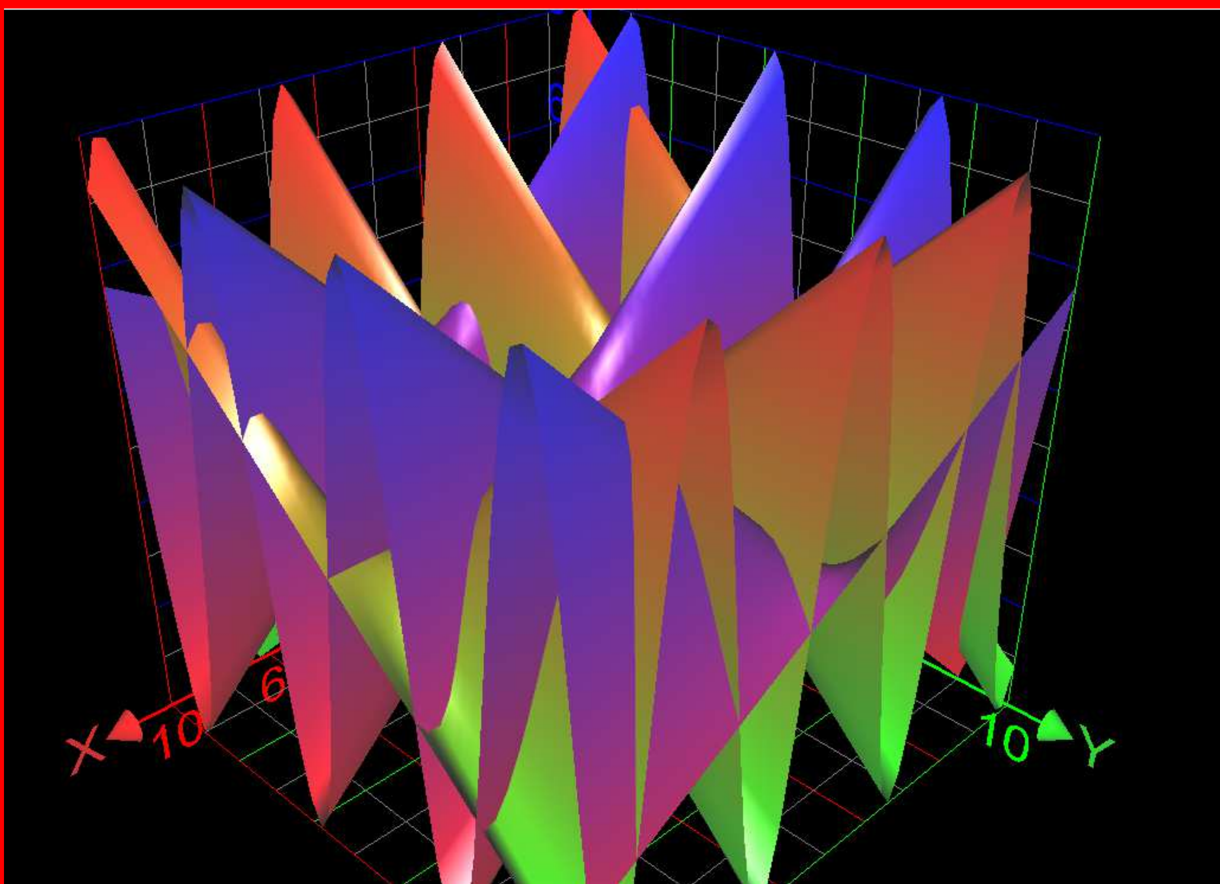
ÁLGEBRA

Prof. Raúl Castillo S.



Índice

Prólogo

Presentamos aquí un texto de problemas resueltos de Álgebra para estudiantes de Ingeniería . Es necesario que el alumno sepa con anterioridad la teoría , ya que no se tratará en este libro.

Prof. Raúl castillo S.

La Serena 2017

Inducción

Problema 1.-

Demuestre que

$$2+2^2+2^3+....+2^n=2(2^n-1)$$

Solución:

P(1) es cierta pues 2=2(2-1)

Ahora supongamos que P(n) es cierta , o sea

$$2+2^2+2^3+....+2^n=2(2^n-1)$$

Entonces

$$2+2^2+2^3+....+2^n+2^{n+1}=2(2^n-1)+2^{n+1}=2^{n+1}+2^{n+1}-2=2(2^{n+1}-1)$$

o sea P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n .

Problema 2.-

Demuestre que 4^n+5 es divisible por 3

Solución:

P(1) es cierta , pues 4+5 = 9 es divisible por 3

Supongamos ahora que P(n) es cierta , o sea $4^n + 5$ es divisible por 3 . Ahora $4^{n+1} + 5 = 4(4^n + 5) - 15$, donde claramente ambos términos son divisibles por 3 . Luego P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n.

Problema 3.-

Demuestre que $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solución:

P(1) es cierta , pues $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Supongamos ahora que P(n) es cierta , o sea

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ entonces

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

O sea P(n+1) es cierta y luego la proposición vale para todo n

Problema 4.-

Demuestre que $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+......+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Solución:

P(1) es cierta pues $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$

Supongamos ahora que P(n) es cierta , o sea

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+......+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+......+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

O sea P(n+1) es cierta y luego la proposición vale para todo n

Problema 5.-

Demuestre que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

Solución:

P(1) es cierta pues $1=2-\frac{1}{2^0}$

Ahora supongamos que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

Entonces $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$

O sea P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n

Problema 6.-

Si a>b ,a>0 , b>0 , demuestre que $a^n > b^n$

Solución:

Claramente P(1) es cierta por hipótesis . Ahora supongamos que $a^n > b^n$, entonces multiplicando por la desigualdad a>b se tiene $a^{n+1} > b^{n+1}$. O sea P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n

Problema 7.-

Demuestre que $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+.....+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2\text{n}+7)}{6}$

Solución:

P(1) es cierta pues $1\cdot 3=\frac{1(1+1)(2+7)}{6}=3$

Ahora supongamos que $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+.....+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2\text{n}+7)}{6}$

Entonces

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+.....+n(n+2)+(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+3)=\frac{n(n+1)(2\,\mathrm{n}+7)}{6}+(n+1)(n+3)=\frac{(n+1)(\mathrm{n}+2)(2\,\mathrm{n}+9)}{6}$$

Luego P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n.

Problema 8.-

Determinar si el producto de tres números impares consecutivos es siempre divisible por 6

Solución:

Sea P(n): (2n-1)(2n+1)(2n+3)=6k , donde q es un número natural,

Queremos determinar si P(n) se cumple para todo n . Ahora

P(1)=1.3.5 =6q , de donde q=5/2 y no pertenece a los naturales

En consecuencia P(1) es falso y P(n) no es necesariamente cierto

para todo n natural.

Problema 9.-

Determinar si la suma de tres enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

Solución:

P(n): n+(n+1)+(n+2)=6q , q natural

P(1) es cierta pues 1+2+3=6 (q=1)

Ahora supongamos que P(n) es cierta o sea

n+(n+1)+(n+2)=6q . Ahora

P(n+1) : (n+1)+(n+2)+(n+3)=n +(n+1)+(n+2)+3=6q+3=6p , de donde resulta que p=q+(1/2) que no es un número natural , es decir

P(n) cierta no implica P(n+1) cierta . En consecuencia, la suma de tres enteros consecutivos no es necesariamente divisible por 6.

Problema 10.-

Determinar todos los enteros naturales para los cuales

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4......n > 2^n$

Solución:

La fórmula no es válida para n=1,2,3 y para n=4 da

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24 > 2^4 = 16$ que es verdadero . Supongamos ahora que la fórmula es válida para n mayor o igual que 4 , o sea

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4......n > 2^n,\ n \geq 4$

Pero entonces $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4......n(n+1) > 2^n(\mathrm{n}+1) > 2^n\cdot 2 = 2^{n+1},\ n \geq 4$

Así , por el principio de inducción la fórmula vale para todo n mayor o igual que 4.

Problema 11.-

Demostrar que si n es impar 7^n+1 es divisible por 8

Solución:

Primero hacemos un cambio de índices n=2i-1 , i=1,2,3....

,por demostrar $7^{2i-1}+1$ es divisible por 8 . Claramente se cumple para i=1 . Ahora supongamos que $7^{2i-1}+1$ es divisible por 8 ,entonces

$$7^{2i+1}+1=7^2(7^{2i-1})+1=7^2(7^{2i-1}+1)-7^2+1=7^2(7^{2i-1}+1)-48$$

donde ambos términos del miembro derecho son divisibles por 8

Así , P(i+1) es cierta y la proposición vale para todo i natural.

Problema 12.-

Se define f en los naturales de la siguiente manera:

f(1)=25 y f(n+1)=f(n)+4

a) Examinando algunos valores de f , conjeturar una fórmula para f(n)

b) Demostrar la conjetura

Solución:

a) f(1)=25 , f(2)=f(1)+4 = 25+4 , f(3)= f(2)+4=25+2(4) ,f(4)=f(3)+4=

25+3(4) ......

Así, una fórmula razonable para f parece ser f(n)=25+4(n-1)

b) Si n=1 , 25+4(1-1)=25 =f(1) se cumple

Supongamos que f(n)=25+4(n-1), ahora por definición de f ,

f(n+1)=f(n)+4=25+4(n-1)+4=25+4n , lo que confirma nuestra conjetura , entonces vale para todo n.

Problema 13.-

Sean $a_1, a_2, ...a_n \in (-1,0)$ Demostrar que

$(1+a_1)(1+a_2).....(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+.....+a_n$

Solución:

Si n=1 se tiene $1+a_1 \geq 1+a_1$ se cumple .

