesitamos buenos profesores.En esa dirección, queremos reflexionar sobre la formación de profesores de matemática desde una perspectiva de formación inicial de conocimientos disciplinarios. Nosotros intentaremos responder en alguna forma a la siguiente pregunta,¿qué matemática se debe entregar a un estudiante en su formación profesional docente para que tenga un adecuado desempeño en su ejercicio profesional?. Se complementa este artículo con un análisis de lo que ha sido la formación de profesores en Dinamarca y en Sudáfrica.

Abstract

In these times our society is discussing much about a good education and how this affects the solution of the many problems that exist in this society. On the other hand, for obtaining a good education we need a good professor. In this direction, we want to reflect on the training of teachers of mathematics from perspective of initial formation of disciplinary knowledge. Wetry to respondinsome wayto the next question, what math should we give to a student in teacher training to have an adequate performance in exercise professional?.This article is complemented with an analysis of what has been training teachers in Denmark and South Africa.

Introducción

Muchos comparten las consecuencias que traería consigo una buena educación para la sociedad, por ejemplo, disminuir los problemas de drogas y la delincuencia, que esta a su vez acarrea los problemas de desigualdad. Así, varios problemas presente en nuestra sociedad tendrían solución. Pero nos olvidamos que la educación debe partir del hogar, de los padres y fortalecidas por los profesores; pero surge otra inquietud, si tuviéramos una buena educación tendríamos buenos padres, preocupados por sus hijos; pero donde se rompe la cadena. Como educadores nos lleva al debate de la importancia de la formación de profesores, este debate se fortalece cuando se entregan los resultados de la Evaluación Docente, del SIMCE, prueba Inicia e inclusive los de la P.S.U, vuelve a la palestra la importancia de la formación de profesores.
Queremos compartir, lo que nuestro grupo de trabajo formado por dos profesores de la Universidad de Tarapacá, tres alumnos de Pedagogía en Matemática y Computación y uno de Ingeniería en matemáticas, hemos desarrollado, a través de seminarios semanales donde el tema desarrollado es la formación de profesores de matemática.

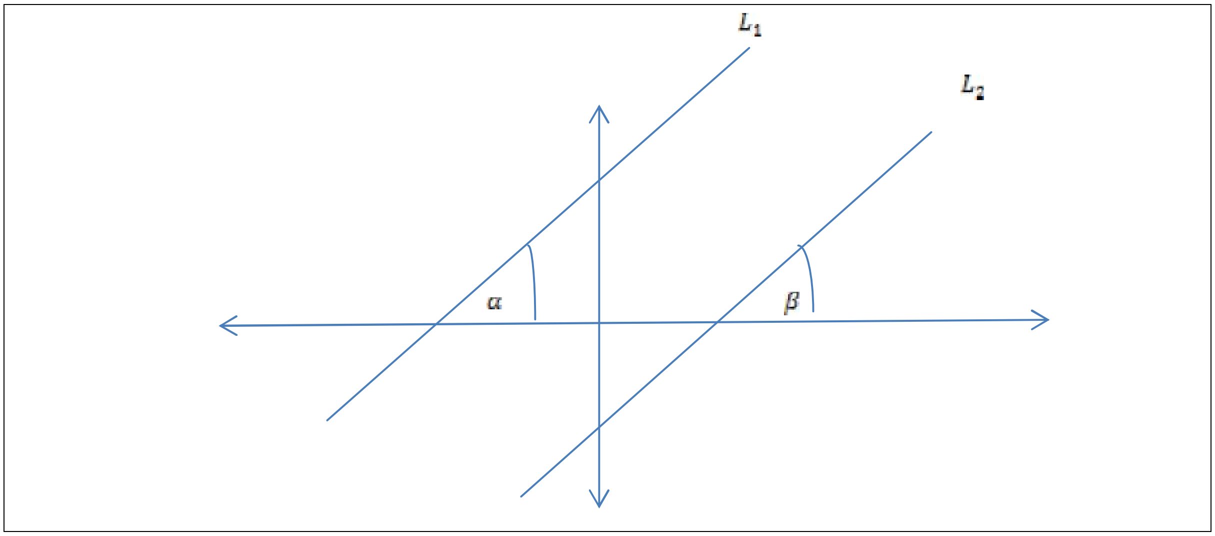
Desarrollo

Sobre la formación matemática de los estudiantes de pedagogía, como debe ser enfocada para que estos adquieran conocimientos sólidos en los programas de enseñanza media o enfocada a contenidos que le permitan continuar especializándose. En ese sentido, en [1] se distingue dos instancias: matemática académica o científica y matemática escolar.
La matemática científica tiene una estructura axiomática, donde las demostraciones se basan en las definiciones y en los teoremas dados, considerando los postulados y los términos primitivos. Se debe ser estricto en las definiciones sino podemos caer en un error, si aparece un nuevo resultado este debe ser validado por la comunidad científica y recién incorporarlo a los ya validados.

Por otro lado en la matemática escolar se consideran dos elementos fundamentales, uno es que la valides de los resultados matemáticos no son puestos en duda, no se discuten, estos se encuentran avalados por la matemática académica, por ejemplo no existe un número entero entre 0 y 1, $\sqrt{2}$ es un número irracional, el conjunto de los números reales es ordenado. La matemática escolar va enfocada a no demostrar algo con la rigurosidad de la matemática científica. El otro elemento en la matemática escolar, se refiere al aprendizaje desde el punto de vista que las justificaciones utilizadas le permitan al estudiante aplicarlas a otros contenidos o a la vida diaria. Una frase de Samuel Johnson "Señor, he encontrado un razonamiento idóneo para usted, pero no me considero en la obligación de encontrarle también un sensato entendimiento", esta frase nos dice que no basta con fundamentar, también hay que entender, comprender lo que se está haciendo, y recíprocamente no basta con entender, comprender sino que también se debe tener un fundamento de lo que se aprende.

En el caso de probabilidades, cómo justificamos la probabilidad que al lanzar una moneda y salga sello es $\frac{1}{2}$, lo que hacemos en general es que el estudiante tome una moneda y la lancé 10 veces, 20 veces, 100 veces y observe a que valor tiende el resultado y luego concluir que es $\frac{1}{2}$. Como justificar si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces tiene dos ángulos iguales, muchas veces llevamos al estudiante al laboratorio de computación y mediante un utilitario, le pedimos que dibuje triángulos con dos lados de igual medida y luego mida los ángulos y le pedimos que saque una conclusión.

En la matemática escolar las demostraciones estrictas, no son el único camino de una demostración, podemos complementar nuestras demostraciones con cosas de la vida diaria por ejemplo cuando dos rectas son paralelas. En la figura vemos que los ángulo α y β son iguales, como sabemos que las pendientes de las rectas L_1 y L_2 vienen dadas respectivamente por $m_1 = tan\alpha$ y $m_2 = tan\beta$, están deben ser iguales, es decir $m_1 = m_2$. Podemos concluir que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. En la matemática científica nuestros fundamentos serian, sabemos que el ángulo γ formado por dos rectas lo podemos encontrar con la formula $tan\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$, pero el ángulo que forman las dos rectas paralelas es cero, es decir $\gamma = 0°$, tenemos que $tan0° = 0$, por lo tanto tenemos $tan0° = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$, despejando $m_1 - m_2 = 0$, con la condición que $1 + m_1 \cdot m_2 \neq 0$, tenemos en consecuencia $m_1 = m_2$, hemos demostrado que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.



Chevallard, en su libro "La Transposición Didáctica", nos explica el pasaje del saber sabio a saber enseñado, la transformación del saber científico en un saber posible de ser enseñado, para lo cual se requiere adaptaciones y transformaciones del objeto a ser enseñado, toma la matemática científica como la base del saber a la cual siempre debemos recurrir y es la referencia para desautorizar un objeto de estudio, que no sea considerado próximo al saber sabio. Considerando esto, la matemática escolar es una adaptación de la matemática científica, pero no una vulgarización como algunos autores dicen.

Cuando el estudiante de pedagogía está terminando su formación y debe enfrentar el aula, se encuentra con la distancia entre los conocimientos adquiridos en su formación y lo que debe enfrentar en la sala de clases, el distinguir como algunos conceptos matemáticos, que se alejan de la rigurosidad de la matemática científica siguen siendo validos, muchas veces esta rigurosidad desmotiva al estudiante de enseñanza media, pero no debemos descuidar ciertas cosas esenciales que nos permiten enriquecer la comprensión sobre ciertos fenómenos, que nos permiten relacionarnos con nuestro entorno, utilizar nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que se han obtenido por medio del sentido común y la experiencia cotidiana, donde estos conceptos son fundamentales para que los estudiantes construyan nuevos aprendizajes.

En la formación de los estudiantes de pedagogía, debemos dejar claro los roles que debe cumplir la matemática escolar y la matemática científica, buscar un punto de equilibrio, que tanto conocimiento de matemática se debe entregar en su formación, dado que la matemática es una disciplina que entrega herramienta poderosas que nos permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno.

Los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media, que entrega el Ministerio de Educación [5], que se presentan organizados en torno a cinco áreas temáticas: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar, los cuales son:

SISTEMAS NUMÉRICOS Y ÁLGEBRA
Estándar 1: Es capaz de conducir el aprendizaje de los sistemas numéricos N, Z, Q, R y C.

Estándar 2: Es capaz de conducir el aprendizaje de las operaciones del álgebra elemental y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones e inecuaciones.
Estándar 3: Es capaz de conducir el aprendizaje del concepto de función, sus propiedades y representaciones.
Estándar 4: Demuestra competencia disciplinaria en álgebra lineal y es capaz de conducir el aprendizaje de sus aplicaciones en la Matemática escolar.

CÁLCULO
Estándar 5: Es capaz de conducir el aprendizaje de los números reales, sucesiones, sumatorias y series.
Estándar 6: Demuestra competencia disciplinaria en cálculo diferencial y aplicaciones.
Estándar 7: Demuestra competencia disciplinaria en cálculo integral y aplicaciones.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
Estándar 8: Es capaz de conducir el aprendizaje de la divisibilidad de números enteros y de polinomios y demuestra competencia disciplinaria en su generalización a la estructura de anillo.
Estándar 9: Demuestra competencia disciplinaria en teoría de grupos y cuerpos.
Estándar 10: Demuestra competencia disciplinaria en conceptos y construcciones fundamentales de la Matemática.

GEOMETRÍA
Estándar 11: Es capaz de conducir el aprendizaje de los conceptos elementales de la Geometría.
Estándar 12: Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano.
Estándar 13: Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en temas referidos a medida de atributos de objetos geométricos y el uso de la trigonometría.
Estándar 14: Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana.
Estándar 15: Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría del espacio usando vectores y coordenadas.
Estándar 16: Comprende aspectos fundantes de la Geometría euclidiana y algunos modelos básicos de geometrías no euclidianas.

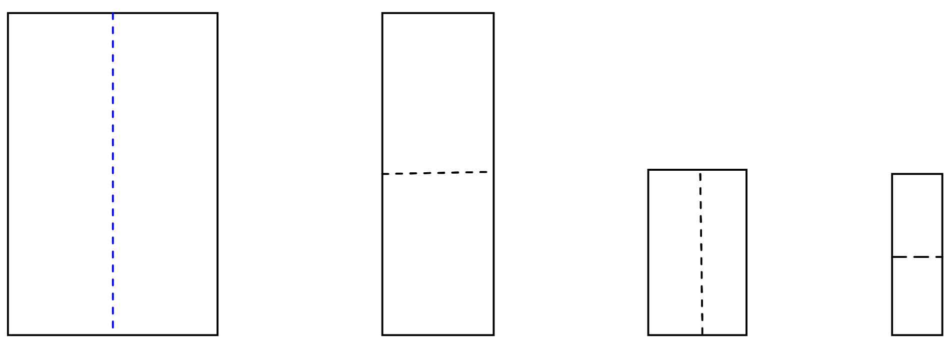
DATOS Y AZAR
Estándar 17: Es capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis.
Estándar 18: Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas.
Estándar 19: Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas.
Estándar 20: Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite.
Estándar 21: Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística.

Nos entregan una orientación de los contenidos matemáticos, que debe saber un estudiante al finalizar la carrera, pero cuantas asignaturas necesitamos para cubrir estos estándares disciplinarios, después de varios análisis hemos concluido que 16, no estamos considerando los estándares pedagógicos que son once. Las asignaturas de matemática deben ser enfocadas desde un punto vista didáctico, considerando el Marco de la Buena Enseñanza [3]. Que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre y especificando claramente qué elementos se consideran en cada una de estas partes. Inicio, es la etapa donde se procura que los estudiantes conozcan el propósito de la clase; el objetivo de la clase, es decir, qué se espera que aprendan, se busca captar el interés de los estudiantes y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores; desarrollo, es la etapa donde el docente lleva a cabo la actividad contemplada para la clase; cierre, es la etapa breve (5 a 10 minutos), pero es central, se persigue que el estudiante forme una visión acerca de qué

aprendieron y cuál es la utilidad de las estrategias y experiencias que se desarrollaron para promover su aprendizaje.
Estos estándares toman relevancia ya que son considerados para la prueba Inicia en la parte de conocimientos disciplinarios y a la institución formadora le interesa que sus estudiantes tengan un buen desempeño en esta prueba.

Como dice [4] para el diseño de un currículum o plan de estudio, nos basamos considerando un estudiante promedio, pero estos últimos años los profesores se han enfrentado con el problema de la distancia que hay entre el estudiante y la realidad, situación que podemos percibir al escuchar los comentarios de los profesores cuando los estudiantes pasan de Enseñanza Básica a Enseñanza Media y de la Enseñanza Media a la Universitaria. Un gran porcentaje no ha adquirido las competencias básicas en lectura y escritura, desarrollo en el pensamiento lógico matemático, capacidad de análisis y síntesis, etc. También traen un déficit de contenidos disciplinarios, esta problemática es frustrante para el estudiante, lo que involucra a veces su deserción del sistema. En [4] se propone la enseñanza basada en competencias que nos entrega una estrategia, al proponer la resolución de situaciones complejas, contextualizadas en las que interactúan conocimientos, destrezas habilidadesy normas.

Un ejemplo interesante para los alumnos es el propuesto en el programa de primero medio, un trozo rectangular de cartulina de lado 40 cm de largo por 30 cm de ancho se dobla sucesivamente por la mitad, según muestra la figura:



Responden preguntas como:¿Cuánto medirá el área del cuadrado de la figura resultante después de hacer 8 dobleces?, ¿Cuánto medirá el área del cuadrado resultante después de hacer n dobleces?

Nuestro segundo tema, desarrollado en los seminarios fue la formación de profesores en otros países, el proyecto Danés KOM [3], que parte de dos preguntas fundamentales, ¿qué significa dominar las matemáticas?, ¿qué significa ser un buen profesor de matemática?. El comité del proyecto dirigido por Mogens Niss, para responder estas preguntas adopta un abordaje basado en competencias, la definición de competencia que se dan es "poseer una competencia matemática significa conocer, comprender, hacer, usar y poseer una opinión bien fundamentada sobre la matemática en una variedad de situaciones y de los contexto donde pueda tener un papel importante". Identifican ocho competencias, las cuales son separadas en dos grupos, uno de habilidades para preguntar y responder preguntas en matemáticas y con la matemática, las cuatro competencias consideradas en este grupo son competencia de pensamiento matemático, dominar modos matemáticos de pensamiento, competencia en el tratamiento de problemas que consiste en formular y resolver problemas matemáticos, competencias de modelar, ser capaz de analizar y construir modelos relativos a otras áreas y por último la competencia de raciocinio, que consiste en estar apto para razonar matemáticamente. El segundo grupo es habilidades para lidiar con el lenguaje matemático y sus instrumentos, formado por la competencia de representación, que consiste en manejar diferentes representaciones de entidades matemáticas, competencia en simbología y formalismo, que se refiere a estar apto a manejar el lenguaje simbólico y los sistemas matemáticos formales, competencia de comunicación, que consiste en estar apto para comunicarse en, con y sobre la matemática, y por último la competencia en instrumentos y accesorios, se refiere a estar apto a hacer uso y establecer relaciones con instrumentos y accesorios en matemática. Estas competencias no son disjuntas, pueden auxiliarse entre ellas y son la clave para responder la pregunta ¿qué significa dominar la matemática?