Supongamos ahora que $(1+a_1)(1+a_2).....(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+.....+a_n$

Entonces

$$(1+a_1)(1+a_2).....(1+a_n)(1+\mathrm{a}_{n+1}) \geq (1+a_1+a_2+.....+a_n)(1+a_{n+1}) =$$
$$1+\mathrm{a}_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}+(a_1a_{n+1}+...+a_na_{n+1}) > 1+\mathrm{a}_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}$$

donde en el último paso se eliminó una cantidad positiva (el paréntesis) ,lo que refuerza la desigualdad. Así P(n+1) se cumple y la proposición vale para todo n.

Problema 14.-

Demuestre que para n natural , $4^n+15n-1$ es múltiplo de 9

Solución:

Si n=1 se tiene 4+15-1=18 , se cumple

Supongamos ahora que $4^n+15n-1$ es divisible por 9 , entonces

$$4^{n+1}+15(n+1)-1=4(4^n+15n-1)-9(5n-2)$$

Ambos términos de la derecha son divisibles por 9 . Por lo tanto

la proposición es cierta para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 15.-

Demuestre que si n es natural , entonces $3^{2n+1}+4\cdot 23^n$ es divisible por 7.

Solución:

Se cumple para n=1 , pues $3^{2+1}+4\cdot 23=119=7\cdot 17$

Supongamos ahora que $3^{2n+1}+4\cdot 23^{n}$ es divisible por 7 , entonces

$3^{2(n+1)+1}+4\cdot 23^{n+1}=9(3^{2n+1}+4\cdot 23^{n})+56\cdot 23^{n}$, donde ambos términos de la derecha son divisibles por 7 . Luego P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n.

Problema 16.-

Demuestre que $10^{n+1}+10^{n}+1$ es divisible por 3

Solución:

Se cumple para n=1 pues 10(10)+10+1=111=3(37)

Ahora supongamos que se cumple para n , es decir $10^{n+1}+10^{n}+1$

es divisible por 3 , entonces

$$10\cdot 10^{n+1}+10^{n+1}+1=10(10\cdot 10^{n}+10^{n}+1)-9$$

y donde ambos términos de la derecha son divisibles por 3

Así, P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n.

Problema 17.-

Demuestre $\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\geq n$

Solución:

Si n=1 se cumple ya que $\sqrt{1} \geq 1$. Supongamos ahora que

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n} \geq n$ Entonces $\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \geq n+\sqrt{n+1} \geq n+1$

Así , vale para n+1 y por lo tanto vale para todo n.

Problema 18.-

Demuestre que $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$

Solución:

P(1) es cierta pues 0=0 . Supongamos ahora que

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$$

Entonces

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{n-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n!-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

Así, P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n.

Problema 19.-

Demuestre que

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Solución:

Se cumple para n=1 . Ahora supongamos que

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Entonces

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(\mathrm{n}+1)\,\mathrm{x}$$

y se cumple para n+1 , luego vale para todo n.

Problema 20.-

Demostrar que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n} \leq \frac{n}{2}+1$

Solución:

Se cumple para n=1 , pues $1 \leq \frac{1}{2}+1$

Ahora supongamos que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n} \leq \frac{n}{2}+1$

Entonces $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\leq\frac{n}{2}+1+\frac{1}{n+1}$

Probaremos que el lado derecho es menor que $\frac{n+1}{2}+1$

En efecto,

$$1\leq n \Leftrightarrow n^2+n+2\leq n^2+2n+1 \Leftrightarrow n^2+n+2\leq(n+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{n(n+1)+2}{n+1}\leq n+1 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)+2}{2(n+1)}\leq\frac{n+1}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{2}+\frac{1}{n+1}\leq\frac{n+1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{n}{2}+1+\frac{1}{n+1}\leq\frac{n+1}{2}+1$$

Así , P(n+1) es cierta y luego vale para todo n

Problema 21.-

Sea $a_1=14\ ,a_{n+1}=a_n^2-2$, demostrar que $\sqrt{3(a_n^2-4)}$ es divisible por 4

Solución:

P(1) es cierta , pues $\sqrt{3(14^2-4)}=\sqrt{576}=24=4\cdot 6$

Supongamos ahora que $\sqrt{3(a_n^2-4)}$

es divisible por 4 , entonces

$$\sqrt{3(a_{n+1}^2-4)}=\sqrt{3((a_n^2-2)^2-4)}=\sqrt{3a_n^2(a_n^2-4)}=a_n\sqrt{3(a_n^2-4)}$$

que claramente es divisible por 4, luego la proposición vale para todo n.

Problema 22.-

Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} 3^k(2k-1) = 3^{n+1}(n-1)+3$

Solución:

Se cumple para n=1 pues

$$\sum_{k=1}^{1} 3^k(2k-1) = 3(2-1) = 3^{1+1}(1-1)+3 = 3$$

Supongamos ahora que $\sum_{k=1}^{n} 3^k(2k-1) = 3^{n+1}(n-1)+3$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k(2k-1) + 3^{n+1}(2n+1) = 3^{n+1}(n-1)+3+3^{n+1}(2n+1) =$$
$$3^{n+1}((n-1)+(2n+1))+3 = 3n\cdot 3^{n+1}+3 = 3^{n+2}n+3$$

Así , se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 23.-

Demuestre que

$n^3 - n$

es divisible por 6

Solución:

Claramente se cumple para n=1 , ahora supongamos que

$$n^3 - n$$

es divisible por 6, entonces

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n - n = (n^3 - n) + 3(n^2 + n) =$$
$$(n^3 - n) + 3n(n+1)$$

donde los últimos dos términos son divisibles por 6 , el primero por hipótesis y el segundo divisible por 3 y también por 2 (producto de dos enteros consecutivos) . Así, P(n+1) es cierta y luego se cumple para todo n.

Problema 24.-

Demuestre que

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9

Solución:

Se cumple para n=1 pues $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 9 \cdot 4$

Ahora supongamos que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

es divisible por 9 , entonces

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 =$$
$$(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) + 9(n^2 + 3n + 3)$$

Donde ambos términos de la derecha son divisibles por 9, luego

se cumple para n+1 y entonces vale para todo n.

Problema 25.-

Demuestre que $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ es múltiplo de 17

Solución:

La podemos escribir como $15\cdot 25^{n}+2\cdot 8^{n}$

se cumple para n=1 pues $15\cdot 25+2\cdot 8=391=17\cdot 23$

Ahora supongamos que $15\cdot 25^{n}+2\cdot 8^{n}$ es múltiplo de 17

Entonces

$$15\cdot 25^{n+1}+2\cdot 8^{n+1}=15\cdot 25\cdot 25^{n}+2\cdot 8\cdot 8^{n}=$$
$$25(15\cdot 25^{n}+2\cdot 8^{n})-34\cdot 8^{n}$$

Donde los últimos dos términos son múltiplos de 17.Así , vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 26.-

Demuestre que $7^{n}-1$ es divisible por 6

Solución:

Claramente se cumple para n=1 . Supongamos que vale para n

entonces $7^{n+1}-1=7(7^{n}-1)+6$ expresión que claramente es divisible por 6 .Luego vale para n+1 y en consecuencia vale para todo n.

Problema 27.-

Demuestre que $2^{2n}>n^{2}$

Solución:

Claramente se cumple para n=1 . Supongamos ahora que se cumple para n . Ahora

$4^{n}>n^{2}\Rightarrow 4^{n+1}>4n^{2}$ .Pero $n>1\Rightarrow 2n>n+1\Rightarrow 4n^{2}>(n+1)^{2}$

Así , P(n+1) es cierta y la proposición vale para todo n.

Problema 28.-

Demostrar que $1^{2}+2^{2}+3^{2}+.....+n^{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solución:

Se cumple para n=1 pues $1^{2}=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Supongamos que se cumple para n

o sea $1^2+2^2+3^2+.....+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Entonces

$$1^2+2^2+3^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$
$$\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Así se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 29.-

Demuestre que

$$1^2-2^2+3^2-4^2+......+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

Solución.-

Claramente vale para n=1 . Ahora supongamos que

$$1^2-2^2+3^2-4^2+......+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

Entonces

$$1^2-2^2+3^2-4^2+......+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2=$$
$$(-1)^n(-\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2)=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Así, vale para n+1 y la proposición vale para todo n.

Problema 30.-

Demostrar que $1^2+3^2+5^2+......+(2n-1)^2=\frac{n(2\mathrm{n}-1)(2n+1)}{3}$

Solución: Es claro que se cumple para n=1 . ahora supongamos que

$$1^2+3^2+5^2+......+(2n-1)^2=\frac{n(2\mathrm{n}-1)(2n+1)}{3}$$

Entonces

$$1^2+3^2+5^2+......+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{n(2\mathrm{n}-1)(2n+1)}{3}+(2n+1)^2$$

$$=\frac{(2n+1)(n(2n-1)+3(2n+1))}{3}=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

Vemos que se cumple para n+1 y así vale para todo n.

Problema 30.-

Demostrar que

$$1^3+2^3+.....+\mathrm{n}^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

Solución:

Se cumple para n=1 obviamente . Ahora supongamos que

$$1^3+2^3+.....+\mathrm{n}^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

Entonces

$$1^3+2^3+.....+\mathrm{n}^3+(n+1)^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2+(n+1)^3=$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$$

Así, se cumple para n+1 y por lo tanto vale para todo n.

Problema 31.-

Demostrar que $1+x+x^2+.....+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x\neq 1$

Solución:

Se cumple para n=1 pues

$1+x=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ Ahora supongamos que

$$1+x+x^2+.....+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad , \quad x\neq 1$$

Entonces

$$1+x+x^2+.....+x^n+x^{n+1}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ \ +x^{n+1}=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

Así, vale para n+1 y por lo tanto vale para todo n.