Para responder la segunda pregunta ¿qué significa ser un buen profesor de matemática?, una primera respuesta fue, un buen profesor de matemática es aquel que efectivamente estimula el desenvolvimiento de competencias matemáticas en sus estudiantes. Pero entonces un buen profesor de matemática debe poseer estas competencias matemáticas, en general un profesor enseña lo que sabe. El proyecto KOM propone tres componentes principales para la formación de un profesor de matemática, una formación matemática basada en las ocho competencias dadas anteriormente, una componente de formación general y pedagógica y la tercera componente de competencias pedagógicas y didácticas enfocadas a la matemática, en esta componente se dan seis competencias, competencias en el currículum, que consiste en las habilidades para analizar, entender, evaluar relacionar e implementar el currículum, competencia pedagógica, se refiere a la habilidad de proponer, planificar, organizar y realizar la enseñanza de la matemática, competencia en la detección de aprendizaje, es la habilidad de descubrir, interpretar y analizar el aprendizaje de los estudiantes, competencia en evaluación, la habilidad para identificar, crear instrumentos de evaluación, caracterizar y comunicar los resultados del aprendizaje. Las otras dos competencias son en el ámbito del ambiente de trabajo, competencias de colaboración, colaborar con los colegas, dentro y fuera de la matemática y por último la competencia de desenvolvimiento profesional, se refiere a la habilidad de desarrollar un perfeccionamiento continuo. El desarrollar estas tres componentes en la formación de un estudiante de pedagogía traerá como consecuencia, un buen profesor de matemática.

En [3] encontramos en el capítulo II, “La formación del profesor de matemática en África del sur post apartheid”, donde Jill Adler hace una reflexión de la formación del profesor de matemática, lo que necesita saber y lo que necesita hacer para enseñar matemática. La deficiente formación que recibían los profesores de color en los tiempo del apartheid lo que generaba una educación deficiente, se ha tenido que superar perfeccionando a esos profesores, para poder nivelarlos. Hoy en día al igual que muchos países, la carreras de pedagogía en matemática tienen pocos alumnos, la escases de profesores de matemática de enseñanza media bien calificados llego a niveles críticos.

La enseñanza en los colegios es en inglés, pero el idioma dominante en cada región es aquel hablado fuera del colegio, en consecuencia el estudiante se siente aprendiendo en un idioma extranjero. Se propone que como las clases son multilingües, se deben considerar los siguientes elementos en la formación de profesores, traducción bilateral entre discursos, ordenación de representaciones matemáticas, remodelación entre tareas y valorización de diferentes niveles de justificación. Más de una vez nos han dicho que debemos adaptar los ejercicios a nuestro entorno, el estudiante se sentirá más identificado resolviendo el siguiente ejercicio:
Los buses a las Peñas salen cada 6 minutos, los mini-buses cada 8 minutos y los taxis salen cada 12 minutos. A las 7 de la mañana, coinciden en la salida. ¿Cuántas salidas simultaneas tendrán hasta las 10:00 de la mañana. (Las Peñas es una fiesta religiosa en el interior de Arica)
Que:
Los buses a Madrid salen cada 6 minutos, los mini-buses cada 8 minutos y los taxis salen cada 12 minutos. A las 7 de la mañana, coinciden en la salida. ¿Cuántas salidas simultaneas tendrán hasta las 10:00 de la mañana.

Conclusiones

Podemos concluir que la formación inicial y continua de los docentes y el desarrollo metodológico y didáctico, nos son de gran ayuda para poder re encantar a nuestros estudiantes con las matemáticas, debemos partir del conocimiento y de la capacidad de conectar teoría y práctica, en situaciones de la vida diaria. Lo que involucra una sólida formación en los contenidos de matemática y en la didáctica de la matemática. Pero queda mucho trabajo en el área de la formación de profesores de matemática, tanto en la práctica como en el campo de la investigación.

REFERENCIAS:

[1] Cavalcanti P, A formação matemática do professor, Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2005.
[2] CENTRO DE PERFECCIONAMIENTO EXPERIMENTACIÓN E INVESTIGACIÓNES PEDAGOGICAS,
Marco para la Buena Enseñanza, Impresora Maval Ltda, Santiago, 2008.
[3] De Carvalho M, Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática, Autêntica
Editora, Belo Horizonte, 2010.
[4] INFORME FINAL – PROYECTO TUNING, Reflexiones y Perspectiva de laEducación Superior en
América Latina, Publicaciones de laUniversidadDeusto, Bilbao, 2007.
[5] MINEDUC, Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogia en Educación Media, LOM Ediciones, Santiago, 2012.

SESIÓN INVITADA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 10. CONSTRUCCIONES MENTALES PARA EL OBJETO RECTA DE EULER. UNA PROPUESTA PARA EL CURRICULUM CHILENO

Violeta Chávez Aninat*, Marcela Parraguez González, Isabel Vargas Calvet
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
va.chavezem@gmail.cl marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

En esta investigación se presenta un estudio en torno a la *Recta de Euler*, lugar geométrico que se construye en un triángulo y que contiene a tres elementos notables de él: Baricentro, Circuncentro y Ortocentro.

Con base en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), marco teórico de carácter cognitivo enmarcado en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, se realiza un estudio en profundidad de la construcción cognitiva de los conceptos geométricos involucrados en el aprendizaje (re-construcción) de la recta de Euler. Para llevar a cabo esta investigación se han propuestos los siguientes objetivos: (1) Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario, (2) Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y/o licenciatura en matemática al trabajar los puntos y rectas notables para la construcción de la recta de Euler y (3) Proponer actividades para desarrollar la construcción de la Recta de Euler y la demostración del teorema asociado a este objeto geométrico en enseñanza media.

Palabras clave: Triángulo, Rectas Notables, Puntos Notables, Recta de Euler, Teoría APOE.

Abstract

This research presents a study about the Euler line, geometric place which is built in a triangle containing three notable items of it: Centroid, Circumcenter and Orthocenter.

Based on APOS theory (Actions, Processes, Objects and Schemes), a cognitive framework framed in the field of mathematics education, a deep study of the cognitive construction of geometric concepts involved in learning (re-construction) of the Euler line. To carry out this research the following objectives have been proposed: (1) to show empirical evidence of learning related to the lines and special points of a triangle at high school and university level, (2) to document the mental constructs that pedagogy students and/or undergraduate students may explain when working with points and notable lines for the construction of the Euler line, and (3) to propose activities to develop the construction of the Euler line and the proof of the theorem associated to this geometric object of high school .

Key words: Triangle, Straight Notables, Notables points, Euler line, APOS Theory.

Introducción

La investigación aquí expuesta desarrolla su estudio en geometría, específicamente en elementos del triángulo –y sus propiedades– que permiten construir la Recta de Euler, y tener de ésta una concepción de objeto matemático[2]. Este trabajo se realiza desde la mirada de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), marco teórico de carácter cognitivo, que exige documentar las estructuras y mecanismos mentales que son requeridas para esta construcción.

Desarrollo

Según lo establecido en el Programa de Estudio[3]: Matemática Séptimo año Básico (MINEDUC, 2011, p. 49), específicamente en la Unidad 2: Geometría, al trabajar los conceptos de Altura, Bisectriz, Transversal de Gravedad y Simetral de un triángulo se pretende que el estudiante llegue a adquirir las habilidades de: 1) Caracterizar elementos lineales de triángulos y 2) Realizar justificaciones de construcciones, entre otras.

Antecedentes, problemática de investigación y objetivos

Los antecedentes indican que los conceptos de Altura, Bisectriz, Transversal de Gravedad y Simetral de un triángulo, no son fácilmente distinguidos por los estudiantes, los confunden, los olvidan y carecen para ellos de un significado relevante. En la *Figura 1,* se muestra como uno de los estudiantes confunde el concepto transversal de gravedad con el de bisectriz, y en la *Figura 2,* como otro estudiante etiqueta como transversal de gravedad al elemento simetral.

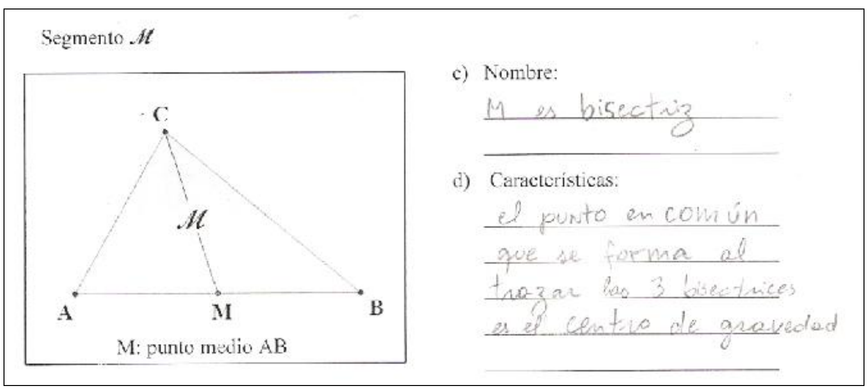
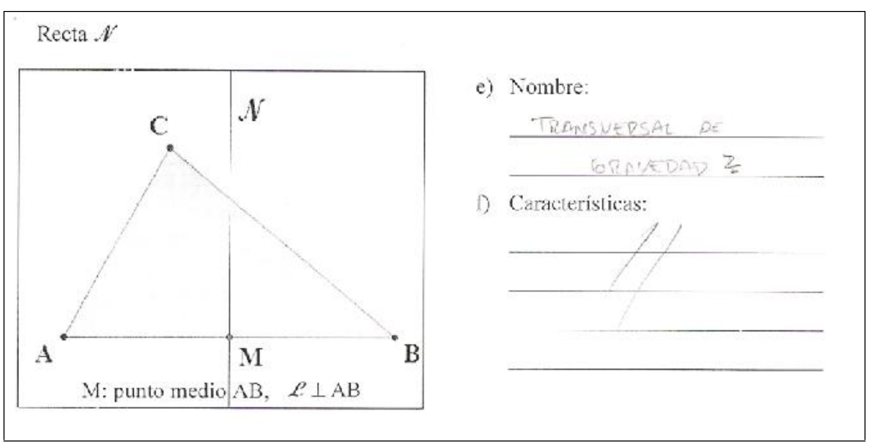


Figura 1: Respuesta 1.2 del cuestionario exploratorio del Estudiante 2.



2 Según Chevallard (1991).
3 Aprobados por el Consejo Nacional de Educación.

Figura 2: Respuesta 1.3 del cuestionario exploratorio del Estudiante 5.

En el programa de 7° Básico, que se utiliza desde el año 2011 a la fecha, se expone que la unidad de geometría en este nivel "ofrece a los estudiantes la posibilidad de resolver desafíos que estimulen el pensamiento y la imaginación, a través de las construcciones geométricas con regla y compás o un procesador geométrico, y la posibilidad de desarrollar la deducción, base de estas construcciones" (MINEDUC, 2011. p. 49), pero las actividades propuestas no conllevan a desafíos, no propician análisis, ni dan relevancia a los axiomas y propiedades que permiten el desarrollo de las construcciones propuestas. Esto se puede apreciar en las actividades sugeridas en el programa, expuestas en la *Figura 3*, donde se establece que es el docente quien "da" las propiedades al estudiante, y el estudiante solo debe verificar esas propiedades utilizando instrumentos geométricos.

AE 02

Comprobar propiedades de alturas, simetrales, bisectrices y transversales de gravedad de triángulos, utilizando instrumentos manuales o procesadores geométricos.

1
Los estudiantes caracterizan las alturas, bisectrices y transversales de gravedad de:
- Triángulos rectángulos
- Triángulos equiláteros
- Triángulos isósceles

2
El docente da a los alumnos las propiedades de las transversales de gravedad de triángulos y les pide, que utilizando regla y compás las verifiquen. Por ejemplo, les dice que las bisectrices de un triángulo se cortan en la razón 2 es a 1. Los estudiantes verifican esa propiedad, usando regla y compás.

3
Con regla y compás verifican si la altura, transversal de gravedad y bisectriz de un triángulo isósceles coinciden.

Figura 3: Extracto de los "Ejemplos de actividades" propuestos en el Programa de Estudio: Matemática Séptimo año Básico, (MINEDUC, 2011. p. 53).

El estudio de las rectas y puntos notables de triángulos se desarrolla con poca profundidad, trivializando aspectos geométricos que son base para desarrollar una geometría axiomática.

Para caracterizar las 4 rectas notables de un triángulo, un estudiante debe tener incorporado en sus esquemas mentales las nociones de lugar geométrico, perpendicularidad, punto medio, concurrencia de puntos, entre otras. Mientras que para justificar los pasos de sus construcciones deberían tener claro, por ejemplo: ¿Por qué una circunferencia genera distancias equivalente?, ¿Por qué dos rectas se intersectan en un solo punto?, ¿Por qué se puede trazar una única recta que pase por dos puntos? Para ambos casos estos conocimientos que se "asumen" evidentes, a los ojos de un profesor, pero consideramos que no están generando un real aprendizaje al ser realizados de forma automatizada, y decimos automatizada por la seguidilla de indicaciones externas que son dadas al estudiante.

El curriculum chileno –Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009– no establece actividades donde se profundice el estudio de las rectas y puntos notables. Los conceptos son trabajados en enseñanza básica, y solo se retoma a nivel universitario, al trabajar el Triángulo Órtico, la Recta de Simson, la Circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Feuerbach y la Recta de Euler.

En la enseñanza media asisten jóvenes que tienen entre 13 y 17 años de edad, y muchas veces no tienen acceso en la clase de matemáticas a instancias donde ellos puedan realizar conjeturas y reflexiones, por ejemplo, sobre la colinealidad del Ortocentro, Baricentro y Circuncentro.

El aprendizaje de las rectas y puntos notables de un triángulo queda estancado en enseñanza básica, pues el Marco Curricular, actualización 2009, no propone contenidos que continúen con el estudio de estos elementos en Enseñanza Media (exceptuando algunas aplicaciones que se le dan al concepto de altura en segundo medio al tratar el teorema de Euclides).

La demostración de que: “El Circuncentro, el Baricentro y el Ortocentro de un triángulo son colineales, y la distancia del Baricentro al Ortocentro es igual a dos veces la distancia del Baricentro al Circuncentro” (Duran, 2005), puede ser desarrollada en el ámbito de la geometría Euclidiana y también con geometría analítica, tal cual lo hiciera Leonhard Euler en 1767 (Granero, 2006), tanto en educación superior como a nivel escolar, si se proporcionarán las herramientas adecuadas.

Citando a J. Bruner, Moisés Guilar indica que “Un currículo se basa en pasos sucesivos por un mismo dominio de conocimiento y tiene el objetivo de promover el aprendizaje de la estructura subyacente de forma cada vez más poderosa y razonada; este concepto se ha dado en llamar currículo en espiral (Guillar, M., 2009, P.237). Basándonos en esta idea de curriculum en espiral, es que enfatizamos el hecho de que un contenido puede ser conocido por un estudiante, al aprenderlo en un nivel específico, pero para su comprensión profunda lo ideal sería que hubiese otras instancias donde el contenido sea retomado y profundizado.