Problema 32.-

Demuestre que $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+....n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Solución:

Claramente se cumple para n=1 . Supongamos ahora que

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+....n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Entonces

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+....n(n+1)+(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{(n+1)(n(n+2)+3(n+2))}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Así , vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 33.-

Demostrar que $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+....n(n+1)(\mathrm{n}+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Solución:

Se cumple para n=1 ya que $1\cdot 2\cdot 3=\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}=6$

Ahora supongamos que

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+....n(n+1)(\mathrm{n}+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Entonces

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+....n(n+1)(\mathrm{n}+2)+(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}+$$
$$(n+1)(n+2)(\mathrm{n}+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)+4(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)}{4}=$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(\mathrm{n}+4)}{4}$$

y así se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 34.-

Demuestre que

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Solución:

claramente se cumple para n=1. Supongamos ahora que

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$\frac{1}{2n+1}(\frac{2n^2+3n+1)}{2n+3})=\frac{1}{2n+1}(\frac{(2n+1)(n+1)}{2n+3})=\frac{n+1}{2n+3}$$

Y así se cumple para n+1 y luego para todo n.

Problema 35.-

Demuestre que $$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+......+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Solución:

Claramente se cumple para n=1 .Supongamos ahora que

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+......+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Entonces

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+......+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n+1}{2n+1}(\frac{2n^2+5n+2}{2(2n+3)})=\frac{n+1}{2n+1}(\frac{(2n+1)(n+2)}{2(2n+3)})=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

Así , se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 36.-

Demuestre que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

Solución:

Claramente se cumple para n=1 , ahora supongamos que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$=\frac{1}{3n+1}(n+\frac{1}{3n+4})=\frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$$

Así , se cumple para n+1 y luego para todo n.

Problema 37.-

Demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+....+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

Solución:

Claramente se cumple para n=1. Supongamos ahora que

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+....+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+....+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n}{4n+1}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$
$$=\frac{1}{4n+1}(n+\frac{1}{4n+5})=\frac{1}{4n+1}(\frac{(n+1)(4n+1)}{4n+5})=\frac{n+1}{4n+5}$$

Así, se cumple para n+1 y luego para todo n.

Problema 38.-

Demostrar que

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+....+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$$

Solución:

Claramente se cumple para n=1. Supongamos ahora que

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+....+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$$

Entonces

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+....+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}+\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{n}{a(a+n)}+\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$$
$$=\frac{1}{a+n}(\frac{n}{a}+\frac{1}{a+n+1})=\frac{1}{a+n}(\frac{a(n+1)+n(n+1)}{a(a+n+1)}=\frac{n+1}{\mathrm{a}(a+n+1)}$$

Así, se cumple para n+1 y luego para todo n.

Problema 39.-

Si

$v_0=2$, $v_1=3$ y $v_{n+1}=3v_n-2v_{n-1}$ Demostrar que $v_n=2^n+1$

Solución:

Si n=0 y n=1 tenemos $v_2=3v_1-2v_0=3\cdot3-2\cdot2=5=2^2+1$

Ahora sea $v_{n-1}=2^{n-1}+1$, $v_n=2^n+1$ Entonces

$$v_{n+1}=3(2^{n+1}+1)-2(2^{n-1}+1)=2\cdot2^n+1=2^{n+1}+1$$

Así, vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 40.-

Probar que $u_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ si $u_1 = \dfrac{a^2 - b^2}{a-b}$, $u_2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a-b}$, $a \neq b$

y si para n>2 se cumple $u_n = (a+b)u_{n-1} - abu_{n-2}$

Solución:

Se cumple o obviamente para n=1 , n=2 . Ahora supongamos que

$u_{n-2} = \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}$, $u_{n-1} = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}$, entonces

$$u_n = (a+b)\frac{a^n - b^n}{a-b} - ab\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{a^{n+1} - ab^n + ba^n - b^{n+1} - ba^n + ab^n}{a-b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Problema 41.-

Hallar una expresión para la suma

$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n!$

Solución:

$S_1 = 1 = 2! - 1,\ S_2 = 5 = 3! - 1\ ,S_3 = 23 = 4! - 1....$

Hipótesis : $S_n = (n+1)! - 1$

Claramente se cumple para n=1

Ahora supongamos que $S_n = (n+1)!-1$

Entonces

$$S_n + (n+1)(n+1)! = ((n+1)!-1) + (n+1)(n+1)! =$$
$$(n+1)!((\mathrm{n}+1)+1) - 1 = (n+2)!-1$$

Así, se cumple para n+1 y vale para todo n.

Problema 42.-

Demuestre que $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ $\quad , x \neq \pm 1$

Solución:

Se cumple para n=0 , en efecto

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} = \frac{-1-x+2}{1-x^2} = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

Ahora supongamos que

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad , x \neq \pm 1$$

Entonces

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} + \frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}} =$$
$$\frac{1}{x-1} + 2^{n+1}\left(\frac{1+x^{2^{n+1}} + 1-x^{2^{n+1}}}{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})}\right) = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+2}}{1-x^{2^{n+2}}}$$

Así , se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 43.-

Sea

$$a \neq b\ ,\ a+b \neq 1\ ,\ a+b=m\ ,\ ab=l$$

$$A_2 = m-\frac{l}{m-1}\ ,\ A_3 = m-\frac{l}{m-\frac{l}{m-1}}\ ,\ A_4 = m-\frac{l}{m-\frac{l}{m-\frac{l}{m-1}}}$$

$$\forall n>1 \quad A_{n+1} = m-\frac{l}{A_n}$$

Probar que $A_n = \dfrac{(a^{n+1}-b^{n+1})-(a^n-b^n)}{(a^n-b^n)-(a^{n-1}-b^{n-1})}$

Solución:

Para n=2 tenemos por una parte

$$A_2 = m-\frac{1}{m-1} = (a+b)-\frac{ab}{(a+b)-1} = \frac{(a+b)^2-(a+b)-ab}{a+b-1} =$$

$$\frac{a^2+b^2+ab-a-b}{a+b-1}$$

Y por otro lado tenemos

$$A_2 = \frac{(a^3-b^3)-(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)-(a-b)} = \frac{a^2+b^2+ab-a-b}{a+b-1}$$

Resultados que son coincidentes y así vale para n=2

Supongamos ahora que

$$A_n = \frac{(a^{n+1}-b^{n+1})-(a^n-b^n)}{(a^n-b^n)-(a^{n-1}-b^{n-1})}$$

Entonces

$$A_{n+1} = (a+b) - \frac{ab((a^n-b^n)-(\mathrm{a}^{n-1}-b^{n-1}))}{(a^{n+1}-b^{n+1})-(a^n-b^n)} =$$

$$\frac{(a+b)(a^{n+1)}-b^{n+1})-(a+b)(a^n-b^n)-ab(a^n-b^n)+ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{(a^{n+1}-b^{n+1})-(a^n-b^n)} =$$

$$\frac{(a^{n+2}-b^{n+2})-(a^{n+1}-b^{n+1})}{(a^{n+1}-b^{n+1})-(a^n-b^n)}$$

Así, vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 44.-

Simplificar el polinomio

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-.......+(-1)^n\,\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}$$

Solución:

Para n=1 se tiene

$$1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1}$$

Para n=2 se tiene

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}$$

Para n=3 se tiene

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}=$$
$$-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}$$

Hipótesis

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-.......+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}=$$
$$(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)....(x-n)}{n!}$$

Ahora

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-.......+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)...(x-n)}{(n+1)!}=$$
$$(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)....(x-n)}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)...(x-n)}{(n+1)!}=$$
$$(-1)^{n+1}(\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{n!})(\frac{x}{n+1}-1)=(-1)^{n+1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n-1)}{(n+1)!}$$

Así, se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 45.-

Probar que la suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9

Solución:

Tenemos $1^3+2^3+3^3=36=9\cdot 4$ y entonces vale para n=1

Ahora supongamos que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9

Entonces

$$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=(n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27=$$
$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+9(n^2+3n+3)$$

Donde ambos términos de la derecha son divisibles por 9 ,luego

se cumple para n+1 y entonces vale para todo n.

Problema 46.-

Probar que $11^{n+2}+12^{2n+1}$ es divisible por 133

Solución:

Para n=1 la expresión da 3059=133(23) , luego se cumple para n=1

Ahora supongamos que se cumple para n , entonces

$$11^{n+3}+12^{2n+3}=121\cdot 11^{n+1}+12\cdot 144^{n+1}=$$
$$11(121\cdot 11^{n}+12\cdot 144^{n})+1596\cdot 144^{n}=$$
$$11(11^{n+2}+12^{2n+1})+133\cdot 12\cdot 144^{n}$$

Ambos términos de la derecha son divisibles por 133 , luego vale para n+1 y para todo n.

Problema 47.-

Demostrar que n rectas diferentes que se cortan en un punto común en un plano , dividen al plano en 2n partes.

Solución:

Se cumple para n=1 ya que una recta divide al plano en dos partes

Supongamos ahora que n rectas dividen al plano en 2n partes .Al agregar otra recta ,estamos agregando 2 partes más o sea un total de 2n+2=2(n+1) partes . Así , se cumple para n+1 y vale para todo n.

Problema 48.-

Demostrar que $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ n>1

Solución:

Se cumple para n=2 ya que $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$

Ahora supongamos que vale para n, entonces

$$S_n=\frac{1}{n+1}+....+\frac{1}{2n} \quad , \quad S_{n+1}=S_n+\frac{1}{2n+1}\Rightarrow$$

$$S_{n+1}>S_n>\frac{13}{24}$$

Así se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Problema 49.-

Demuestre que $2^n > 2n+1 \quad , \quad n \geq 3$

Claramente se cumple para n=3 , ahora supongamos que se cumple para n>3 , entonces

$$2^n > 2n+1 \, , \quad 2^n > 2 \quad , \quad n \geq 3 \Rightarrow 2 \cdot 2^n > 2n+1+2 = 2(n+1)+1$$

Así, vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 50.-

¿Para cuáles enteros naturales n se cumple $2^n > n^2$?

Solución:

Se cumple para n=1 , no se cumple para 2,3,4 y se cumple para n=5 . Supongamos que se cumple para n>4 . Ahora

$2^n > 2n+1$ (problema anterior) y si suponemos $2^n > n^2$

Entonces sumando tenemos

$$2^n > 2n+1 \, , \; 2^n > n^2 \Rightarrow 2 \cdot 2^n > n^2 + 2n+1 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$$

Así, se cumple para n+1 y vale para todo n>4.

Problema 51.-

Pruebe que si n>1 entonces

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

Solución:

Se cumple para n=2 ya que

$$\sqrt{2}+1>2\Rightarrow\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

Supongamos ahora que $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$

Tenemos por otra parte que

$$n>0\Rightarrow n^2+n>n^2\Rightarrow\sqrt{n(n+1)}>n\Rightarrow 1>n+1-\sqrt{n(n+1)}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Sumando esta última desigualdad con nuestra hipótesis de inducción tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$$

sí se cumple para n+1 y luego para todo n>1.

Problema 52.-

Probar que $7^{2n+1}-48^n-7$ es divisible por 48

Solución:

Para n=1 resulta 343-48-7=288=48(6)

Ahora supongamos que se cumple para n, entonces

$$7^{2n+3} - 48^{n+1} - 7 = 7 \cdot 49 \cdot 49^{n} - 48 \cdot 48^{n} - 7 =$$
$$49(7^{2n+1} - 48^{n} - 7) + 48^{n} + 48 \cdot 7$$

Las cantidades del lado derecho son todas divisibles por 48.

Así , se cumple para n+1 y luego para tono n.

Problema 53.-

Probar que $n^3 + 3n^2 + 2n$ es divisible por 6

Solución:

Claramente se cumple para n=1 . Supongamos ahora que se cumple para n , entonces

$$(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 2n) + 3n(n+1) + 6$$

donde los términos de la derecha son todos divisibles por 6

,luego se cumple para n+1 y entonces para todo n.

Problema 54.-

Probar que

$$n \geq 2 \ , \ x_1, x_2, \ldots. x_n \ , reales \ \ entonces$$
$$|x_1 + x_2 + \ldots. + x_n| \leq |x_1| + \ldots. + |x_n|$$

Solución:

Se cumple para n=2 por la desigualdad triangular .Ahora supongamos que se cumple para n , entonces

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + ... x_n| + |x_{n+1}| \leq (|x_1| + ... + |x_n|) + |x_{n+1}|$$

Así , se cumple para n+1 y luego para todo n.

Problema 55.-

Probar que $n^2 + 3n$ es divisible por 2

Solución:

Claramente se cumple para n=1 .Supongamos que se cumple para n , entonces

$$(n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = (n^2 + 3n) + 2(n+2)$$

Los términos de la derecha son divisibles por 2 . luego vale para n+1 y para todo n.

Problema 56.-

Demuestre que $(n+1)(3n+6)$ es divisible por 6

Solución:

Claramente vale para n=1 . Supongamos ahora que vale para n

entonces

$$(n+2)(3n+9)=3\mathrm{n}^2+6n+9n+18=$$
$$(n+1)(3n+6)+6n+12$$

Los términos de la derecha son divisibles por 6 ,luego vale para n+1 y para todo n.

Problema 57.-

Demuestre que $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ es divisible por a+b

Solución:

Claramente se cumple para n=1 .Supongamos ahora que se cumple para n , entonces

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=a^2(a^{2n-1}+b^{2n+1})-(\mathrm{a}^2-b^2)\,\mathrm{b}^{2n-1}$$

donde los términos de la derecha son divisible s por a+b ,así vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 58.-

Demuestre que $a^n - b^n$ es divisible por a-b

Solución:

Se cumple obviamente para n=1 . Supongamos ahora que se cumple para n, entonces

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b)$$

Donde los términos de la derecha son divisibles por a-b , luego se cumple para n+1 y para todo n.

Problema 59.-

Demuestre que para n natural se tiene

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Solución:

Para n=1 es obvio . Supongamos que se cumple para n, entonces

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x(x^n - y^n) + y^n(x-y) =$$
$$x(x-y)(\mathrm{x}^{n-1} + x^{n-2}y + ...xy^{n-2} + y^{n-2}) + y^n(x-y) =$$
$$(x-y)(x^n + x^{n-1}y + ... + xy^{n-1} + y^n)$$

Por lo tanto se cumple para n+1 y luego para todo n.

Problema 60.-

Demuestre que $a^{2n}-b^{2n}$ es divisible por a+b

Solución:

Claramente se cumple para n=1. Supongamos ahora que se cumple para n, entonces

$$a^{2n+2}-b^{2n+2}=a^2(a^{2n}-b^{2n})+b^{2n}(a^2-b^2)$$

Así, vale para n+1 y luego para todo n.

Problema 61.-

Demuestre que

$$2^{n-1}(\mathrm{a}^n+b^n)>(\mathrm{a}+\mathrm{b})^n \quad , \; a+b>0 \; , a\neq b \;\; , \;\; n>1$$

Solución:

Tenemos $a\neq b \Rightarrow (a-b)^2>0 \Rightarrow a^2+b^2>2ab \Rightarrow 2(a^2+b^2)>(a+b)^2$

luego se cumple para n=2. Supongamos ahora que se cumple para n . Entonces por demostrar

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1})>(a+b)^{n+1} \qquad (1)$$

Partiendo de la hipótesis de inducción tenemos

$$2^{n-1}(a^n+b^n)(a+b)>(a+b)^{n+1} \qquad (2)$$

Bastaría probar que la expresión de la izquierda en (1) es mayor que la expresión de la izquierda en (2). En efecto:

$$a \neq b \Rightarrow (a^n - b^n)(a-b) > 0 \Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} - ab^n - ba^n > 0$$
$$\Rightarrow 2a^{n+1} + 2b^{n+1} > a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1} \Rightarrow$$
$$2(a^{n+1} + b^{n+1}) > (a^n + b^n)(a+b) \Rightarrow$$
$$2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > 2^{n-1}(\mathrm{a}^n + b^n)(a+b)$$

Así , se cumple para n+1 y luego para todo n>1.

Problema 62.-

Demostrar que para x>0 , n natural se tiene

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n+1 \qquad (1)$$

Solución:

Tenemos $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ (2)

y se cumple para n=1 . Para n=2 (1) toma la forma

$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3$ (3) Y como (2) se cumple para todo x positivo se tiene $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ y sumando 1 a ambos miembros se tiene (3)

Supongamos ahora que se cumple (1) hasta n+1 y reemplazando x por x^{n+2} en (2) se tiene $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} \geq 2$ .Sumando esta última ecuación a (1)

se tiene

$$x^{n+2}+x^{n}+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^{n}}+\frac{1}{x^{n+2}}\geq n+1+2=(n+2)+1$$

Así, vale para n+2 y la proposición vale para todo n.

Problema 63.-

Demostrar que n rectas en el plano , tales que ningún par de ellas son paralelas y tampoco ningún trío de ellas concurren en un punto común , dividen al plano en $\frac{n^2+n+2}{2}$ partes .

Solución:

Se cumple para n=1 ya que una recta divide al plano en dos partes . Ahora supongamos que se cumple para n, entonces si agregamos una recta más que cumpla con las condiciones dadas se agregan n+1 partes a las ya presentes, o sea

$$\frac{n^2+n+2}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2+2n+2}{2}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$$

Entonces la fórmula se cumple para n+1 y luego vale para todo n.

Progresiones

Problema 1.-

Calcule la suma de los n primeros términos de la progresión

2,4,6,....,2n

Solución:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1)$$

Problema 2.-

Si 8k+4,6k-2,2k-7 están en PA ¿Cuál es el valor de k?

Solución:

Se debe cumplir que

(6k-2)-(8k+4)=(2k-7)-(6k-2)

o -2k-6=-4k-5 o 2k=1 o sea k=1/2

Problema 3.-

Demostrar que si los números a ,b, c están en PA , entonces los números

$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ también están en PA

Consideremos

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad , \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

Hay que demostrar que $D_1 = D_2$

i)Si d=0 entonces a=b=c y $D_1 = D_2$

ii) si d=0 , racionalizando se tiene

$$D_1 = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} - \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d} - \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-d} = \frac{2\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{c}}{2d}$$
$$D_2 = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} - \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-d} - \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d} = \frac{2\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{c}}{2d} \Rightarrow D_1 = D_2$$

Así , se cumple la proposición.

Problema 4.-

Un cuerpo en caída libre recorre aproximadamente 4,9 metros en el primer segundo , a4,7 metros en el segundo segundo ,24,5 metros en el tercer segundo y así sucesivamente ¿Cuántos metros recorre durante el decimoquinto segundo ?

Solución:

Los metros recorridos por el cuerpo en caída libre corresponden a los términos en PA 4,9 ; 14,7 ; 24,5 ;.... cuya diferencia es d=9,8

Luego si $a_1 = 4,5$, a_{15} corresponde a la distancia recorrida durante el segundo decimoquinto

$$a_{15} = 4,9 + 14 \cdot 9,8 = 142,1 metros$$

Problema 5.-

Calcular la suma de los 18 primeros términos de una PA con d=6

y término décimo octavo igual a 109

Solución:

De acuerdo a las fórmulas tenemos

$$a_{18} = 109 \ , \ d = 6$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d = 109 - 17 \cdot 6 = 7$$
$$S_{18} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{18(7+109)}{2} = 1044$$

Problema 6.-

Determinar tres números en PA tales que su suma sea 4 y la suma de sus cuadrados sea 50/9

Solución:

Sean a-d , a , a+d los números , entonces

$$(a-d) + a + (a+d) = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

Además $(\mathrm{a-d})^2 + a^2 + (a+d)^2 = \frac{50}{9} \Rightarrow d = \pm\frac{1}{3}$

Dos soluciones 1 , 4/3 , 5/3 o bien 5/3 , 4/3 , 1

Problema 7.-

Intercalar entre a y b un número c de modo que a, b, c estén en PA

Solución:

Se debe cumplir

d=c-a=b-c , entonces 2c=a+b y luego c=(a+b)/2 , además

d=c-a=(a+b)/2 -a , de donde d=(b-a)/2

Problema 8.-

Los números positivos $a_1\ , a_2, ...a_n$ están en PA , demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+.....+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