De acuerdo a lo anterior es que planteamos nuestra Hipótesis de investigación:

Construir cognitivamente la Recta de Euler, durante la enseñanza media, propiciará un aprendizaje más profundos de los puntos y rectas notables de un triángulo, pues este concepto involucra un proceso analítico–deductivo, que al ser alcanzado implica haber interiorizado las nociones de circuncentro, baricentro y ortocentro, y por ende las de simetrales, tranversales de gravedad y alturas de un triángulo.

Marco teórico

La investigación se trabaja a la luz de un Marco Teórico (MT) de carácter cognitivo, pues este tipo de marco centra su mirada es el estudio de los procesos de aprendizajes intelectuales y matemáticos que realiza un estudiante, lo que sin duda corresponde al interés del estudio aquí expuesto. Específicamente se trabaja con la Teoría APOE, creada por Ed Dubinsky en 1991, basada en la epistemología genética de Piaget. Este MT propone un modelo que permite de manera viable, presentar de forma explícita las construcciones mentales que los estudiantes requieren, para que un determinado concepto sea comprendido y encapsulado en un objeto.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: Acción, Proceso y Objeto.

Al tener una concepción de Acción, el estudiante trabaja el Objeto como algo que no le es propio, pero que debe desarrollarse y puede hacerse con la ayuda de instrucciones externas definidas de forma clara, el Objeto aun no toma sentido para quien lo intenta usar: *Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas (Dubinsky, 1997, pág. 96). Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso* (Dubinsky, 1996), en esta etapa la manipulación del concepto va de la mano con un razonamiento, y es llevada a cabo de forma autónoma. Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado Proceso y piensa en el Proceso como un todo relacionado, entonces ha encapsulado tal Proceso como un Objeto cognitivo. No obstante, *"en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo"* (Dubisnky, 1991, p. 97). Se debe señalar que estas etapas no necesariamente son secuenciales, se puede tener concepción de Acción para ciertos aspectos de un determinado concepto, estas Acciones pueden ser interiorizadas como Proceso que se coordinan con otros Procesos, por otro lado, estos proceso pudiesen ser producto de la desencapsulación de un Objeto, lo esencial es que el estudiante evolucione de un estado de construcción del conocimiento a otro por medio de la abstracción reflexiva[4].

La teoría APOE permite dar aportes al desarrollo curricular en el área matemática, por la forma en que se complementan sus tres componentes: análisis teórico, tratamiento instruccional y datos empíricos. (Mena, A., 2001).

Con la mirada que da esta teoría es que en la investigación se plantean la siguiente pregunta: ¿Que construcciones y mecanismos mentales se requieren desarrollar para la construcción de la Recta de Euler?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación se proponen los siguientes objetivos:

1. Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario.
2. Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y/o licenciatura en matemática al trabajar los puntos y rectas notables para la construcción de la recta de Euler.
3. Proponer actividades para desarrollar la construcción de la Recta de Euler y la demostración del teorema asociado a este objeto geométrico en enseñanza media.

Metodología de investigación

La teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación que ha sido validado e implementado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Este ciclo consta de 3 etapas: 1) Análisis teórico del concepto o Descomposición Genética, DG, 2) Diseño y aplicación de cuestionarios y entrevistas, y 3) Análisis y verificación de datos.

Basándonos en el ciclo de investigación que propone esta teoría (Asiala, 1996), hemos realizado un análisis teórico plasmado en una DG, (*Figura 4*) que consiste en la explicitación de las estructuras y mecanismos mentales asociadas a la (re)construcción de esta recta, que debe mostrar un estudiante universitario para llegar al corazón de este objeto matemático –sus elementos y propiedades– y así poder desarrollar la demostración del teorema asociado a ella.

---

[4] Termino definido por Piaget.

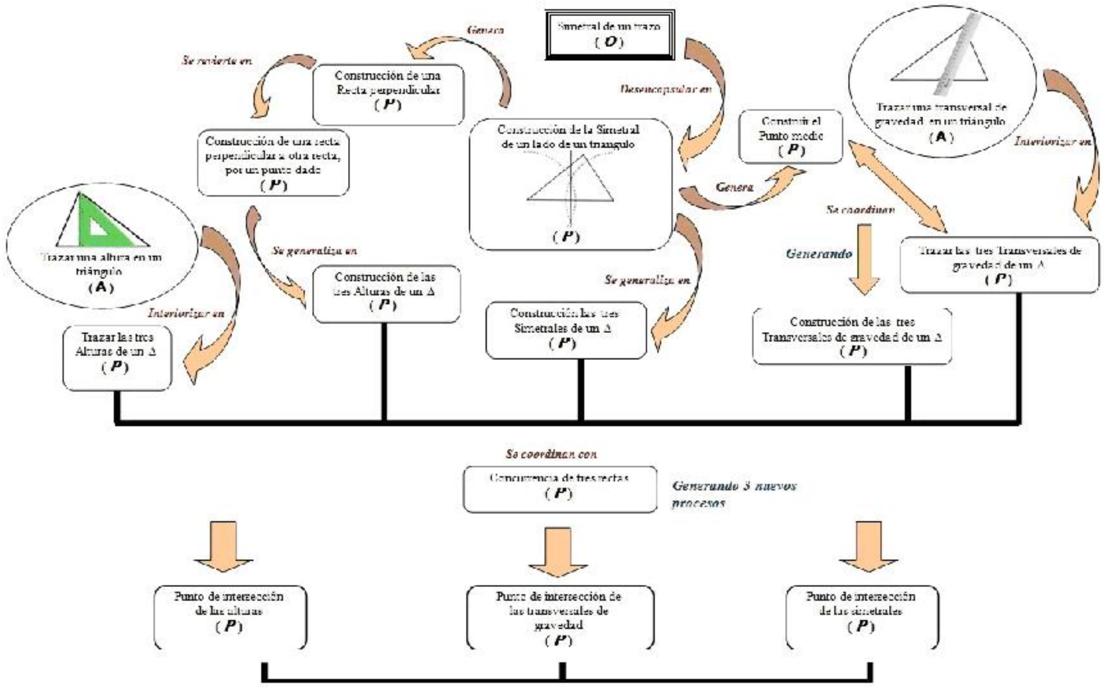


Figura 4: Modelo de aproximación al Objeto Recta de Euler (parte I).

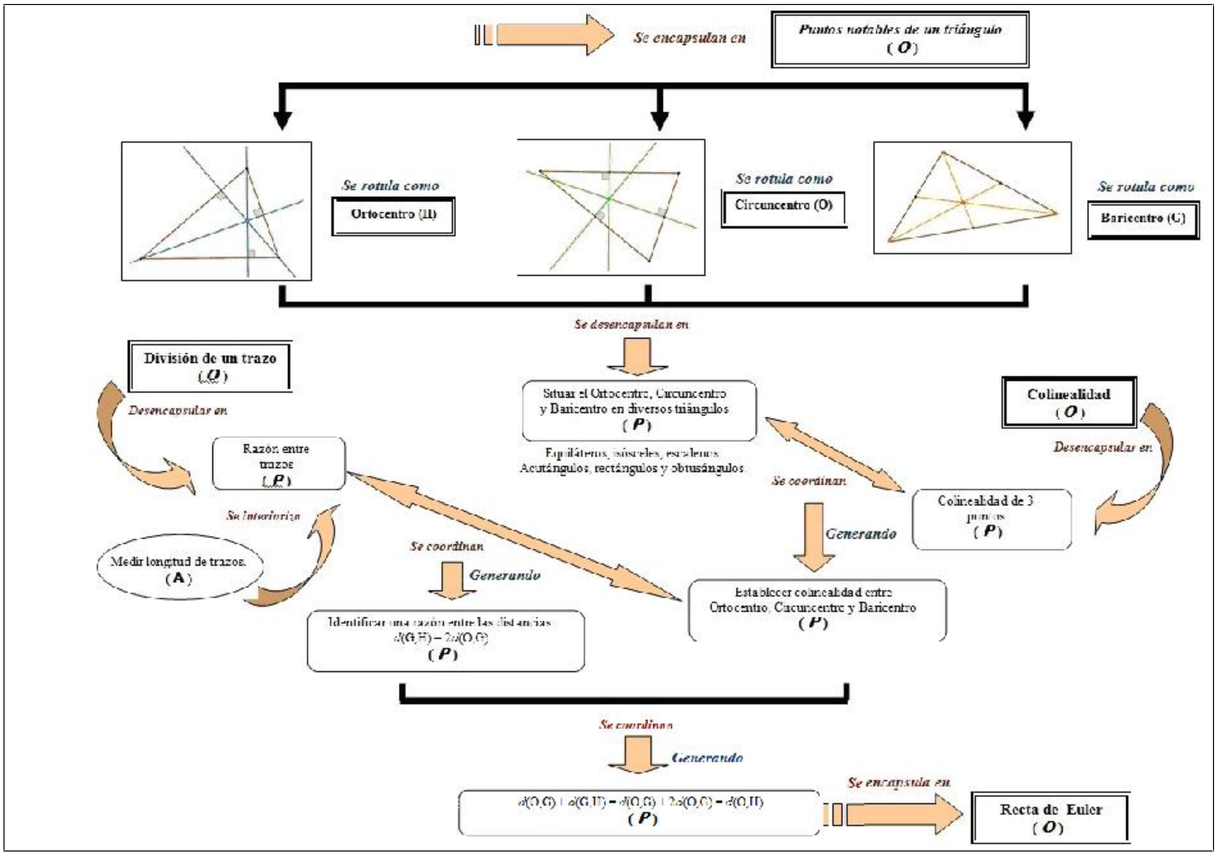


Figura 5: Modelo de aproximación al Objeto Recta de Euler (parte II).

Para documentar la DG propuesta, se diseña un cuestionario que da cuenta del trabajo desarrollado por los informantes al enfrentarse a diversas actividades y preguntas relacionadas con el contenido, el cual dejará en evidencia el cómo éstos individuos han construido la noción de puntos notables, cuáles de sus elementos dominan y qué camino utilizan al momento de desarrollar la construcción cognitiva del concepto Recta De Euler.

A modo de ejemplo se presentan una tarea del cuestionario, su descripción en base a la DG y se explicitan las concepciones de las que da cuenta un estudiante con su desarrollo y explicación.

Parte 2

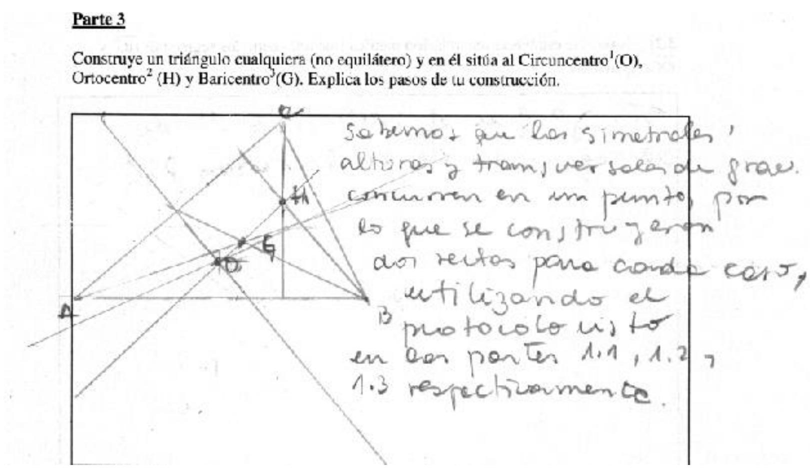
2.1) En un triángulo *ABC*, se genera un punto P_1 al interceptar las simetrales s_a y s_b, y un punto P_2 al interceptar las simetrales s_b y s_c. ¿Es posible afirmar que estos dos puntos son distintos? Justifica tu respuesta.

Si el estudiante responde que no, porque las 3 simetrales se intersectan en un solo punto, mostrará tener una concepción proceso de este elemento, si además logra esbozar una demostración de ésta concurrencia, mostrará tener una concepción objeto. También pudría justificar diciendo que las tres simetrales se intersectan en un punto llamado Circuncentro que es el centro de una circunferencia circunscrita. Si responde que no, asegurando que el punto es el mismo, pero no justifica estará mostrando tener solo una concepción acción de la concurrencia de las simetrales.

Dado que nuestra finalidad es documentar la Descomposición Genética Teórica que se ha diseñado, y dar indicios de que el camino de construcción propuesto en ella es viable, basta que nos concentremos en la evidencia entregada por un grupo particular de informantes, para una indagación en profundidad, ya que según Stake, "El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1998, p. 11).

A continuación se hace referencia al Caso: Estudiantes titulados de la carrera de licenciatura en matemática, destacados en los ramos de geometría.

La *Figura 5* evidencia como el informante 1 muestran tener una concepción objeto de los puntos *O*, *G* y *H*, los informantes 1 y 3 sitúan el Circuncentro, Baricentro y Ortocentro en el triángulo construyendo solo 2 Simetrales, Transversales de Gravedad y Alturas, respectivamente, lo que da cuenta que de dicho proceso ha sido encapsulado.

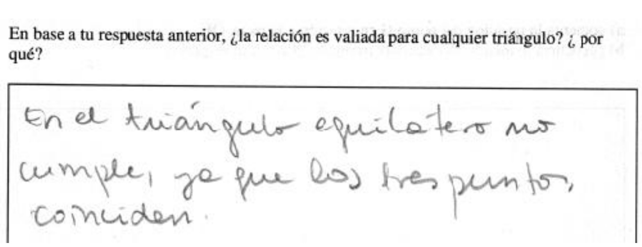


Parte 3

Construye un triángulo cualquiera (no equilátero) y en él sitúa al Circuncentro[1](O), Ortocentro[2] (H) y Baricentro[3](G). Explica los pasos de tu construcción.

Figura 5: Respuesta Informante1, Actividad 3 del cuestionario que documenta la DG.

Las evidencias recolectadas permiten dejar de manifiesto elementos que no habían sido considerando al inicio de la investigación, como el caso del la inexistencia de una única recta que cumpla con las condiciones definidas por Euler en un triángulo equilátero, lo que se analizó debido a la respuesta del informante 2 (ver *Figura 6*), quien afirma que la rezón entre tazos no sería valida en el triángulo equilatero, sin considerar el hecho de que 3 puntos coincidentes mantienen la relación pues la distancia entre ellos es cero.



En base a tu respuesta anterior, ¿la relación es valiada para cualquier triángulo? ¿ por qué?

Figura 6: Respuesta Informante 1, Actividad 3.2 b)

Algunas actividades propuestas

En 1° Medio: Determinar la concurrencia de las rectas notables. Argumentar sobre la concurrencia de las tres simetrales y las tres bisectrices con la noción de lugar geométrico. Caracterizar los puntos notables de un triángulo. Resolver situaciones que involucren los conceptos de puntos notables.
En 2° Medio: Situar los 4 puntos notables en diversos triángulos. Determinar la colinealidad del ortocentro, baricentro y circuncentro. Argumentar sobre la colinealidad de tres puntos notables. Establecer una relación métrica entre las distancias del circuncentro al baricentro y de baricentro al ortocentro. Caracterizar la Recta de Euler.

Conclusiones

El análisis teórico documentado en la DG, arrojó varios elementos que se estiman necesarios, para comprender e interiorizar los conceptos geométricos: Altura, Simetral, Transversal de gravedad, Circuncentro, Baricentro, Ortocentro y Recta de Euler. Los resultados de esta investigación dan cuenta de la viabilidad de la ruta propuesta, es decir, un estudiante que ha construido la recta de Euler por medio de las construcciones y mecanismos mentales expuesto, ha incorporado a sus esquemas mentales las nociones de puntos y rectas notables.