Solución:

si d=0 , todos los términos son iguales i la igualdad es obvia

Si d es distinto de cero y racionalizando tenemos

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+......+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{a_n-a_1}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})\,\mathrm{d}}=$$

$$\frac{(n-1)\,\mathrm{d}}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})\,\mathrm{d}}=\frac{(n-1)}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$$

Problema 9.-

Calcule la suma de las n potencias positivas de un número a

Solución:

$a + a^2 + ... + a^n$ es una serie geométrica cuya suma es

$$S_n = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \ , \ a \neq 1$$

Si a=1 la suma vale n , si a=0 , la suma vale 0

Problema 10.-

Intercalar entre 3 y 192 cinco números de modo que formen una PG

Solución:

la PG tiene 7 términos , entonces

$$a_1 = 3 \ , \ a_7 = 192 \Rightarrow 192 = 3r^6 \Rightarrow r = 2$$

luego los términos son 6 , 12 ,24 ,48, ,96

Problema 11.-

Si a , b , c , d están en PG demuestre que

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2 \qquad (1)$$

Solución:

Tenemos

$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=r$ y (1) se puede escribir como

$(b(1-\frac{c}{b}))^2+(a(1-\frac{c}{a}))^2+(b(\frac{d}{b}-1))^2=(a(1-\frac{d}{a}))^2$ además

$\frac{b}{a}=r$, $\frac{c}{a}=r^2$, $\frac{d}{b}=r^2$, $\frac{d}{a}=r^3$ y (1) se escribe

$b^2(1-r)^2+a^2(1-r^2)^2+b^2(r^2-1)^2=a^2(1-r^3)^2$

dividiendo esta ecuación por a^2 y como b/a=r se tiene

$r^2(1-r)^2+(1-r^2)^2+r^2(r^2-1)^2=(1-r^3)^2$

Desarrollando ambos miembros se llega a la identidad

$1-2r^3+r^6=1-2r^3+r^6$ lo que demuestra la identidad propuesta.

Problema 12.-

Una bomba de vacío extrae la cuarta parte del aire contenido en un recipiente en cada bombeada. ¿Qué tanto por ciento de aire , que originalmente contenía el recipiente , queda después de 5 bombeadas ?

Solución:

Si a_n denota la cantidad de aire que queda en el recipiente tras la n-ésima bombeada entonces se satisface la relación

$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{4} = \frac{3}{4} a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4}$ o sea los a_n forman una PG

$$a_5 = a(\frac{3}{4})^5 \Rightarrow \frac{a_5}{a} = \frac{243}{1024} = 0,237$$

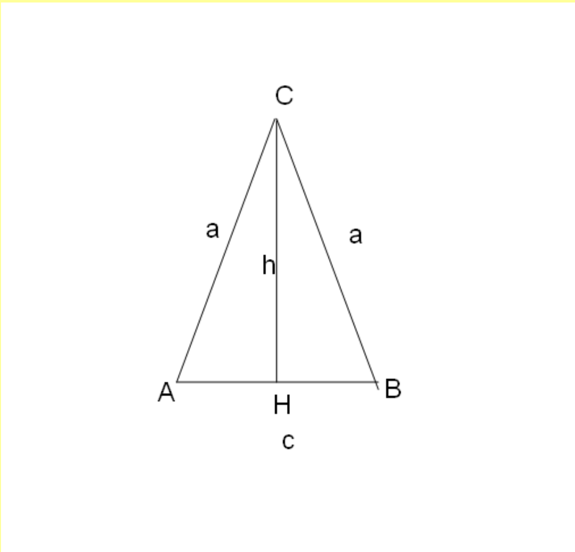
Luego , tras 5 bombeadas resta el 23,7% de la cantidad original.

Problema 13.-

En un triángulo isósceles de lados a , a , c , las cantidades c , h , a están en PG , donde h es la altura correspondiente al lado c.

Determinar la razón r de la progresión

Solución:



Sea r la razón entonces $a = cr^2$ y además

$$h^2 + \frac{c^2}{4} = a^2 = c^2 r^4 \Rightarrow (\frac{h}{c})^2 + \frac{1}{4} = r^4$$

$$\frac{h}{c} = r \Rightarrow r^2 + \frac{1}{4} = r^4 \Rightarrow 4r^4 - 4r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1,099$$

Problema 14.-

Calcular el valor de la suma

$$S = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{3}{3^6} + \ldots\ldots$$

Solución:

Podemos simplificar los términos de orden par para obtener

$$S = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5} + \ldots\ldots =$$

$$\frac{3}{3} + \frac{3}{3^3} + \frac{3}{3^5} + \ldots\ldots = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

Serie geométrica de razón 1/9 , luego

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

Problema 15.-

Una pelota es lanzada desde un metro de altura , si cada vez que rebota alcanza la mitad de altura que tenía antes de rebotar ,calcular la distancia que recorre antes de detenerse.

Solución:

La distancia que recorre la pelota antes de detenerse está dada por la suma

$$S = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{8} + ... = 1 + 2(\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + ...) =$$

$$1 + 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Problema 16.-

Determinar cuáles de las siguientes son PA

a)1,16,11,16................sí ,d=5

b) 4,-1,-6,-11................sí ,d=-5

c) 9, 12 , 16 ....NO

d) 7 , 9+3p , 11+6p .....sí , d=2+3p

Problema 17.-

Hallar el término 16 de la PA 4 , 7 , 10.....

Solución:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{12}{2}(2 \cdot 3 + (12-1) \cdot 5) = 366$$

Problema 18.-

Hallar el término 40 y la suma de los primeros 40 términos de la PA

10 , 8 , 6...

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 10 + (40-1)(-2) = -68$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + \mathrm{a}_n) = \frac{40}{2}(10-68) = -1160$$

Problema 19.-

¿Qué término de la PA 5 , 14 , 23.... es 239?

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 239 = 5 + 9(n-1) \Rightarrow n = 27$$

Problema 20.-

Hallar la suma de los 100 primeros enteros múltiplos de 7.

Solución:

$a_1 = 7 \; , \; d = 7 \; , \; n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{100}{2}(2 \cdot 7 + 7(100-1)) = 35350$$

Problema 21.-

Hallar cuántos enteros consecutivos a partir de 10 se deben tomar para que la suma valga 2035

Solución:

$$a_1 = 10 \; , \; d = 1 \; , \; S_n = 2035 = \frac{n}{2}(20 + 1(n-1)) \Rightarrow$$

$$\mathrm{n}^2 + 19n - 4070 = 0 \Rightarrow n = 55$$

Problema 22.-

¿Cuántos términos de la PA 24, 22, 20 .....se necesitan para que la suma sea 150?

Solución:

$$S_n = 150 = \frac{n}{2}(48 - 2(n-1)) \Rightarrow$$

$$\mathrm{n}^2 - 25n + 150 = 0 \Rightarrow n = 10 \quad , \; n = 15$$

Problema 23.-

Hallar el tiempo que se empleará en saldar una deuda de 880 dólares ,pagando 25 dólares el primer mes , 27 el segundo , 29 dólares el tercero , etc.

Solución:

$$S_n = 880 = \frac{n}{2}(50 - 2(n-1)) \Rightarrow$$
$$\mathrm{n}^2 + 24n - 880 = 0 \Rightarrow n = 20$$

La deuda se salda en 20 meses

Problema 24.-

Determinar la PA en la que la suma de los n primeros términos es

n(n+2)

Solución:

Término n-ésimo= suma de n términos - suma de (n-1) términos

$$a_n = n(n+1) - ((n-1)^2 + 2(n-1)) = 2n+1$$

La PA es 3 ,5 ,7 ,......

Problema 25.-

Demostrar que la suma de los n enteros impares a partir del 1 es n^2

Solución:

$a_1 = 1$, $d = 2$, $n = n$

$$S_n = \frac{n}{2}(2 + 2(n-1)) = n^2$$

Problema 26.-

Hallar tres números en PA sabiendo que la suma del primero y el tercero es 12 y que el producto del primero por el segundo es 24

Solución:

Sean los números

a-d , a , a+d , luego (a-d)+(a+d)=12 y a =6

además (a-d)a=24 o sea 6(6-d)=24 de donde d=2

Los números son 4 ,6 ,8

Problema 27.-

Hallar tres números en PA cuya suma es 21 y cuyo producto es 280

Solución:

Sean los números (a-d) , a , (a+d) , entonces

(a-d)+a+(a+d)=21 , luego a=7

Por otra parte

(a-d)a(a+d)=7(7-d)(7+d)=280 , de donde resulta d=3 o d =-3

Los números son 4 ,7 ,10   o   10 , 7 , 4

Problema 28.-

tres números están en la relación 2:5:7 .Hallar dichos números sabiendo que si se resta 7 al segundo , los números forman una PA.

Solución:

Sean los números 2x , 5x , 7x ; los números que forman una PA son   2x , (5x-7) , 7x   , luego

(5x-7x)-2x=7x-85x-7   , de donde resulta x =14 . Así los números son 28 ,70, 98 .

Problema 29.-

Hallar la suma de todos los enteros entre 100 y 800 que sean múltiplos de 3.

Solución:

La PA es 102 , 105 , ...,798 , entonces

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 798 = 102 + 3(n-1) \Rightarrow n = 233$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{233}{2}(102 + 798) = 104850$$

Problema 30.-

Sobre una superficie horizontal se levanta una rampa de pendiente uniforme por medio de diez soportes igualmente espaciados . Las alturas de los soportes mayor y menor son 42,5 y 2 metros respectivamente . Hallar la altura de cada uno de los soportes.

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 42,5 = 2 + (10-1)d \Rightarrow d = 4,5$$

Así , las alturas son 2 ; 6,5 ; 11 ; 15,5 ; 20 ; 24,5 ; 29 ; 33,5 ;38 ;42,5 .

Problema 31.-

Un cuerpo cae libremente partiendo del reposo y recorre 16 metros durante el primer segundo ,48 metros en el segundo , 80 metros en el tercero , etc. Hallar la distancia que recorre en el segundo número 15 y la distancia total que recorre en 15 segundos.

Solución:

$$a_{15} = a_1 + (n-1)d = 16 + 32(15-1) = 464$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_n) = \frac{15}{2}(16 + 464) = 3600$$

Problema 32.-

Se colocan 8 bolas en línea recta , separadas entre sí una distancia de 6 metros. A seis metros de distancia de la primera , al otro lado de las bolas está situada una persona con una cesta (que está fija)que va andando por la fila recogiéndolas de una en una e introduciéndolas en la cesta . Sabiendo que empieza a recogerlas partiendo de la posición en que inicialmente se encuentra ,hallar la distancia total que recorrerá hasta que termine la operacción.

Solución:

$$a_1 = 2 \cdot 6 = 12 \ , \ a_n = 2 \cdot (6 \cdot 8) = 96$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{8}{2}(12 + 96) = 432$$

Problema 33.-

Demostrar que si los lados de un triángulo rectángulo están en PA, su relación es 3:4:5

Solución:

Sean los lados (a-d) , a , (a+d) , siendo la hipotenusa a+d

Entonces

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \Rightarrow a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$
$$\Rightarrow (a-d) : a : (a+d) = 3d : 4d : 5d = 3 : 4 : 5$$

Problema 34.-

Hallar la media aritmética de los pares de números siguientes

$$a)\ 4\ y\ 56 \Rightarrow \overline{P} = \frac{4+56}{2} = 30$$
$$b) 3\sqrt{2}\ \ y\ -6\sqrt{2} \Rightarrow \overline{P} = \frac{3\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$c)\ a+5d\ \ y\ a-3d \Rightarrow \overline{P} = \frac{(a+5d)+(a-3d)}{2} = a+d$$

Problema 35.-

Intercalar 5 medios aritméticos entre 8 y 26

Solución:

$$a_1 = 8 \ , \ a_7 = 26 \Rightarrow 26 = 8 + (7-1)d \Rightarrow d = 3$$

Los cinco medios aritméticos son 11 ,14, 17, 20, 23

Problema 36.-

Intercalar entre 1 y 36 un número de medios aritméticos de tal forma que la suma de la PA resultante sea 148.

Solución:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 148 = \frac{n}{2}(1+36) \Rightarrow \mathrm{n} = 8$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 36 = 1 + (8-1)d \Rightarrow d = 5$$

La PA es 1 ,6 ,11, 16 ,21, 26 , 31, 36.

Problema 37.-

Determinar cuáles de las siguientes son PG

$a)\ 3, 6, 12 --------- sí \quad r = 2$

$b) 16\ , 12\ , 9 -------- sí \quad r = \frac{3}{4}$

$c)\ -1, 3, -9 ------- sí \quad r = -3$

$d)\ 1\ , 4\ \ , 9 -------- no$

$e)\ \ (1/2)\ , (1/3)\ , (2/9)\ \ sí \quad r = 2/3$

Problema 38.-

Hallar el octavo término y la suma de los 8 primeros términos de la PG 4 , 8 , 26 ,....

Solución:

$a_1 = 4 \quad , \quad r = 2$

$a_8 = a_1 r^{n-1} = 4 \cdot 2^7 = 512$

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = 1020$

Problema 39.-

Hallar el séptimo término y la suma de los siete primeros términos de la progresión 9, -6, 4,.....

Solución:

$$a_1 = 9 \ \ , \ r = -\frac{2}{3} \Rightarrow a_7 = a_1 r^{n-1} = 9((-\frac{2}{3})^6 = \frac{64}{81}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{9(1-(-\frac{2}{3})^7)}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{463}{81}$$

Problema 40.-

El segundo término de una PG es 3 y el quinto es 81/8 . Hallar el octavo.

Solución:

$$a_5 = a_1 r^4 = \frac{81}{8} \quad , \quad a_2 = a_1 r = 3 \Rightarrow \frac{a_1 r^4}{a_1 r} = \frac{\frac{81}{8}}{3} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$a_8 = a_1 r^7 = (a_1 r^4) r^3 = \frac{81}{8}(\frac{27}{8}) = \frac{2187}{64}$$

Problema 41.-

Hallar tres números en PG cuya suma es 26 y cuyo producto es 216

Solución:

$$a_1 = \frac{a}{r} \ , \ a_2 = a \ , \ a_3 = ar \Rightarrow (\frac{a}{r})a(ar) = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 26 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 26 \Rightarrow r^2 - 20r + 6 = 0 \Rightarrow r = 3 \ , \ \frac{1}{3}$$

Dos soluciones 18 ,6 ,2 o 2 ,6 ,18 para r=1/3 y r=3 respectivamente.

Problema 42.-

El primer término de una PG es 375 y el cuarto es 192 . Hallar la razón y la suma de los 4 primeros términos.

Solución:

$$a_1 = 375 \quad , \quad a_4 = a_1 r^3 \Rightarrow 375r^3 = 192 \Rightarrow r = \frac{4}{5}$$

$$S_4 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = \frac{375(1-(\frac{4}{5})^4)}{1-\frac{4}{5}} = 1107$$

Problema 43.-

El primer término de una PG es 160 y la razón es 3/2 .Hallar los términos consecutivos que se deben tomar para que la suma sea 2110.

Solución:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow 2110 = \frac{160((\frac{3}{2})^n - 1)}{\frac{3}{2} - 1} \Rightarrow (\frac{3}{2})^n = \frac{243}{32} = (\frac{3}{2})^5 \Rightarrow n = 5$$

Los números consecutivos son 160 , 240 ,360 ,540 , 810.

Problema 44.-

Una PG de razón positiva consta de 4 términos. Sabiendo que la suma de los dos primeros es 8 y que la suma de los dos últimos es 72, determinar dicha progresión.

Solución:

$$a_1 = a \ , a_2 = ar \quad , \ a_3 = ar^2 \ , \ a_4 = ar^3 \Rightarrow$$
$$a + ar = 8 \ , \ ar^2 + ar^3 = 72 \Rightarrow$$
$$\frac{ar^2 + ar^3}{a + ar} = r^2 = \frac{72}{8} \Rightarrow r = 3$$
$$a + ar = 8 \Rightarrow a = 2$$

La progresión es 2 , 6 , 18 , 54

Problema 45.-

Demostrar que x , x+3 , x+6 no pueden formar una PG

Solución:

Si formaran una PG tendríamos

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x+3} \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x \Rightarrow 9 = 0 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Problema 46.-

Un muchacho gana una peseta el primer día , dos el segundo , 4 el tercero , 8 el cuarto ...etc . Hallar el número de pesetas que ganará al cabo de 12 días.

Solución:

$$a_1 = 1 \ , \ r = 2 \ , \ n = 12$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = 2^{12} - 1 = 4095$$

Problema 47.-

Se estima que la población en una cierta ciudad se incrementará en un 10% anual durante 4 años ¿En qué % aumentará la población después de 4 años?

Solución:

Sea p la población inicial , después de un año la población es

1,10p , en el segundo es (1,10)(1,10)p .....y así en el cuarto es

(1,10)(1,10)(1,10)(1,10)p=1,4641p . La población aumentará en un 46,41%.

Problema 48.-

De un depósito que contiene 240 litros de alcohol se extraen 60 litros y se sustituyen por agua .A continuación se extraen 60 litros de la mezcla y se les reemplaza por agua ,etc. Hallar el número de litros de alcohol que habrá en el depósito después de haber efectuado 5 extracciones de 60 litros.

Solución:

Después de la primera extracción quedan en el depósito

240-60=180 litros de alcohol . después de la segunda quedan

180((240-60)/240)=180(3/4) litros de alcohol. El número de litros de alcohol que quedan en el depósito después de cada extracción forman una PG

$$180\ ,\ 180(\frac{3}{4})....180(\frac{3}{4})^4$$

$$a_1 = 180\ \ ,\ \ r = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = 180(\frac{3}{4})^4 = 57$$

Quedan 57 litros de alcohol tras 5 extracciones.

Problema 49.-

Se invierten 400000 pesetas a un 6% anual. Calcular el capital que se habrá formado al cabo de 5 años si el interés es compuesto

a)Anual

b)Semestral

c)Trimestral

Solución:

P=capital inicial ; i=rédito en % por período de tiempo

S=capital acumulado al cabo de n períodos

Al final del primer período : Interés =Pi

Capital=P+Pi=P(1+i) . etc

El capital acumulado al cabo de n períodos es

$$S = P(1+i)^n$$

a)Como se cobran los intereses una vez al año n=5 ; i=0,06

$$S = P(1+i)^n = 400000(1+0,06)^5 = 535280$$

b)Como se cobran los intereses dos veces al año n=10 ; i=(0,06)/2=0,03

$$S = P(1+i)^n = 400000(1+0,03)^{10} = 537560$$

c)Como se cobran los intereses 4 veces al año n=20 ;

i=(0,06)/4=0,015

$$S = P(1+i)^n = 400000(1+0,015)^{20} = 538760$$

Problema 50.-

Hallar el capital P que se debe invertir al 4% de interés compuesto semestral para que al cabo de 3,5 años se trasforme en un capital S de 500000 pesetas.