Además la ruta expuesta permite proponer actividades que llevan a la construcción cognitiva del Objeto de estudio en enseñanza media, pues todos sus componente teóricos están enmarcados dentro de los CMO propuestos por el MINEDUC (2009), pero los estudiantes de este nivel no poseen aun las herramientas para demostrar el Teorema asociado a este objeto.

Una actividad que permita deducir la existencia de una recta que pase por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo cualquiera, permite el desarrollo de una geometría, que se bien se desliga de lo concreto, involucra una riqueza conceptual, analítica y procedimental, que hasta la fecha ha siendo ignorada en las actividades propuestas en textos escolares.

REFERENCIAS:

[1] Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, Schoenfeld, Dubinsky (Ed.s) *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. p.1-32.
[2] Dubinsky, E (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.
[3] Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), 25 – 41.
[4] Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, pp. 85-106.
[5] Duran, D. (2005). El Círculo de los Nueve Puntos y la Recta de Euler. *Divulgaciones Matemáticas*. *13*(1), 73-76.
[6] Granero, R. *Problemas famosos de geometría*. Rescatado el 31 de agosto de 2012 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Problemas%20Famosos%20de%20Geometria.pdf
[7] Guillar, M. (2009). Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva " a la "revolución cultural" ISSN: 1316 - 4910 • Año 13, Nº 44 • Enero - Febrero - Marzo, 2009 • 235 - 241.
[8] Mena, A. (2011). Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos. Tesis para obtener el grado de Doctorado en Matemática Educativa (no publicada), Cinvestav, México.
[9] MINEDUC. (2009). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009. Santiago, Chile.

[10] MINEDUC. (2011). Matemática Programa de Estudio Séptimo Año Básico. Santiago, Chile.
[11] Stake, R. (1998). Investigación com estúdio de casos. Ediciones Morata. Madrid. España.

SESION INVITADA

MATEMÁTICA EDUCATIVA

EDUCACIÓN SUPERIOR

SESIÓN INVITADA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Id 11. UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA EL CONCEPTO ESPACIO VECTORIAL R^2

Miguel Rodríguez Jara. Marcela Parraguez González
Universidad de Playa Ancha. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

RESUMEN

Presentamos un diseño teórico de una ruta cognitiva denominada descomposición genética, (DG). En ella se explicitan las construcciones mentales y los mecanismos de abstracción reflexiva que permite a un estudiante universitario construir el concepto de espacio vectorial R2 a partir de su cartesiano R2. El diseño de la DG está sustentado en un análisis histórico epistemológico que comprende los siglos XVII al XX. Resaltan, en el período indicado, la axiomatización y unificación como eventos que imprimen niveles de abstracción y rigor a las construcciones matemáticas (Hernández, 1978; Thom, 1970). Además se consideran algunos antecedentes de la investigación desarrollada por Dorier y su equipo de investigación en relación a la enseñanza y aprendizaje de los conceptos ligados al álgebra lineal, fundamentalmente lo referido al obstáculo del formalismo (Dorier, 1995a, 1995b, 2000; Dorier y Sierpinska, 2002). El marco teórico que sustenta esta investigación –la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) – permite poner en sintonía, los ingredientes cognitivos que se desprenden de dicho análisis, además de proveer de elementos para interpretar y organizar los aspectos matemáticos que se pesquisaron (Asiala, , Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996; Dubisnky, 1996)

UNA MIRADA HISTÓRICA EPISTEMOLÓGICA

Pensar en la axiomatización y la unificación de los asuntos inherentes a la matemática, es remontarse a episodios de nuestra historia, como civilización, que se enmarcan en el desarrollo de esta ciencia; así, por ejemplo, podemos mencionar: la unificación de las geometrías desde el programa de Erlangen propuesto por (Klein, 1872), la axiomatización de la geometría euclideana desarrollada por (Hilbert, 1899), la axiomatización del álgebra lineal que plantea (Van der Waerden, 1930). Dichos episodios ponen de relieve algunos elementos matemáticos como el concepto de relación, función, transformación y grupo, por nombrar algunos, que nos acercan desde distintos ángulos a una estructura algebraica –los espacios vectoriales–.

El proceso de axiomatización como método, tiene su inicio en la geometría euclideana y, en su desarrollo, a partir de la axiomática propuesta por (Hilbert, 1899), no estuvo exenta de dificultades. Por ejemplo, en la axiomatización de la aritmética, desde la teoría de conjunto aparecen paradojas que se instalan a partir de la idea de suponer la existencia de un conjunto de todos los conjuntos (Hernández, 1978; Thom, 1966; Schaaf, 1964). Independiente de lo anterior, el método axiomático se consolida en el siglo XX, con la reforma de las matemáticas modernas; su objetivo, proveer de una base sólida e imprimir un alto nivel de rigor lógico a las construcciones matemáticas, liberándolas de toda intuición (Hernández, 1978).

Por otro lado, el desarrollo de estructuras algebraicas, como la estructura de grupo, comienzan a gestarse en el siglo XVIII lo que permite, a través de un proceso gradual de descontextualización, el posicionamiento de sistemas abstractos; la base para el desarrollo de teorías que conllevan un alto nivel de abstracción, como la teoría de grupo (Kleiner, 2007). Estas estructuras se consolidan en el siglo XX, permitiendo, por ejemplo, la axiomatización del álgebra lineal y en la década de los 60', un impulso a la reforma de las matemáticas modernas; que implicaron un cambio de perspectiva en la enseñanza preuniversitaria y universitaria.

Antecedentes que aportan a la Investigación

Para Dorier (Dorier, 1995a, Dorier, 1995b) el concepto de espacio vectorial así como el de grupo, tiene una naturaleza distinta a la de otros conceptos. El concepto espacio vectorial, desde un punto de vista epistemológico, más que ayudar a resolver nuevos problemas es visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador; al igual que el concepto de límite (Dorier, 2000; Artigue, 2003).

Por otro lado, pensando en su aprendizaje, (Harel, 2000) da cuenta de las dificultades de los estudiantes al ser introducidos repentinamente a los conceptos básicos de los espacios vectoriales desde una perspectiva netamente algebraica, razón por la cual se dificulta la comprensión de éstos. Para subsanar tal deficiencia, desde el punto de vista de su enseñanza, Harel propone una secuencia que está basada en el "principio de representación múltiple" con la idea de incorporar un componente geométrico-algebraico y permitir a los estudiantes una representación de las ideas a trabajar (Dorier et al., 2002).

Indagar en una Problemática

La enseñanza del álgebra lineal está presente en el plan de estudio de diversas carreras universitarias de nuestro país, como por ejemplo: ingenierías, licenciatura en física, licenciatura en matemática, pedagogía en matemática, por citar algunas. Además, si agregamos que los procesos cognitivos que ésta demanda, dada la naturaleza abstracta de los conceptos que están involucrados en su aprendizaje, aspecto que se reporta en las investigaciones desarrolladas en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y, en particular, de los espacios vectoriales (Dorier, 2000), se requiere de un trabajo que favorezca una construcción conceptual efectiva por parte del estudiante.

Por otro lado, desde un punto de vista matemático, cualquier espacio vectorial de dimensión dos es isomorfo a R2, lo que realza la inquietud de conocer más acerca de él, así como también indagar cómo R2 incide en la generalización a Rn como espacio vectorial. Lo anterior son algunas de las razones que avalan nuestra investigación y el trabajo hacia una propuesta didáctica que permita un quehacer efectivo en el aula para la construcción del espacio vectorial en cuestión.

La Teoría Apoe, Marco Teórico y Metodológico

Considerando que nuestro objetivo para esta primera etapa de investigación se centrará en la construcción del concepto espacio vectorial R2, el marco teórico y metodológico bajo la cual desarrollamos esta investigación es la teoría APOE. Esta teoría trata acerca de la construcción del conocimiento matemático y su desarrollo en el individuo, Dubinsky quien propone esta teoría y la ha desarrollado junto al grupo RUMEC, manifiesta lo siguiente:

> "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p. 24-41)

Si analizamos en detalle la cita anterior podemos apreciar algunos elementos que están involucrados en la comprensión de un concepto matemático, a saber las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas y, además, tipos de abstracción reflexiva, (desde la perspectiva piagetana) que la teoría llama mecanismos mentales, a saber: interiorización, coordinación, inversión y encapsulación, las cuales se articulan con las construcciones mentales. En la Figura 1 se puede observar la relación entre las construcciones y los mecanismos que se han mencionado.

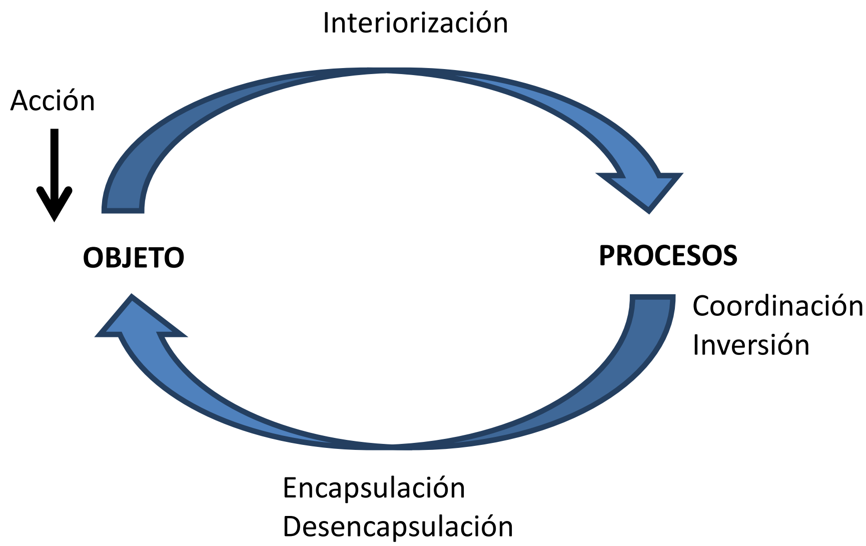


Figura 1: Construcciones y Mecanismos (Asiala et al., 1996)

Ciclo de Investigación de la Teoría APOE

La teoría APOE provee de un ciclo de investigación, que se muestra en la Figura 2, el cual integra tres componentes a considerar, en el proceso de investigación, a saber: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

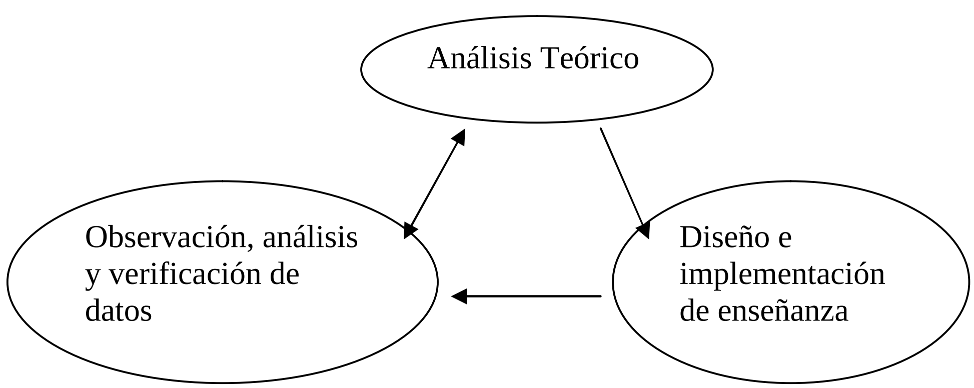


Figura 2: Ciclo de Investigación (Asiala, et al., 1996).

Como lo resaltan (Roa y Oktaç, 2010), el ceñirnos a este ciclo en el proceso investigativo permite tener una mirada más cercana y detallada del proceso de construcción del concepto en estudio y su relación con algunos otros conceptos que subyacen a su alrededor.

Descomposición genética teórica para la construcción cognitiva del espacio vectorial R^2

En particular, centramos la atención en el papel que puede tener el cartesiano R2 en la construcción del espacio vectorial R2. En el siguiente diagrama, Figura 3, se resalta el papel de la parametrización como un mecanismo que ayuda a coordinar algunos procesos involucrados, teniendo como punto de partida la resolución de una ecuación lineal homogénea.

Un primer aspecto a resaltar, considerando el diagrama anterior (Figura 3), es que al resolver una ecuación lineal homogénea con dos incógnitas nos hace destacar los pares ordenados y el conjunto solución (1) , el cual es no vacío pues el par (0,0) satisface dicha ecuación. Además, si se piensa en asignar un valor arbitrario a una de las incógnitas, es posible determinar el valor de la otra en función de dicho valor. Esto brinda la posibilidad de escribir el conjunto solución de dicha ecuación a través de un parámetro (2). Por otro lado, si se repara respecto a que cada valor del parámetro le corresponde un par ordenado y no más de uno, a la luz de la operatoria involucrada, la idea de función se hace visible (3). Más aún, si se piensa en los pares ordenados y la ecuación que los genera, desde la geometría cartesiana, el conjunto solución de una ecuación lineal homogénea se asocia a una recta que contiene el origen del sistema de coordenadas (4). Luego, a partir de la ecuación cartesiana de la recta se obtienen las ecuaciones paramétricas o viceversa (5).

La función y el par (0,0) sugiere tanto la idea de segmento dirigido, como la dilatación y la contracción de éste desde una triada de segmentos dirigidos anclados al origen (6). Lo que conecta con la geometría vectorial desde la regla del paralelogramo (7), así, una componente geométrica al problema. En relación a (8), si pensamos en R2 como espacio vectorial, se deja en evidencia un avance en la construcción de dicha estructura, con un componente algebraico y geométrico, pero a la luz de los elementos que se despliegan se puede constatar que no se logra construir la estructura R2 espacio vectorial pues sólo es posible avanzar hacia la operación multiplicación de un escalar por un vector de R2 (2).

Por último si observamos el siguiente diagrama (Figura 4) se puede apreciar como a través del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, se desprenden los elementos necesarios que dan cuenta, por un lado, de la construcción de la estructura de espacio vectorial (9), (10) y (13) con una carga algebraica y geométrica (11), (12) y (13) y, por otro, desde el concepto de función y de parámetro, avanzar en la riqueza que brinda la estructura de espacio vectorial desde los endomorfismos (14), (15) y (16) y así, la aparición de otra estructura, la estructura de álgebra lineal (17) , que apuntará no tan sólo a dar cuenta de la importancia del papel unificador de la estructura espacio vectorial sino que además sienta las bases para avanzar en nuevas estructuras como los grupos lineales (18) que permiten entender el sentido de la unificación de las geometrías (18) y (19) desde el programa Erlangen propuesto por (Klein, 1872).