Solución:

Como se cobran intereses dos veces al año n=2(3,5)=7 y el rédito es en % y por período es i=(1/2)(0,04)=0,02 , entonces

$$P = S(1+i)^{-n} = 500000(1+0,02)^{-7} = 435280$$

Problema 51.-

Hallar la media geométrica entre los siguientes

$$a)\, 4 \;\; y \;\; 9 \quad \Rightarrow \quad G = \sqrt{4 \cdot 9}$$

$$b)\, -2 \;\; y \;\; -8 \Rightarrow \; G = -\sqrt{(-2)(-8)} = -4$$

$$c)\, \sqrt{7} + \sqrt{3} \quad y \quad \sqrt{7} - \sqrt{3} \;\Rightarrow\; G = \sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = 2$$

Problema 52.-

Demostrar que la media aritmética de dos números p,q es mayor o igual que la media geométrica

Solución:

$$(p-q)^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 - 2pq + q^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 \geq 4pq \Rightarrow$$
$$(p+q)^2 \geq 4pq \Rightarrow (\frac{p+q}{2}) \geq pq \Rightarrow \frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$$

Problema 53.-

Intercalar 2 medios geométricos entre 686 y 2

Solución:

$$a_1 = 686 \;\; , \;\; a_4 = 2 = a_1 r^3 = 686 r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{2}{686} = \frac{1}{343} \Rightarrow r = \frac{1}{7}$$

Los números son 686 , 98 ,14 , 2

Problema 54.-

Intercalar 5 medios geométricos entre 9 y 576

Solución:

$$a_1 = 9 \ , \ a_7 = 576 = a_1 r^6 = 9r^6 \Rightarrow r^6 = 64 \Rightarrow r = \pm 2$$

Los números son 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576 o bien

9, -18, 36, -72, 144, -288, 576

Problema 55.-

Hallar la suma de la serie

$$a) 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \qquad S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

$$b) \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + ... S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{1}{5}$$

$$c) \ 1 + \frac{1}{1,04} + \frac{1}{(1,04)^2} + ... S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{1,04}} = 26$$

Problema 56.-

Expresar los números periódicos siguientes por medio de una fracción racional

a) 0,444....

b) 0,4272727...

c) 6,305305...

d) 0,78367836...

Solución:

a) 0,444...=0,4+0,04+0,004+... a=0,4 , r=0,1

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0,4}{1-0,1} = \frac{0,4}{1-0,1} = \frac{4}{9}$$

b) 0,4272727...=0,4+0,272727...

0,272727...=0,027+00027+... a=0,027 ,r=0,01

$$S_\infty = 0,4 + \frac{a}{1-r} = 0,4 + \frac{0,027}{1-0,01} = \frac{47}{110}$$

c) 6,305305...=6+0,305305...

0,305305..=0,305+0,000305+....   a=0,305   , r=0,001

$$S_\infty = 6 + \frac{a}{1-r} = 6 + \frac{0,305}{1-0,001} = 6\frac{305}{999}$$

d) 0,78367836....=0,7836+0,00007836....a=0,7836 , r=0,0001

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0,7836}{1-0,0001} = \frac{2612}{3333}$$

Problema 57.-

Las amplitudes de las sucesivas oscilaciones de un período forman la PG 16, 12, 9...cm. Hallar la distancia total recorrida por la esferilla del péndulo hasta alcanzar el reposo.

Solución:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{3}{4}} = 64\ cm$$

Problema 58.-

Hallar el número de términos que se debe tomar de la serie

(1/3)+(1/6)+(1/12)+.... para que su suma difiera de los correspondientes a los infinitos términos en menos de una milésima.

Solución:

$$S_\infty - S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{ar^n}{1-r} < \frac{1}{1000} \qquad a = \frac{1}{3} \ , \ r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 3 \cdot 2^n > 2000$$

Para n =9 no se cumple pero sí para n=10 sí se cumple la desigualdad ,así ,deben tomarse por lo menos 10 términos.

Problema 59.-

Calcular el término 15 de la PH 1/4 , 1/7 ,1/10 ...

Solución:

La PA correspondiente es 4 , 7, 10 ... y el término 15 es

a+(n-1)d=4+3(15-1)=46 y el término 15 de la PH es 1/46

Problema 60.-

Deducir la fórmula para la media armónica H de los números p y q

Solución:

1/p , 1/H , 1/q forman una PA , luego 1/H -1/p=1/q -1/H

despejando H resulta H=2pq/(p+q)

Problema 61.-

Hallar la media armónica entre 3/8 y 4

Solución:

H=2pq/(p+q)=2(3/8)(4)/((3/8)+4)=24/25

Problema 62.-

Intercalar 4 medios armónicos entre 1/4 y 1/64

Solución:

Debemos hallar 4 medios aritméticos entre 4 y 64

$a_1 = 4$, $a_6 = 64 = 4 + (6-1)d \Rightarrow d = 12$

La PA es 4, 16, 28, 40, 52, 64 entonces la PH es

1/4, 1/16, 1/28, 1/40, 1/52, 1/64

Problema 62.-

Hallar los tres medios armónicos entre 10 y 20

Solución:

$$a_1 = \frac{1}{10}\ , \quad a_5 = \frac{1}{20} = \frac{1}{10} + (5-1)d \Rightarrow d = -\frac{1}{80}$$

Entonces la PA es 1/10, 7/80, 6/80, 5/80, 1/20 y la PH es

10, 80/7, 40/3, 16, 20.

Problema 63.-

Determinar si -1, -4, -2 es una PA , una PG o una PH

Solución:

Es una PH pues 1/(-1), 1/(-4), 1/2 es una PA

Problema 64.-

En la PA -7, -5, -3, ...¿Existe algún término igual a 65?

Solución:

$$a_1 = -7 \;\;,\;\; d = 2$$
$$a_n = -7 + (n-1)d = 65 \Rightarrow n = 37 \Rightarrow a_{37} = 65$$

Problema 65.-

a) Intercalar 7 números entre 3 y 15 de modo que se obtenga una PA de 9 términos

b) Interpolar x medios aritméticos entre x^2 y 1

Solución:

a)

$$a_1 = 3 \;\;,\;\; a_9 = 15 = 3 + 8d \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow a_2 = \frac{9}{2} \;,\; a_3 = 6 \;,\; a_4 = \frac{15}{2} \;,\; a_5 = 9 \;,\; a_6 = \frac{21}{2} \;,\; a_7 = 12 \;,\; a_8 = \frac{27}{2}$$

b)

$$a_1 = x^2 \;\;,\;\; a_{x+2} = 1 = x^2 + (x+1)\,\mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{d} = 1 - x$$
$$\mathrm{a}_2 = x^2 - x + 1 \;\;,\;\; a_3 = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 2....etc$$

Problema 66.-

a) El cuarto término de una PA es 4 y el séptimo es 2. Encontrar los tres primeros términos

b) En una PA el primer término es 2 , el n-ésimo es 29 y la suma de estos 29 términos es 155 . Encuentre la diferencia.

Solución:

a)

$$a_4 = 4 = a_1 + 3d \;\;,\;\; a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow a_1 = 6 \;, d = -\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow a_1 = 6 \;,\; a_2 = \frac{16}{3} \;,\; a_3 = \frac{14}{3}$$

b)

$$a_1 = 2,\ a_n = 29\ \ ,\ \ S_n = 155$$

$$S_n = 155 = \frac{n}{2}(2+29) \Rightarrow \mathrm{n} = 10$$

$$\mathrm{a}_{10} = 29 = 2 + 9d \Rightarrow d = 3$$

Problema 67.-

Calcular la suma de

a) Los 21 primeros términos de la progresión

$$\frac{a+b}{2}\ ,\ a\ ,\ \frac{3a-b}{2}$$

b) Los 15 primeros términos de una PA cuyo n-ésimo término es 4n+1

Solución:

a)

$$a_1 = \frac{a+b}{2}\ ,\ a_2 = a\ ,\ a_3 = \frac{3a-b}{2} \Rightarrow d = \frac{a-b}{2}$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(2(\frac{a+b}{2}) + (20)\frac{a-b}{2}) = \frac{21}{2}(11a - 9b)$$

b)

$$a_n = 4n + 1 \Rightarrow a_1 = 5 \quad , \quad a_{15} = 61$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(5 + 61) = 495$$

Problema 68.-

Dividir 20 en 4 partes que están en PA y tales que el producto de la primera y la cuarta sea al producto de la segunda y la tercera como 2 es a 3

Solución:

Sea t un punto intermedio entre el segundo y el tercer término , entonces

$$a_1 = t - \frac{3}{2}d \quad , \quad a_2 = t - \frac{d}{2} \quad , \quad a_3 = t + \frac{d}{2} \quad , \quad a_4 = t + \frac{3}{2}d \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20 = 4t \Rightarrow t = 5$$

$$\frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} = \frac{2}{3} = \frac{(5 - \frac{3}{2}d)(5 + \frac{3}{2}d)}{(5 - \frac{d}{2})(5 + \frac{d}{2})} \Rightarrow d = 2 \Rightarrow$$

$$a_1 = 2 \ , \ a_2 = 4 \ , \ a_3 = 6 \ , \ a_4 = 8$$

Problema 69.-

En un estanque cae agua a razón de 2 gal/min en el primer minuto , 4 gal/min en el segundo minuto , 6 gal/min en el tercer minuto , etc.

¿Cuánta agua habrá en el estanque después de una hora ? .Suponga que el estanque estaba vacío inicialmente.

Solución:

$$a_1 = 2 \ , \ a_2 = 4, ..., a_{60} = 120 \ \ , \ \ d = 2$$

$$S_n = \frac{60}{2}(2+120) = 3660\, gal$$

Problema 70.-

a) Obtenga el medio geométrico entre $\sqrt{7}+\sqrt{3} \quad y \quad \sqrt{7}-\sqrt{3}$

b) Interpole tres medios geométricos entre 24 y 3/2

c)Calcule el término 12 de una PG cuyo tercer término es 1/2 y cuyo octavo término es 16.

Solución:

a)

$$\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\sqrt{7-3}=2$$

b)

$$a_1=24\ ,\ a_5=\frac{3}{2}=24r^4\Rightarrow r=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$a_1=24\ ,\ a_2=12\ ,\ a_3=6\ ,\ a_4=3\ ,\ a_5=\frac{3}{2}$$

c)

$$a_3=a_1r^2\ ,\ a_8=a_1r^7\Rightarrow r^5=32\Rightarrow r=2$$

$$a_3=\frac{1}{2}=a_1r^2=4a_1\Rightarrow a_1=\frac{1}{8}$$

$$a_{12}=\frac{1}{8}(2^{11})=256$$

Problema 71.-

En una PG de n términos se tiene que el primero es 7 , el último es 448 y su suma es 889 . Obtenga la razón.