Conjunto solución y pares ordenados

$$S_1 = \{(t,-2t)/t \in \mathbf{R}\} \longrightarrow S_1 = \{t(1,-2)/t \in \mathbf{R}\}$$

(el parámetro , un elemento basal y uno referencial, el (0,0))

(2)

$$S = \{\ldots,(-2,2);(-1,1);(0,0);(1,-1);(2,-2)\ldots\}$$

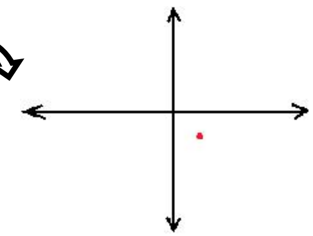
$$S = \left\{\ldots,(0,0);(-8,8);(2,-2)(-5,5);\left(\frac{3}{4},\frac{-3}{4}\right)\ldots\right\} \subset \mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}$$

(1)

(3)

Función

parámetro, invita a describir



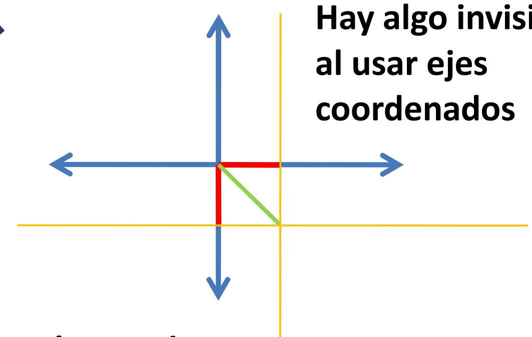
$$T:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2;$$
$$t \to T(t) = (t,-t)$$

(6)

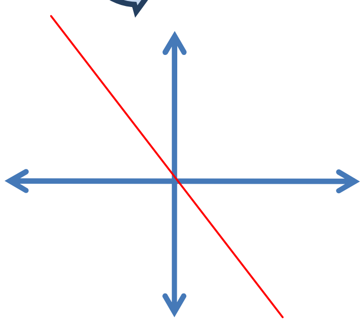
(4)

Resolver ecuación lineal homogénea $2x + y = 0$

Incógnitas, invitan a resolver



Hay algo invisible al usar ejes coordenados



Sistema de coordenadas Rectangular (puede ser no Rectangular) y la línea recta

(5)

$$x = t;\ y = -2t$$
$$y = -2x$$
$$2x + y = 0$$

Ecuación cartesiana y paramétrica

(8)

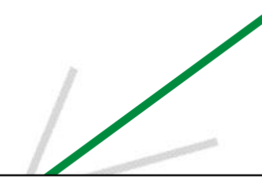
Pensando en R^2 espacio vectorial

- .-Parámetro (escalares)
- .-La idea de segmento dirigido
- .-Multiplicación por un escalar
- .-Diagonal de un paralelogramo
- .-Se trabaja en una dimensión
- .- No alcanza para construir R^2

(7)

El parámetro hace pensar en una dilatación o contracción de un segmento dirigido. Está la idea de COLINEAL.

La idea de segmento dirigido que se dilata o contrae desde la diagonal de un paralelogramo. Atrapar puntos



Nuestro plano En construcción

Figura 3: Sobre la incidencia del cartesiano $\boldsymbol{R}^2$ en la construcción de $\boldsymbol{R}^2$ espacio vectorial

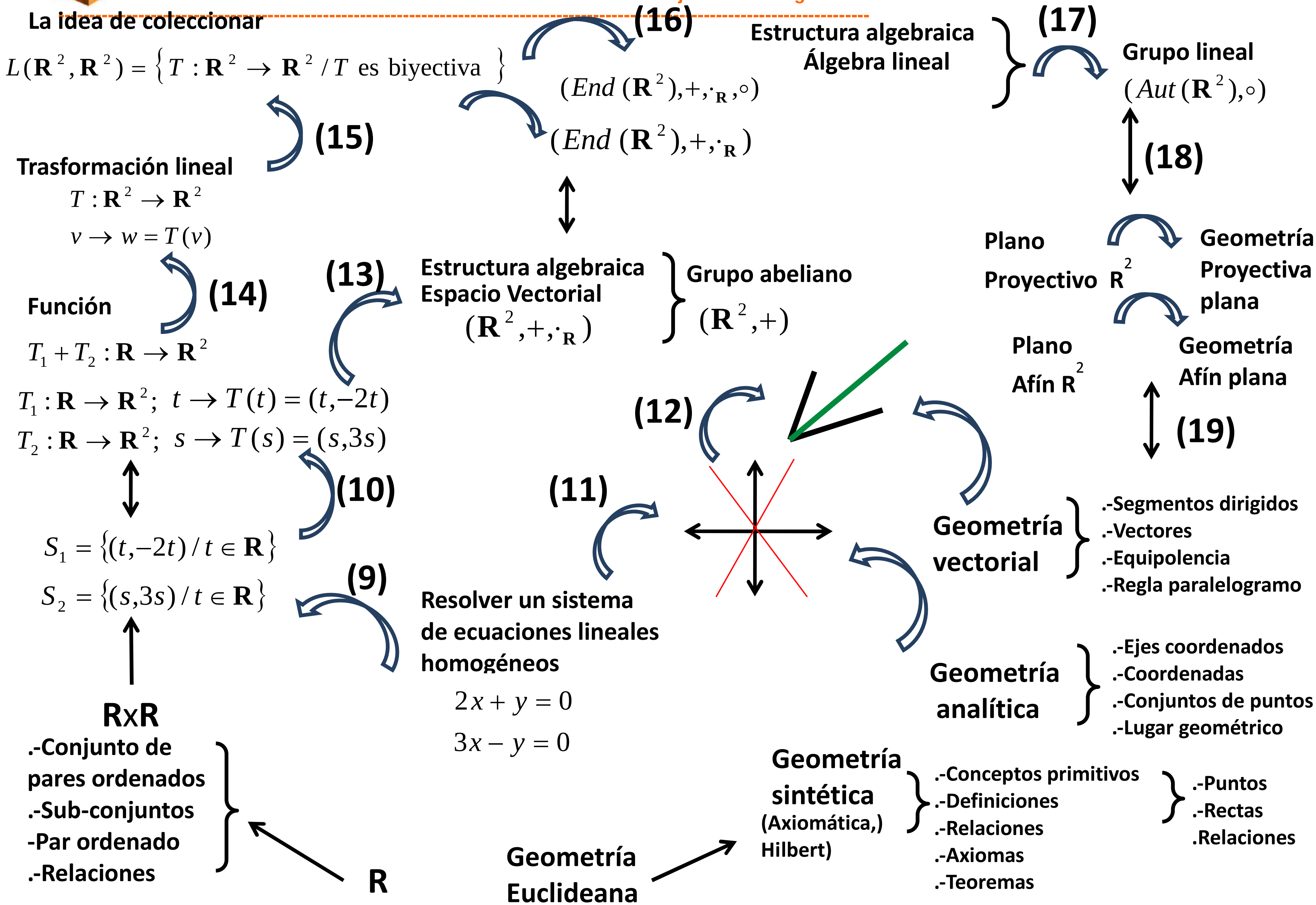
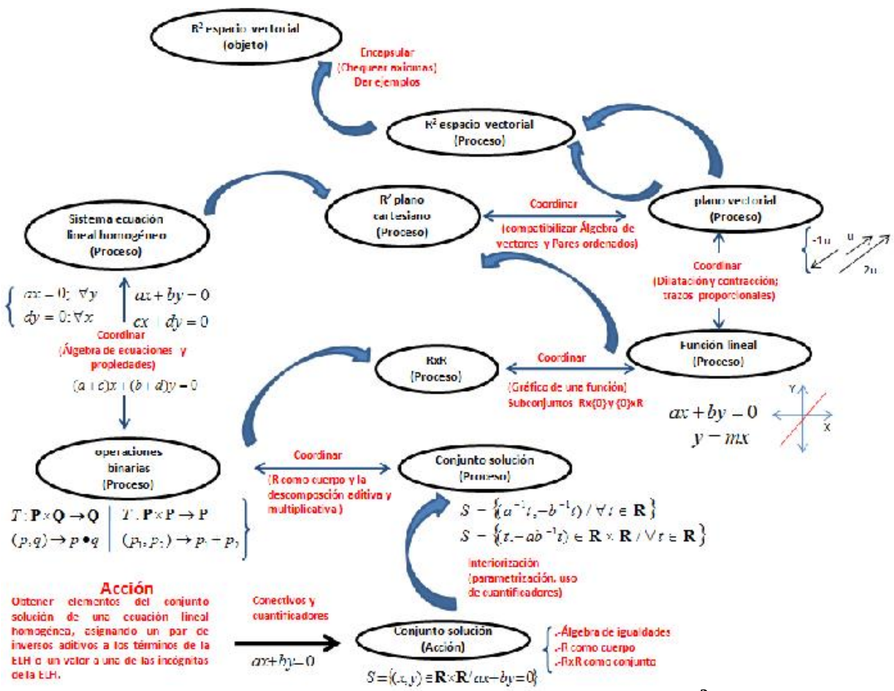


Figura 4: Una Mirada del papela unificador y generalizador del espacio vectorial

En el siguiente diagrama, Figura 5, se explicitan aquellas construcciones y mecanismos mentales que determinan una ruta cognitiva hipotética o descomposición genética (D.G.) sobre la cual un estudiante universitario puede construir cognitivamente el concepto R2 espacio vectorial desde R2 plano cartesiano.

Figura5:



Construcciones y mecanismos mentales en la construcción del $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial

Conclusiones

Para finalizar, consideramos que nuestra descomposición genética teórica para la construcción cognitiva del espacio vectorial R^2 se configura desde dos constructos matemáticos, la de parámetro y función, los cuales son transversales en la construcción que se persigue, y más aún son agentes coordinadores entre el espacio vectorial y el cartesiano asociado a él. La idea de parámetro permite un desarrollo algebraico, desde la resolución de un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales y conecta con la idea de función. Por otro lado ésta nos sitúa en una mirada geométrica, desde la idea de segmento dirigido, evocando así algunos elementos de la geometría vectorial, por ejemplo la regla del paralelogramo en la adición de vectores. En definitiva, nuestra descomposición genética adquiere la característica de unificadora y generalizadora de los conceptos dispuestos alrededor del cartesiano R^2, según sea el caso.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10 (2)*, 117- 132.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) Research in collegiate mathematics education (2). 1-32.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica 22(3)*, 227-261.

Dorier, J. L. (1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics 29(2)*, 175-197.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 3-81), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series 7(3)*, 255-273

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática 8(3)*, 24 – 41.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching Mathematics, With Particular Reference to the Learning and teaching of Linear Algebra: Old and New Observations. In J-L. Dorier (Ed), *On the teaching of Linear Álgebra* (pp 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hernández, J. (1978). Piaget, J.; Choquet, G.; Diudonné, J.; Thom, R. y otros. La enseñanza de las matemáticas modernas. Alianza Editorial. S. A. Madrid.

Hillbert, D. (1930). Grundlagen der Geometrie, 7.a ed., Leipzing-Berlin (Teubner).

Klein, F. (1872). Vergleichende Bertrachtungen uber neuere geometrische orschungen Erlangen. *in Mathematische Annalen 43*, 63-100.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. Printed on acid-free paper. Birkhäuser Boston.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 13(1)*, 89-112.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier de Didactique des Mathèmatiques 18(2)*, 191-230.

Schaaf, W. (1964). How modern matehmatics? *The Matthematics Teacher 57*.

Thom, R. (1970). Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique ? *L'Age de la Science 3*, 225-236.

Van der Waerden, B.L. (1930). Modern Algebra, 2 vols*. Berlin Germany: Springer-Verlag*.

Sesión Invitada MATEMÁTICA EDUCATIVA

Id 12. CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Marcela Parraguez González. Isabel Maturana Peña. Miguel Rodríguez Jara
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
marcela.parraguez@ucv.cl isamatup@hotmail.com mrodriguez@upla.cl

Resumen

Como parte del Proyecto DI-PUCV 037.495-2013, y basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) investigamos desde una postura cognitiva las construcciones y mecanismos mentales necesarios para (re)construir el Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal (TMATL). Los datos que provee la literatura [5,8] señalan en general, que los conceptos en el álgebra lineal son temas cuyo aprendizaje no se alcanza y en relación al teorema que nos ocupa, la literatura disponible es escasa. Diseñamos una descomposición genética, (DG), del TMATL, esto es, investigar la construcción de conceptos, mediante la metodología utilizada en la teoría APOE propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC [2]. Reportamos en este congreso un caso de estudio, cuyos resultados muestran que los estudiantes, construyen el concepto de coordenadas de un vector como objeto, pero no la generalización de ese proceso hacia una matriz de coordenadas.

Abstract

As part of the Project DI-PUCV 037.495-2013 and, based on APOS theory (Actions, Processes, Objects and Schemes), we analyzed from a cognitive stance mental constructions and mechanisms necessary to (re) construct the Associated Matrix Theorem of a Linear Transformation (TMATL). The data provided by the literature [5,8] generally indicates, that the concepts in linear algebra are subjects whose learning is not reached, and in relation with the theorem at hand, the available literature is scarce. We designed a genetic decomposition, (DG) of the TMATL, that is, investigate the construction of the concepts, using the methodology of APOS theory proposed by Dubinsky and RUMEC group [2]. We report a case study at this congress, whose results show that students construct the concept of coordinates of a vector as an object, but not the generalization of this process to an matrix of coordinates.

1.- Introducción: Matriz asociada a una transformación lineal desde la teoría APOE

Nos propusimos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego en la (re)construcción que hacen del teorema matriz asociada a una transformación lineal, (TMATL), dicho teorema establece lo siguiente:

Sean *V* y *W* espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K, $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de *V* y $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de *W*. Los vectores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ están en *W* y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base *B'*:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

En otras palabras, $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, … $[T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; y la matriz asociada a la transformación lineal *T* en las bases *B* y *B'*, que rotulamos como $[T]_B^{B'}$ es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

1.1 Relevancia del teorema

Son dos las principales razones de por qué es importante el aprendizaje del TMATL. En primer lugar, el TMATL, proporciona una manera eficiente de llevar las transformaciones lineales a un equipo digital. La segunda razón es teórica, pero con importantes consecuencias prácticas. La matriz asociada a la transformación lineal T, digamos A, depende de las bases B y B'. Normalmente uno elegiría B y B' para hacer el cálculo de matrices de coordenadas, tan fácil como sea posible. Sin embargo, uno en su lugar podría intentar elegir las bases B1 y B2 para hacer la matriz A lo más simple posible, digamos con un montón de ceros en sus coeficientes. Cuando esto se hace en la forma correcta la matriz A puede proporcionar información importante sobre La transformación lineal.

1.2 Objetivos de Investigación

Determinar las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un individuo como estrategia cognitiva para construir el TMATL. En el lenguaje de la teoría APOE: diseñar y documentar una descomposición genética del teorema.

1.3 Fundamentación teórica

Los proponentes de APOE han venido publicando sus resultados desde la década de los 80; su metodología ha sido validada por diversos trabajos del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) y otros. La presentación que sigue se puede encontrar, por ejemplo, en [3, 4, 6].

Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de ella o mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión. Estos originan diferentes construcciones (mentales): acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Tomemos un fragmento *F* de conocimiento matemático –Teorema matriz asociada a una transformación lineal–. Un individuo posee una concepción acción de *F* si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de *F* si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. (Puede coordinar dos o más procesos o revertir uno para obtener un nuevo proceso). Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F. Si necesita volver desde el objeto al proceso que lo forma, lo hace desencapsulando el objeto. (Las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de aplicar rótulos antes de que los objetos hayan sido encapsulados). Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el individuo evoca un esquema y lo desenvuelve para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellas, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética, (DG), describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que el aprendiz pueda seguirlo para tener buen éxito. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas del individuo.

1.4 Metodología

Esta investigación propone comprender los procesos mentales que operan en las estrategias de aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios. Particularmente, nos interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales que un estudiante realiza para aprehender el TMATL; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE (acción-proceso-objeto-esquema), la cual posee su ciclo de investigación, que nos proporcionará mediante su aplicación, evidencias empíricas de aquellos mecanismos y construcciones mentales, para modelar el aprendizaje del TMATL. Como es sabido, las estructuras mentales que un individuo ha desarrollado previamente determinan la construcción de nuevos conceptos, en particular, los matemáticos. Para examinar estos procesos cognitivos, se ha recogido información de registros de observación, y de discursos, que permiten analizar dicha información en el marco del teorema matemático y así aportar conocimiento a la didáctica de la matemática, respecto de los mecanismos cognitivos que ponen en funcionamiento los estudiantes, al reconstruir un teorema algebraico asociado a una transformación lineal. El diseño que permite un estudio en profundidad a través de los discursos, acciones y documentos, es el estudio de casos, por lo que se ha optado por este diseño metodológico de investigación. Los estudio de casos son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje [1], permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo [7, p. 69]. Por otra parte es preciso dejar en claro que nuestras conclusiones provendrán de la teoría APOE y de su metodología.

Las unidades de estudio son alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de las carreras de Ingeniería. El argumento razonado o sustento teórico que explica esta selección de la muestra, se vincula con los procesos formativos que esta casa de estudios brindan al teorema, y así indagar con mayor profundidad en los procesos mentales del concepto matriz asociada a una transformación lineal, desprendido de sus enseñantes; pero sí, basados en sus aprendizajes matemáticos previos, y conexiones.

La selección de los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como “caso”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, género, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Estos criterios de selección, se basan en recopilación de datos que permiten focalizar la unidad de estudio tal como lo plantea la Grounded theory [9], porque permite generar teoría a partir de la información contenida en el dato por un lado y la teoría del APOE por otra.

1.5 Ciclo de investigación de APOE

Al caso de estudio se aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos [2]. La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. Una DG propiamente tal es el resultado de la aplicación completa de las tres componentes de ese ciclo, que permite documentarla con los datos empíricos. Suponemos que la investigación proveerá, además, de elementos para una comprensión más acabada de conceptos involucrados o subyacentes al teorema matriz asociada a una transformación lineal, tales como coordenadas, transformaciones lineales, homomorfismos, y también acerca del concepto de vector propio, utilizado en diversas ramas de la Matemática.

2.- Desarrollo

2.1 Descomposición genética del TMATL

A continuación presentamos el relato de la descomposición genética, propuesta en la investigación, para determinar las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego para construir el concepto matriz asociada a una transformación lineal (MATL). Hemos decidido incorporar mediante dos figuras (figura 1 y figura 2), referidas a dos tramos de la descomposición genética que consideramos relevantes para dar cuenta de dicha construcción, constituyendo las bases de este reporte.

Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre MATL, sostenemos que:

Para que un estudiante llegue a construir la MATL como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales V y W, con dimensiones finitas: digamos n y m respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B=\{v_1,v_2,\dots, v_n\}$ y $B'=\{w_1,w_2,\dots, w_m\}$ de los espacios V y W respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector w al espacio vectorial W, también como proceso.

Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas B y B' de V y W respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base B. La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada B' de W, con la pertenencia de un vector w a W, se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar w como combinación lineal de los vectores de la base ordenada B' de W, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector w en la base B', es decir, $[w]_{B'}$.

En la figura 1 se muestra en el esquema la coordinación de los procesos que se

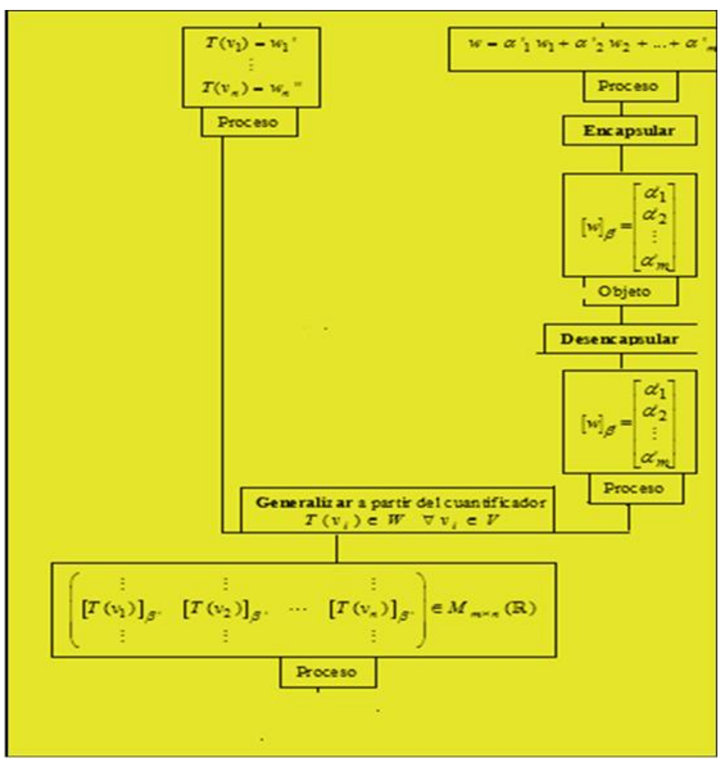


Figura 1. La MATL sus coordenadas.

obtienen de desencapsular el objeto coordenada y el proceso que obtuvimos de la coordinación mediante la transformación lineal, ambos nuevamente serán coordinados por la generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base ordenada *B* de *V.* de esta forma se obtiene la matriz de coordenadas , es decir un ordenamiento de las coordenadas de la imágenes, este proceso es encapsulado en el objeto matricial y rotulado como $[T]_B^{B'}$.

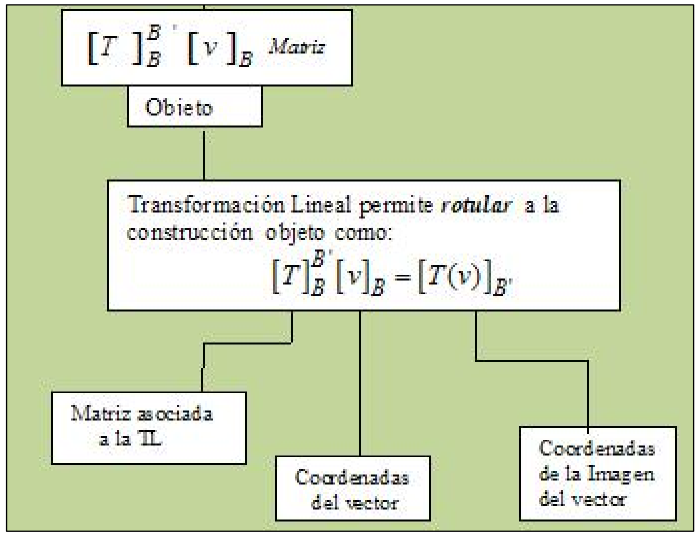


Figura 2.. La MATL en uso.

En la descomposición genética de MATL, consideramos que no es suficiente haber construido este objeto, pues es solo una matriz construida por coordenadas de imágenes de los vectores de la base ordenada *B* de *V.* Para ello proponemos que la construcción de dicha matriz se logra de forma adecuada si se identifica con su rol de función, así la descomposición genética de la figura 2 da cuenta de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción de la MATL como un objeto operativo. El relato de la descomposición en esta parte da cuenta de la des encapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector *v* de *V,* ambos objetos desdencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial, formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_B^{B'}[v]_B$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_{B'}$

2.2 En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Diseñamos un cuestionario de 10 preguntas, con la intensión de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las 10 preguntas.

2.2.1 Análisis a priori del cuestionario

Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, para darlas a conocer en este reporte, que a continuación serán analizadas a la luz de la DG presentada.

PREGUNTA 3: Sea $T: M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^2$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(a+b-c,\ d)$.

Considere $B_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $\mathbf{R}^3$ y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de $\mathbf{R}^2$.

Determine $\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B2}$.

Intención de la pregunta 3

La pregunta da cuenta de la necesidad del poner en juego el mecanismo mental de la generalización, (figura 1) para lograr la construcción objeto de la imagen de un vector específico, el cual es una construcción ya encapsulada. Esta pregunta da cuenta de los mecanismos mentales y construcciones mentales necesarios en la fabricación de los elementos coordenadas de manera general.

Respuesta experta de la pregunta 3

Deberemos proceder de forma análoga a los ejercicios anteriores, por lo que ahora se pretende despejar de la dimensión del cálculo numérico la respuesta y por lo tanto la respuesta es un objeto genérico y general. Es un paso a la generalización necesaria para la construcción de la MATL.

Se sabe que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c,d)$, para encontrar las coordenadas pedidas, debemos escribir el vector imagen como combinación lineal de la base B_2. Es decir:
$(a+b-c,d) = \sim(1,1) + \quad (0,1)$, de donde $\sim\ = a+b-c$ y $\quad = d-a-b+c$.

Por lo que se tiene $\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix}$.

PREGUNTA 5: Considere la transformación lineal $F: \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0) \rangle \to \langle x^2, x+1 \rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0) \rangle$ y $B' = \langle x^2, x+1 \rangle$ determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Intención de la pregunta 5

La pregunta permite observar si la construcción de la MATL es un objeto encapsulado del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función.
El estudiante que no construye este objeto es poco probable que tenga la interpretación funcional de transformación lineal como un objeto (figura 2).

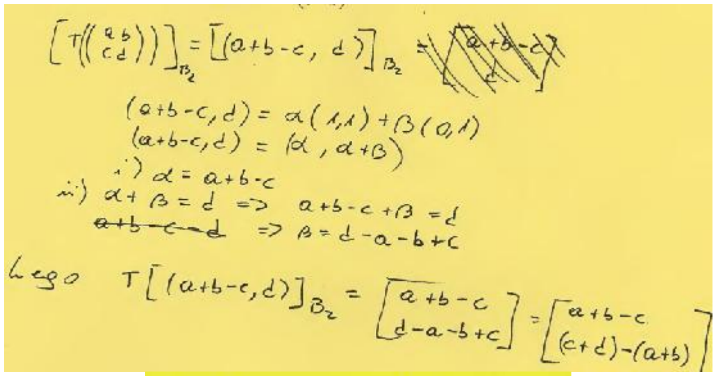
Respuesta experta de la pregunta 5
Para determinar las coordenadas del vector, deberemos aplicar $[F]_B^{B'}[v]_B = [F(v)]_{B'}$, por lo que se tiene que las coordenadas del vector pedidas son: $[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$

2.2.2 Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y Análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes universitarios en las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 3

Estudiante 3 y 4 (E3 y E4). La figura 3 y 4, muestran que las coordenadas del vector imagen $(a+b-c,d)$ en la base B_2 son obtenidas mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Esto interpretado a la luz de las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG, nos muestra que E3 y E4 rotulan la construcción objeto del concepto coordenadas de un vector.



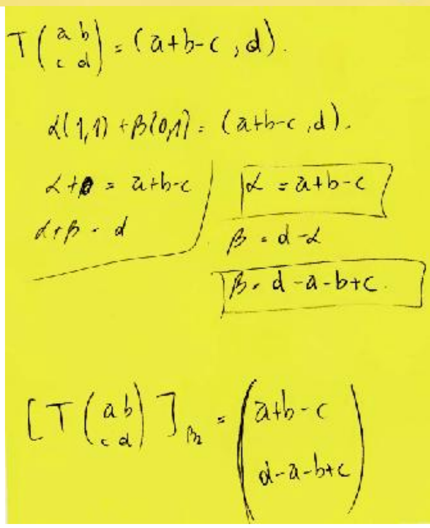


Figura 3. Respuesta que realiza el E3. *Figura 4.* Respuesta que realiza el E4.

Análisis a posteriori Pregunta 5

La figura 5 nos muestra que el E3, no ha construido el proceso dispuesto en nuestra DG, este es:
.

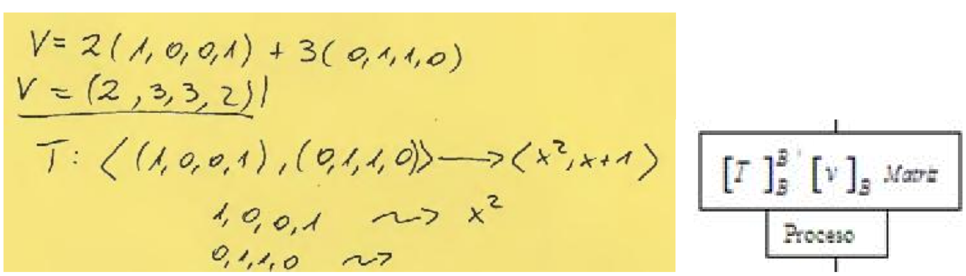


Figura 5. Respuesta que realiza el E3, en paralelo con la porción de la DG.

Opuestamente al E3, E4 ha mostrado el objeto y rotulado al escribir $\left[F(v)\right]_{B'}$, lo cual le permite hacer transformaciones sobre él, y llegar a responder (Figura 6) exitosamente que $\left[F(v)\right]_{B'} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

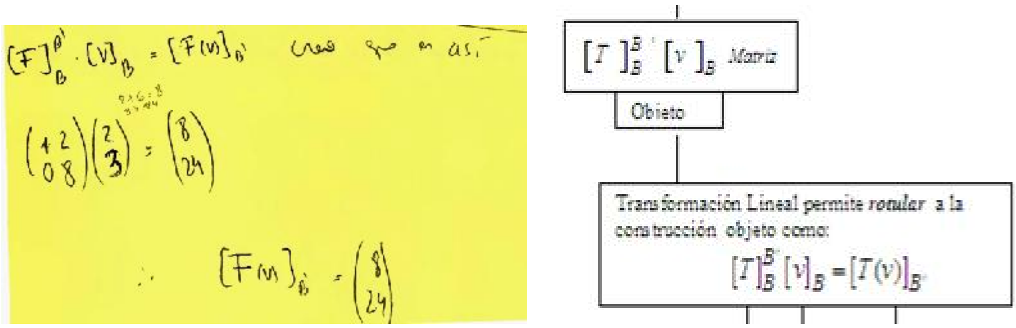


Figura 6. Respuesta que realiza el E4, en paralelo con la porción de la DG.

3.- Conclusiones

En cuanto a la MATL, los dos temas substantivos, según nuestros datos preliminares, vale decir, transformación lineal y matriz de coordenadas, son ignorados por el alumno común, quien se dedica inmediatamente a comprobar que la operación entre la matriz cambio de base y las coordenada del vector en una determinada base, den la igualdad esperada, que no cuestiona, es, digamos conmutativa, o cuál es el rol de la solución de los sistemas de ecuaciones lineales para el cálculo de los escalares dispuestos en la combinación lineal, para determinar las coordenadas de vectores en una determinada base.
Resultados de la investigación a la fecha, indican que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una TL no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de este, es un obstáculo para alcanzar la construcción objetos. Los estudiantes que conforman esta unidad de estudio, excepto dos, no logran construir la matriz asociada a la transformación lineal, es decir, la mecánica empleada en las resoluciones muestra al obstáculo del formalismo en su plenitud, quedando desvinculado (su quehacer) de su concepto de origen, el de tarnsformar vectores, que es la razón de ser de la transformación lineal.

REFERENCIAS

[1] Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.
[2] Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.
[3] Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students. understanding of cosets, normality, and quotient groups. Journal of Mathematical Behavior 16 (3), 241-309.
[4] Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary perations, groups and subgroups. Journal of Mathematical Behavior, 16(3), 187-239.

[5] Dorier, J. L. (1990). Continuous analysis of one year of science students' work, in linear algebra, in first year of french university. Proceedings of the 14th annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 35-42.

[6] Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. Educational studies in Mathematics, 27, 267-305.

[7] Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. España: Morata.

[8] Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. Linear Algebra and its Applications, 432, 2112 – 2124.

[9] Strauss, A., y Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research Techniques and Procedures for developing Grounded Theory (2nd Edition). Sage Publication: London.

Sesión Invitada MATEMÁTICA EDUCATIVA

Id 13. IMPLEMENTACIÓN DE LA ESTRATEGIA P2P PARA GRUPOS GRANDES: ESTRUCTURA DE EXPERIMENTOS ON-LINE PARA UN CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Fernando Toledo. Natanael Guerrero. Julio Borja
Universidad del Bío-Bío. Chillán
ftoledo@ubiobio.cl

Resumen

El principal objetivo de la presentación consiste en mostrar la estrategia de interacción entre pares para grupos. Esta estrategia colaborativa ha sido implementada en la Plataforma docente ADECCA UBB y se aplicó en el curso “Cálculo en Varias Variables y Ecuaciones Diferenciales”, y específicamente en ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, utilizando guías de estructura de experimentos.

Abstract

The main objective of the presentation is to show the interaction between pairs strategy for groups. This collaborative strategy has been implemented in the Teaching Platform ADECCA and applied in the course "Calculus of Several Variables and Differential Equations", specifically in linear differential equations of first order, using structure experiments guides.

Introducción

Existe un amplio consenso que en la enseñanza efectiva de las ciencias y la matemática se debe tener en cuenta las ideas y conocimientos previos de los estudiantes, entre otros aspectos.

Al respecto, varias investigaciones (Bransford, Brown y Cocking, 2000) han identificado que diversas actitudes y concepciones de aprendizaje de los estudiantes son moldeadas por la experiencia en el aula y, que las creencias de los estudiantes son importantes en el momento de seleccionar y usar estrategias de aprendizaje (Schommer, 1990).

Existe abundante evidencia científica que muestra que aquellos cursos donde se enseña en forma tradicional, contribuyen escasamente a mejorar la comprensión de conceptos fundamentales, aun cuando los estudiantes puedan ser exitosos en la resolución de problemas que involucren procedimientos. Esto es evidente en la enseñanza media, y por tanto las experiencias de aprendizaje anteriores de los estudiantes es fundamental en la universidad.

En consecuencia, la búsqueda de estrategias que favorezcan el razonamiento complejo es uno de los desafíos que debe abordar la enseñanza de las ciencias y la matemática a nivel de Enseñanza Media.

En educación superior existen investigaciones que establecen que aquellos estudiantes que han desarrollado habilidades de razonamiento complejo más efectiva es consecuencia de su participación en actividades relacionadas con estrategias que favorecen la cooperación, pues estas constituyen una excelente forma de involucrar con eficacia a los estudiantes (Jonhson, Johnson y Smith, 1991).

En la búsqueda de estas estrategias han emergido métodos que permiten mejorar la comprensión de determinadas materias, tal es el caso de: P2P, P2P para grupos grandes, discusión en base a consenso, y la instrucción entre pares, entre otros.

Por ejemplo, la *Instrucción entre Pares* (PI) es un enfoque centrado en el estudiante, que modifica el formato tradicional de una clase, que incluye preguntas predefinidas a objeto de involucrar a los estudiantes y descubrir dificultades con el material entregado para la clase (Mazur, 1997). Lo explicamos brevemente, pues constituye la base para la estrategia P2P para grupos.

PI proporciona un entorno estructurado para que los estudiantes expresen sus ideas y resolver malentendidos hablando con sus compañeros. Al trabajar juntos para aprender nuevos conceptos y habilidades en una disciplina, los estudiantes crean un ambiente de aprendizaje más cooperativo que hace hincapié en el aprendizaje como una comunidad en el aula (Hoekstra, 2008). Investigaciones sugieren que este tipo de ambiente de aprendizaje cooperativo puede ayudar a promover un aprendizaje más profundo, así como un mayor interés y motivación (Mazur, 1991).

El método puede ayudar a los estudiantes a reconocer cuando no entienden un concepto, cuando no son capaces de responder a una pregunta sobre la lectura, o cuando no pueden dar explicaciones completas a sus compañeros durante la discusión en clase. Con esta retroalimentación formativa, los estudiantes pueden aprender a evaluar mejor su propia comprensión durante el proceso de aprendizaje y a asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje. Además, se favorece

Mazur (2001) ha sido uno de los investigadores que más ha utilizado esta estrategia, en particular en la enseñanza de la física. En la actualidad, esta estrategia se ha visto reforzada con el uso de tecleras (Clickers), lo que contribuye a incrementar la satisfacción del estudiante y fortalecer la comunicación con sus compañeros de clase.

Precisamente, la estrategia PI (lectura previa, peguntas predefinidas, voto, preguntas adicionales, discusión) proporciona oportunidades para profesores y estudiantes a reconocer el conocimiento previo y a partir de ello generar nuevo conocimiento.

Desarrollo

La interacción entre pares y a nivel de grupos, es una generalización de la estrategia de interacción entre pares, la cual se ha complementado con algunas ideas de la estrategia en base a consenso y se ha implementado en la plataforma docente ADECCA UBB, versión 2.

Básicamente, la estrategia opera de la siguiente forma:

1. El grupo-curso es divido en subgrupos. La constitución de cada grupo es libre. El profesor-coordinador debe definir previamente el número de integrantes por grupo.
2. El profesor-coordinador publica en la plataforma ADECCA UBB el problema, proyecto o experimento.
3. El profesor, como coordinador y responsable del curso, define la forma en que debe ser entregado el informe.
4. Para la entrega del informe, el profesor-coordinador establece un plazo de entrega.

5. Una vez que expira el plazo para la entrega del informe, la plataforma ADECCA UBB automáticamente chequea los grupos que han entregado sus informes y luego realiza un proceso aleatorio de asignación de informes.
6. El profesor tendrá a la vista un resumen de administración de informes que básicamente muestra los grupos, los informes enviados y los grupos pares revisores.
7. El grupo revisor, eventualmente podrá contar con una rúbrica – definida por el profesor - para la revisión, evaluación y calificación del informe del grupo par.
8. El profesor-coordinador, en el momento de publicar la actividad, define además la fecha y hora límite para el grupo par evaluador.
9. El profesor-coordinador califica al grupo que envía el informe y al grupo par que evalúa el informe.
10. Cada grupo, al final de la actividad, tiene tres calificaciones: la nota del profesor, la nota del grupo par revisor y la nota del profesor que califica su rol como grupo revisor.

La estrategia se ha utilizado en curso de Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales para la carrera de ingeniería Civil Informática, utilizando la estrategia de Estructura de Experimentos.

Conclusiones

En este trabajo presentamos la estrategia P2P para grupos y su implementación en la plataforma docente ADECCA UBB. Es una estrategia que incrementa la interacción entre los miembros del grupo, favorece la interacción de cada grupo con el profesor y favorece el razonamiento complejo.

La estrategia P2P puede utilizarse en cualquier asignatura, pero sin duda que es recomendable utilizarla en alumnos que hayan tenido previamente la experiencia de trabajo en laboratorios o hayan participado en actividades del tipo PI.

Es importante señalar que esta estrategia fortalece la responsabilidad grupal dado que la eventual omisión de una fase de la actividad lo excluye de los restantes procesos.

La estrategia P2P para grupos puede complementarse con la estrategia PI, una vez que la actividad ha concluido.

REFERENCIAS

[1] Adams, W. K., Perkins, K. K., Podelefsky, N. S., Dubson, M., Finkelstein, N. D. & Wieman, C. E. (2006). New instrument for measuring student beliefs about physics and learning physics: The Colorado Learning Attitudes about Science Survey. Physical Review ST Physical Education Research, 2, 010101.
[2] Bransford, J. D., Brown, A. L. & Cocking, R. R. (2000). How people learn: Brain, mind, experience and schooling. Washington, DC: National Academies Press.
[3] Crouch, C. H. & Mazur, E. (2001). Peer instruction: Ten years of experience and results. American Journal of Physics, 69, 970–977.

[4] Hernández, M.I., Couso, D. & Pinto, R. (2012) The Analysis of Students' Conceptions as a Support for Designing a Teaching/Learning Sequence on the Acoustic Properties of Materials. J Sci Educ Technol, 21:702–712
[5] Hoekstra, A. (2008). Vibrant student voices: Exploring effects of the use of clickers in large college courses. Learning, Media, & Technology, 33(4), 329–341.
[6] Jonhson, D. W., Johnson, R. T. & Smith, K. A. (1991). Active learning: Cooperation in the college classroom. Edina, MN: Interaction Book.
[7] Mazur, E. (1997). Peer instruction: A user's manual. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
[8] Schommer,M.(1990). Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. Journal of Educational Psychology, Vol 82(3), Sep 1990, 498-504. doi: 10.1037/0022-0663.82.3.498

SESIÓN INVITADA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Id 14. APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

Elías Irazoqui Becerra, Claudio Olate Penroz, Juan Paulo Ortega Ponce
Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile
eliasirazoqui@gmail.com

Resumen

Este trabajo, tiene como objetivo central examinar el concepto de Límite finito de una función en un punto. Comenzamos considerando el resultado de una encuesta aplicada a 20 profesores de matemáticas del ámbito universitario del país, de ella obtenemos respuesta a asuntos como: si consideran importante el concepto de límite y cuáles son las dificultades sobre su enseñanza, entre otras. Posteriormente, nos centramos en un análisis de algunos textos de Cálculo, que han sido usados para la enseñanza del Cálculo, tratando de develar qué importancia le dan al concepto de Límite y cuál es la forma de abordarlo, esto es, qué aproximaciones usan para su presentación al lector. Por último, hemos elaborado una serie de Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA), en las que hacemos uso del software Winplot como apoyo al aprendizaje del Límite. Dichas actividades serán implementadas y evaluadas en un siguiente curso de Cálculo.

Palabras claves: Límite, Función, Actividad Didáctica, Winplot.

Abstract

This paper aims to examine the concept of center finite limit of a function at a point. We begin by considering the results of a survey of 20 math teachers from universities in the country, it get a response to issues as they consider important to the concept of limit and what are the difficulties of his teaching, among others. Subsequently, we focus on an analysis of some texts of Calculus, which have been used for teaching calculus, trying to uncover what importance do you give to the concept of limit and what is the way to approach it, that is, what approaches used for presentation to the reader. Finally, we have developed a series of Teaching Learning Activities (ADA), in which we use software to support learning Winplot Limit. These activities are implemented and evaluated on a next course of Calculus.

Keywords: Limit Function, Activity Teaching, Winplot.

Introducción

La enseñanza del Cálculo, en general y, especificamente el concepto de limite no resulta fácil de ser enseñado por los docentes universitarios. Las variables que dificultan su aprendizaje, a pesar de lo numerosas, se pueden agrupar en tres, a saber: epistemológicas, que dan cuenta del concepto en sí, didácticas, que se relacionan con la labor docente y, por último, cognitivas, las cuales se relacionan con las estructuras cognitivas que posee el estudiante para aprehender no solo el límite de una función en un punto.

El concepto de límite há merecido a través del tiempo, la realización de numerosos estudios de tesis doctorales ya por espacio de más de treinta años (Cornu, 1983; Romero, 1991; Espinoza, 1998). Y hoy en día se sigue estudiando por diversos investigadores de diferenetes lugares del mundo (Engler et al., 2007; Bucari et al..2007; Claros et al., 2007; Fernádez-Plaza et al., 2012). La razón fundamental estriba en que dicho concepto, junto a la derivada y la integral constituyen la tríada básica del estudio del Cálculo Diferencial e Integral de una variable.

Además de lo señalado anteriormente está el hecho que dicho concepto puede ser visto como un objeto
de conocimiento que permite estudiar la continuidad de las fuciones, su derivabilidad e integración. De manera que avanzar en una comprensión profunda de él se hace necesario si se desea aprender Cálculo más alla de repetir procedimientos y/o algoritmos, como suele ser el caso común de la dictacción de muchos cursos en los que el aprendizaje se mide por la capacidad de resolver unos cuantos cálculos sin ningún sentido, como podría ser el estimar el valor de un límite , calcular una derivada o una integral, lo que sin duda significa un grado de conocimiento en esta materia pero, cuando se require avanzar en la solución de una aplicación de dicho concepto o abordar un problema no rutinario comienzan las verdaderas dificultades para el estudiante. Y por qué no decirlo también para el profesor, si no há comprendido cabalmente dicho concepto y las implicancias que su uso depara en el conocimiento de Cálculo en sentido amplio.

Ahora bien, en lo que atañe al presente trabajo podemos decir que en él realizamos una suerte de aproximación al Tema en tres sentidos. En la primera de ella presentamos un Cuestionario y los resultados de su aplicación a una muestra de 20 profesores universitarios de Matemáticas del país (UdeC, UTA, UST y UBB, Chillán) . A continuación, lo que constituye nuestra segunda aproximación al tema presentamos un análisis de tres de los siete textos analizados referidos al tratamiento del concepto de Límite, auscultando el grado de importancia que le merecen a sus autores, que conceptos previos consideran y finalmente qué recursos usan y cómo lo abordan. Por último, y configurando nuestra tercera aproximación y, como resultado del análisis y estudio anterior, hemos elaborado una serie de Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA), cinco en total, con el propósito de poder usarlas en un curso de Cálculo en un futuro próximo. Concluimos con una presentación de las Coclusiones que se derivan de lo abordado hasta ahora.

Desarrollo

Hoy en día, las intituciones de Educación Superior de manera preferencial están por privilegiar la labor investigativa de las ciencias y , entre ellas podríamos mencionar las Ciencias Básicas (Matemática, Física, Biología y Química) que son las disciplinas más afines con las cuales convive la Matemática. Desde hace tiempo cohabita por un lado La Educación Matemática y por otro lado el cultivo de la Matemática por sí misma. Muestra de ello son los Congresos Nacionales de nuestro país (Chile), sea este el *COMCA* o el de las *Jornadas de la Matemática de la Zona Sur*. Si esta situación la miramos dentro de los Departamentos de Matemáticas de las Universidades, por lo menos en lo que a nuestra situación respecta, se evidencia una falta de creación y funcionamiento de *Talleres de Discusión Didáctica (TDD)* en los que los temas de la enseñanza se pudiesen discutir y junto con ello poder generar propuestas de innovación didáctica para dar con alternativas de mejora de los procesos de enseñanza de la Matemática en los niveles que amerite. Hay aquí una labor política y de gestión que como académicos estamos llamados a desarrollar en el ámbito docente investigativo de la Educación Matemática de nuestro país. Si bien la Matemática ha tenido un desarrollo aceptable a la Educación Matemática le queda aún trecho por recorrer para alcanzar mejores niveles de logro, de modo que sea un referente claro y orientador respecto de qué políticas implementar a mediano y largo plazo.

Hechos los alcances anteriores, estamos aún lejos de generar *Talleres de Discusión Didáctica* al interior de nuestra unidad académica universitaria. Sin embargo, hemos generado con algunos académicos, más afines a estas materias, un primer cuestionario que sirve de base para avanzar en el conocimiento didáctico del concepto de Límite, y que da origen al presente trabajo, representa para nosostros un primer paso en este sentido.

Así, dimos vida a este Cuestionario que nace del concenso de recabar en alguna medida sobre el concepto de límite y su enseñanza, dicho Cuestionario contó de seis preguntas, las cuales fueron:

P1) En el contexto de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo de una variable para carreras *no Matemáticas* ¿Considera importante el concepto de Límite de una función?

Sí__________ No____________ Justifique su respuesta:

P2) A su juicio, ¿qué conceptos previos considera necesarios para introducir el Límite de una función en un punto?

P3) ¿Cómo introduce el concepto de límite? ¿Qué tipo de recursos y / o ejemplos usa?

P4) ¿Qué texto(s) de Cálculo o Apunte(s) usa como apoyo para la enseñanza del Cálculo de una variable?

P5) ¿Cuáles son las dificultades que usted ha identificado, sobre la enseñanza del Límite? Explicítelas.

P6) Algún comentario que desee hacernos, sobre la enseñanza del Cálculo de una variable, no sólo sobre el concepto de Límite, será bien recibido, muchas gracias.

Como hicimos mención en nuestra Introducción, dicho cuestionario fue contestado por 20 académicos universitarios del país. De él pudimos extraer la siguiente información, la que exponemos a vuestra consideración y reflexión. Para los efectos de este escrito, comentamos sólo las respuestas a las preguntas P1, P2 y P4 del Cuestionario. El análisis de las restantes respuestas serán abordadas como parte de las Conclusiones de este trabajo en atención a su trascendencia e importancia global.

En virtud de ello podemos decir que la pregunta:

P1) obtuvo un *85%* para la opción *Sí.* Un argumento que resume tal postura es: *“ Central para el Cálculo Diferencial e Integral, además contribuye al desarrollo del pensameinto abstracto”*
La opción *No* obtuvo el 15 % de las preferencias, en este caso la razón esgrida fue*:“ Concepto difícil de entender para los alumnos de primer año que no sean estudiantes de Matemática”*

P2) Relacionada con qué conceptos previos se hacen necesarios para estudiarlo, las preferencias de los docentes encuestados arrojó el siguiente resultado, por orden de preferencia:

1. *Funciones (Dominio, Recorrido, evaluar funciones, entre otras), 44 alusiones.*

2. *Álgebra Básica (Factorización, Productos Notables, uso de cuantificadores, entre otros), 18 alusiones.*
3. *Subconjuntos de R (Intervalos, Inecuaciones y Vecindades) , con 8 alusiones.*
4. *Límite de una sucesión y series, con 4 alusiones docentes.*

P4) Respecto a los textos de Cálculo o Apuntes propios empleados por los docentes para usar en la enseñanza de este tópico del Cálculo, la respuesta fue la siguiente:

1. *J. Steward, 7 preferencias*
2. *Apuntes Propios, 6 preferencias*
3. *R. Larson, con 5 preferencias*
4. *L. Leithold, 3 preferencias*
5. *Textos como el de F. Ayres , Thomas, Ellis y Gulick , con dos preferencias cada uno.*
6. *Otros autores de textos de Cálculo mencionados fueron: Stein, Hoffmann y Edwards, con sólo una mención.*

Claramente la opción de los textos de Steward y Larson marcan la pauta respecto a esta pregunta P4), sin desconocer el uso de Apuntes propios generados por los propios docentes.

Como segundo tópico del presente trabajo y, en conexión con la última respuesta añalizada sobre el uso de Textos y apuntes de apoyo para la enseñanza del concepto de Límite y temas afines, presentamos parte de un estudio realizado a siete textos, algunos de los cuales fueron mencionados por los docentes. Hemos puesto nuestra atención sobre qué importancia le dan al concepto, los recursos que usan para su presentación y si lo abordan de la manera clásica, esto es, en térmninos de épsilon y delta. Los textos seleccionados para ello son el de *Robert Larson*, el de *Serge Lang* y por último, un texto que no fue mencionado por los docentes encuestados escrito por un químico, el de *Erich Steiner*, titulado: Matemáticas para las Ciencias Aplicadas.

Sobre el texto de R. Larson, titulado: Cálculo I (Octava edición del año 2006), podemos señalar de entrada los comentarios que dichos autores (Larson et al. , 2006) hacen presente antes de abordar el Capítulo 1 referido a: Límites y su propiedades, dichos comentarios son:

1. *" Una técnica que se puede utilizar para estimar un límite consiste en trazar la gráfica y luego determinar el comportamiento de la gráfica a medida que la variable independiente se acerca a un valor específico"*

2. *"Aprenderá a encontrar los límites de las funciones de manera analítica, gráfica y numérica"*

La importancia asignada al concepto de Límite en este texto es : *Alta.* Además, la presentación se hace de manera tradicional en cuanto a la secuencia de los contenidos tratados y, con una preparación para el Cálculo tratadada en un Capítulo inicial llamado Capítulo P. Posteriormente se aborda el concepto de "Límite y sus propiedades", en el Capítulo 1, para continuar con la Derivación que conforma el Capítulo 2.

Para Introducir el concepto usa la *función racional:* $f(x)= (x^3-1)/(x-1)$, *com* $x \neq 1$. Construye su gráfico y elabora una tabla de valores. Con ello conduce al lector a una aproximación informal del Límite. A continuación examina cinco ejemplos sobre estimación de límite, utilizando Aproximación Gráfica y Tabular simultaneamente.

Posteriormente define formalmente el concepto de Límite en términos de épsilon y delta, para ello examina tres ejemplos, dos de ellos relacionados con funciones lineales y una función cuadrática (y=x^2), en los cuales determina el valor de delta para un épsilon dado. Termina exponiendo un listado de 76 ejercicios para continuar posteriormente con las propiedades de los Límites (Teoremas).

Sobre el texto de S. Lang, del año 1990. Como hicimos con el texto anterior, las palabras de este autor son decidoras y elocuentes respecto de lo que podemos esperar en su exposicón en este texto, ellas son:

1. *"La experiencia muestra que los estudiantes no tienen una base psicológica adecuada para aceptar un estudio teórico de los límites, y se resisten de manera formidable"*

2. *"Mi opinión es que ε - delta debería quedar completamente fuera de un curso ordinario de Cálculo"*

Hechos estos comentarios previos, podemos decir que la importancia que este autor le da al concepto de Límite es: *Regular*. Lo que no significa que su uso no sea necesario para desarrollar los temas del Cálculo. Deja para el Apéndice su examen y demostraciones relacionados con el concepto. Más bien se centra en el concepto de Derivada, introduciendo dicho concepto a partir de la función cuadrática y=x^2 y poniendo atención al punto P=(1,1), donde determina la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Posteriormente define el conceto de Derivada como el límite del Cociente de Newton. Expone una lista de propiedades sobre los Límites, los que considera intuitivamente claros y sin demostración, explicando finalmente que ha de entenderse por el lim F(h) = L, cuando h tiende a cero. En definitiva este autor usa el concepto de límite como un instrumento matemático que le permite definir la Derivada, en ello centra de modo preferente su atención.

Por útimo analizamos *el texto de E. Steiner*. Ya advertimos que es un texto escrito por un químico y, por ende, para que sirva de base a quienes estudian una carrera relacionada con esta disciplina. Bien sabemos que muchas de las carreras no Matemáticas, como por ejemplo las Ingenierías, tienen dentro de sus mallas curriculares asignaturas en las que la Química es una asignatura importante, en cuyo caso el análisis de este texto bien merece la pena. Hechos estos alcances preliminares, señalamos lo que el autor declara en el Prefacio de su obra, a saber:

1. *"Una característica de este libro es el uso extenso de ejemplos para ilustrar todos los conceptos y métodos importantes del texto"*

2. *"El texto se acompaña de una historia de las matemáticas en notas a pie de página"*

En resumen, la importancia dada al concepto en términos de su desarrollo y presentación es *Baja.* Define en primer término la derivada y la continuidad, lo curioso sin definir previamente "Límite". Después de eso aborda el concepto de límite usando para ello la función racional f(x)= (x^2-4)/(x-2). Para ilustrar la estimación del límite usa aproximación Tabular derecha e izquierda, deduciendo así que el límite de esta función cuando x tiende a dos es cuatro.

Si los textos de estudio referidos al Cálculo son importantes, tanto para el docente encargado de enseñar este tópico (límite) como para el estudiante que lo aprende, también es trascendente lo que sucede al interior del aula, y más específicamente en los Tallerers, Laboratorios o Clases Prácticas que se realizan para apoyar el proceso de aprendizaje de la Matemática. Conscientes de ello, creemos abolutamente necesario poner nuestra atención en lo que hemos denominado el desarrollo de Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA) para los estudiantes, con el claro propósito de ayudar a la comprensión del “Límite” y temas afines que son tratados en las clases teóricas.

No vamos a descubrir ahora que la forma de apreder Matemáticas es a través de la resolución de ejercicios y problemas, tanto rutinarios como no rutinarios. Conscientes de ello, nuestro objetivo primordial se centra en producir posibilidades para que nuestros estudiantes se ejerciten, de ahí entonces la clara justificación de la generación de nuestras Actividades de Aprendizaje referidas al concepto de límite. Una vez hecho esto el siguiente paso es poder usarlas y medir de algún modo el grado de efectividad en el aprendizaje de nuestros estudiantes.

Hay dos aspectos que deseamos mencionar aquí y que esperamos tener en cuenta al momento de usar dichas Actividades, ellos son:

1. *La incorporación del software Winplot, de dominio público y por lo demás muy fácil de usar. La idea es usar dicho software previamente, cuando se revise el concepto de función.*

2. *El trabajo de cada uno de los problemas planteados en las Actividades Didácticas se desarrollarán de manera grupal, entre dos o/y tres estudiantes.*

Ahora, en materia de enseñanza, nos hacemos eco del último modelo planteado por Charnay (1994), que es el *modelo apropiativo*, centrado en la construcción del saber por parte del estudiante y, más aún, como resultado de la interacción entre sus pares y el apoyo docente. Al atender este aspecto estamos en perfecta armonía con el Modelo Educativo Institucional que pone el foco en el estudiante más que en el propio docente. Este cambio de paradigma educativo sin duda que requerirá de tiempo para que sea asimilado e instaurado por los docentes. Advertimos que, poco a poco se irá imponiendo como una realidad sin vuelta atrás en la forma de realizar nuestra tarea docente de este siglo.

Damos término a este apartado señalando que hemos dado vida a un total de cinco Actividades Didácticas de Aprendizaje referidas al concepto de Límite de una función en un punto. La última de ellas con el claro próposito de evaluar el aprendizaje logrado por los estudiantes. En ellas además hemos incorporado la continuidad, la que como sabemos se estima mediante el uso del concepto de Límite. En honor al espacio aquí desigando evitamos exponerlas in extenso.

Conclusiones

De los tres temas abordados en este trabajo podemos adelantar algunas conclusiones en dos de ellos, el primero referido al resultado de la aplicación del Cuestionario a los docentes universitarios y el segundo al análisis hecho a los tres textos de Cálculo. La aplicación y posterior evaluación de las ADA referidas al concepto de Límite será materia de otra exposición.

En lo que guarda relación con el análisis del Cuestionario hemos querido centrar nuestros comentarios finales en las tres preguntas restantes, esto es, en las Preguntas P3, P5 y P6, por la trascendencia que ellas tienen para nuestras Conclusiones y, de este modo, cubrimos de manera completa todo el Cuestionario presentado.

Así, la pregunta tres referente a como introduce el concepto de Límite fue contestada por orden de preferencias por los docentes en los siguientes términos:

1. Uso de Aproximación Gráfica, con 13 alusiones
2. Uso de Aproximación Tabular por derecha e izquierda, con 8 alusiones
3. Uso de recursos informáticos, con 6 menciones
4. Uso de funciones definidas a trozos o donde se producen indeterminaciones, 3 menciones
5. Uso de la definición formal, con 3 alusiones.

La ordenación de esta secuencia, por orden de preferencia, genera la conclusón obvia de cuales son los recursos más usados por los docentes encuestados para introducir el concepto.

Por su parte el análisis de la pregunta cinco (P5), vinculada con las dificultades detectadas, en relación con la enseñanza de este concepto, nos permiten concluir que se advierten problemas en distintos ámbitos, a saber:

1. Relacionadas con el propio concepto, dada la dificultad intrínseca que éste posee.

2. En lo que concierne con el estudiante, se requiere de él un mayor conocimiento tanto del álgebra básica como del conocimiento de las funciones de manera sustantiva.

3. En materia de recursos, se advierte una carencia de material bibliográfico que contemple ejercicios de aplicación a situaciones contextualizadas.

Por último,del análisis de la pregunta P6 del Cuestionario, una pregunta abierta referida a la enseñanza del Cálculo, en sentido amplio, podemos extraer a modo de conclusión, lo siguiente:

1. Los estudiantes precisan de conocimientos previos, en álgebra básica como en el dominio de las funciones.

2. Como docentes debemos ir a lo esencial, no usar ejemplos demasiado complejos, que en nada facilitan la comprensión de los conceptos matemáticos.

3. Posibles líneas de acción docente: generar material didáctico, crear talleres donde la participación de los estudiantes sea un pilar fundamental de modo de ayudarlos para una mejor comprensión de la Matemática que deben aprender, incorporar el uso de Tics y, por último, conectar la disciplina con la Historia de la Matemática.

Respecto de los textos examinados, en esta presentación tan sólo tres de ellos, pero que en nuestro estudio contempló a siete, podemos adelantar las siguientes conclusiones:

1. No podemos señalar qué textos son los más usados, dado que la muestra es muy pequeña para emitir tan temeraria afirmación, sin embargo, textos como los de R. Larson y J. Stewart son de uso común, también lo son los apuntes que los propios docentes han generado para desarrollar su docencia.

2. No hay textos mejores que otros, creemos que todo depende del Programa que deseamos desarrollar y, en virtud de ello, debemos buscar qué texto nos puede servir de inspiración y guía para usar como fuente de consulta para nuestras clases.

3. De la presentación que hacen del concepto, se desprende que ir de aproximaciones gráficas y tabulares a una aproximación analítica y, por tanto formal, es lo aconsejable y de sentido común. Si el objetivo final es o no abordar la definición en términos de épsilon y delta.

4. Los listados de ejercicios que los textos ponen al final de cada tema, por lo general, son muy extensos y repetitivos. Ello obliga a una selección y por ende a la creación de ADA.

5. Haber revisado en varios textos la forma en que presentan y tratan el concepto de límite, ha significado, no sólo conocimiento disciplinar, sino también didáctico, en ello radica la mayor virtud de todo el estudio realizado.

A modo de corolario podemos señalar que estamos convencidos que espacios de reflexión y análisis, que hemos denominado Talleres de Discusión Didáctica (TDD), son asbsolutamente necesarios al interior de los Departamentos de Matemáticas, creo que no podemos imaginar las proyecciones y posibilidades que se pueden generar y realizar si ellos funcionan de verdad. Esta idea fue compartida por uno de nuestros docentes encuestados sin proponérselo siquiera.

REFERENCIAS:

[1] Bucari, N y Bertero, F. y Tripoli, M. (2007). Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo. Jornadas de enseñanza e investigación educativa en el campo de las ciencias exactas y naturales.

[2] Claros , F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el Límite. *PNA, I(3),* 125-137.

[3] Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Tesis doctoral. Universidad de Grenoble.

[4] Charnay R. (1994). *Aprender por medio de la resolución de problemas, en Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones.* Cecilia Parra e Irma Saiz (Comp.) Paidos Educador, pp. 51-63.

[4] Engler, A,. Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D. y Gregorini (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de una variable. *UNIÓN. Número 11, pp. 113-132, ISSN:1815-0640.*

[5] Espinoza, L. (1998). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio. Tesis doctoral. UAB.

[6] Fernandez-Plaza, J. A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á.

Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Odóñez (Eds.) Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 229-237). Jaén: SEIEM.

[7] Lang, S. (1990). *Cálculo.* Addison-Weley Iberaomericana, USA.

[8] Larson R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo I.* Octava edición. Editorial Mc Graw-Hill, Iberoamericana.

[9] Romero, L. (1991). Un modelo didáctico para la adquisición del concepto de Límite. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

[10] Steiner, E. (2005). *Matemáticas para las ciencias aplicadas.* Editorial Reverté, España.

DMATULS PROCEEDINGS

Departamento de Matemáticas ULS
Facultad de Ciencias
Universidad de La Serena
Cisternas 1200, La Serena, Chile
http://www.dmatuls.cl
edicionesdmatuls@userena.cl