Solución:

$$a_n = 448 = 7r^{n-1} \Rightarrow r^n = 64r$$

$$\frac{7(1-r^n)}{1-r} = 889 = \frac{7(1-64r)}{1-r} \Rightarrow r = 2$$

Problema 72.-

En cierto cultivo las bacterias se duplican cada 20 min. ¿Cuántas veces el número original de bacterias hay en el cultivo al cabo de 2 horas , suponiendo que ninguna desaparece ?

Solución:

$$N = Número\ original$$
$$a_1 = 2N\ a\ los\ 20\min$$
$$a_2 = 4N\ a\ los\ 40\min$$
$$a_3 = 8N\ a\ los\ 60\min$$
$$a_4 = 16N\ a\ los\ 80\min$$
$$a_5 = 32N\ a\ los\ 100\min$$
$$a_6 = 64N\ a\ los\ 120\min$$

Problema 73.-

Los términos de orden p, q , s de una PG son a , b , c respectivamente .Probar que $a^{q-s}b^{s-p}c^{p-q}=1$

Solución:

$$a^{q-s}b^{s-p}c^{p-q}=1$$

$$a_p=a=a_1r^{p-1}\ ,\ a_q=b=a_1r^{q-1}\ ,\ a_s=c=a_1r^{s-1}\Rightarrow$$

$$a^{q-s}b^{s-p}c^{p-q}=(a_1r^{p-1})^{q-s}(a_1r^{q-1})^{s-p}(a_1r^{s-1})^{p-q}=$$

$$a_1^{(q-s)+(s-p)+(p-q)}\cdot r^{(p-1)(q-s)+(q-1)(s-p)+(s-1)(p-q)}=a^0\cdot r^0=1$$

Problema 74.-

a) Calcular la serie

$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\dots$$

b) Escriba el número decimal periódico 0,42323232... como fracción

Solución:

a)

$$a_1 = 1 \; , \; r = \frac{1}{100}$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

b)

$$0,42323232.. = \frac{42}{100} + 32\left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ...\right) =$$

$$\frac{42}{100} + 32\left(\frac{\frac{1}{10000}}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{419}{990}$$

Problema 75.-

Sea -1<x<1 .Calcule la serie

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

Solución:

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

$$S - Sx = (1 + 2x + 3x^2 + ...) - (\mathrm{x} + 2\,\mathrm{x}^2 + 3x^3 + ...) =$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... \Rightarrow$$

$$\mathrm{S}(1 - \mathrm{x}) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Problema 76.-

Sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 10e^{-0,15k}$

a) Calcule la suma de los 10 primeros términos

b) El error que se comete al aproximar la suma de la serie por la suma en a)

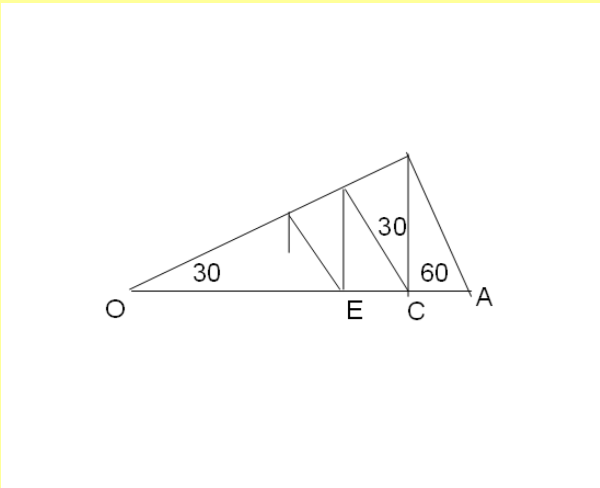
Solución:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{10e^{-0,15}(1-(e^{-0,15})^{10})}{1-e^{-0,15}} \approx 48,5$$

$$S_{\infty} = \frac{10e^{-0,15}}{1-e^{-0,15}} \approx 61,79$$

$$Error = 61,79 - 48,5 = 13,25 \approx 22\%$$

Problema 77.-



En la figura se tiene

$$\overline{OA} = 1m \quad , \quad \angle AOB = 30^0$$

$$Calcular \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ...$$

Solución:

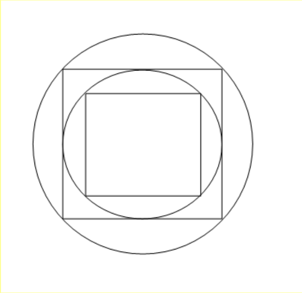
$$sen30^0 = \frac{1}{2} \ , \ \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \ , \ \overline{BC} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \overline{DC} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \ , ...$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \ , \ r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

Problema 78.-



En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado , en este cuadrado un círculo , en éste otro cuadrado y así sucesivamente ¿Cuál es el límite de la suma de las àreas de los cuadrados? ¿Cuál el de los círculos?

Solución:

$$\textit{Si } a_1 \textit{ es el lado del primer cuadrado tenemos}$$

$$a_1^2 + a_1^2 = (2R)^2 \Rightarrow a_1 = R\sqrt{2}$$

$$\textit{El segundo círculo tiene radio } b_1 = R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = b_1\sqrt{2} = R \ , \ a_3 = \frac{R}{2} \ , \ ...$$

$$\textit{Radios } R \ , \frac{R}{\sqrt{2}} \ , \ \frac{R}{(\sqrt{2})^2} \ ,.....$$

$$\text{ÁreaTotal} = \pi \mathrm{R}^2 (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + ...) = \pi R^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2$$

$$\textit{Y para los cuadrados tenemos}$$

$$a_1 = \sqrt{2}R \ , \ a_2 = R \ , \ a_3 = \frac{R}{\sqrt{2}} \ , \ ....$$

$$\textit{Área Total} = R^2(2 + 1 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^4} + ...) = R^2(2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}) = 4R^2$$

Problema 79.-

La suma de tres números en PA es 33. Si a dichos números se les suma 2 , 1 , 6 respectivamente se tiene una PG . Encuentre los números.

Solución:

$$a_1 = a_2 - d \ , \ a_2 = a_2 \ , \ a_3 = a_2 + d \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33 = 3a_2 \Rightarrow a_2 = 11$$

$$Además$$

$$(a_2 + 1)^2 = (a_2 - d + 2)(a_2 + d + 6) \text{ con } \mathrm{a}_2 = 11$$

$$Desarrollando\ tenemos$$

$$d^2 + 4d - 77 = 0 \Rightarrow d = 7 \ o \ -11$$

$$Los\ números\ son\ 4 , 11 , 18 \ o \ 22 , 11 , 0$$

Problema 80.-

$$¿Para\ qué\ valores\ de\ \alpha\ y\ n\ el\ polinomio\ x^n - \alpha x^{n-1} + \alpha x - 1$$
$$es\ divisible\ por\ (x-1)^2 ?$$

Solución:

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\textit{Por división sintética}} \\
1 & -\alpha & 0 & 0........0 & \alpha & -1 & :1 & \\
 & 1 & 1-\alpha & 1-\alpha.... & 1-\alpha & 1 & & \\
\hline
1 & 1-\alpha & 1-\alpha...................... 1 & 0 & :1 & & & \\
 & 1 & 2-\alpha................. & (n-2)-(n-3)\alpha+1-\alpha+1 & & & & \\
\hline
1 & 2-\alpha & 3-2\alpha.....................(n-2)-(n-3)\alpha+1-\alpha & & & & &
\end{array}
$$

$$(n-2)-(n-3)\alpha+1-\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha=\frac{n}{n-2}$$

n>2

Problema 81.-

La suma de 4 números en PA es 20 y la suma de sus recíprocos en 25/24 . Hallar los números.

Solución:

$$Sea\ a_1 = a-3t\ ,\ a_2 = a-t\ ,\ a_3 = a+t\ ,\ a_4 = a+3t$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

Además

$$\frac{1}{a-3t} + \frac{1}{a+3t} + \frac{1}{a-t} + \frac{1}{a+t} = \frac{25}{24} = 10(\frac{2a^2 - 10t^2}{(a^2-t^2)(a^2-9t^2)} \Rightarrow$$

$$9t^4 - 154t^2 + 145 = 0 \Rightarrow t = \pm 1\ ,\ \pm\frac{\sqrt{145}}{3}$$

Con $a = 5$ *y los valores de* t *se obtienen los números pedidos*

Problema 82.-

Tres números están en PA y su suma es 4 y la suma de sus cuadrados es 50/9

Solución:

$$a_1 = a-t\ ,\ a_2 = a\ ,\ a_3 = a+t \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 4 \Rightarrow a = 4/3$$

$$(a-t)^2 + a^2 + (a+t)^2 = \frac{50}{9} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow t = \pm\frac{1}{3}$$

$$Los\ números\ son\ 1\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{5}{3}\quad o\quad \frac{5}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ 1$$

Problema 83.-

En la ecuación $x^4+(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$

determinar m de tal modo que sus 4 raíces estén en PA

Solución:

$$a_1=a-3t\ ,\ a_2=a-t\ ,\ a_3=a+t\ ,\ a_4=a+3d$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4=4a=0\Rightarrow a=0$$

Además

$$(-3t)(-\mathrm{t})+(-3\,\mathrm{t})\,\mathrm{t}+(-3\,\mathrm{t})(3\,\mathrm{t})+(-\mathrm{t})\,\mathrm{t}+(-\mathrm{t})(3\,\mathrm{t})+\mathrm{t}(3\,\mathrm{t})=$$

$$=-10\,\mathrm{t}^2=-(3m+5)\Rightarrow 10t^2=3m+5\quad (*)$$

Además

$$(-3t)(-t)\,\mathrm{t}(3\,\mathrm{t})=9\,\mathrm{t}^4=(m+1)\Rightarrow 3t^2=m+1\ \ (**)$$

$$De\ (*)\ y\ (**)\ \text{se tiene m}=5\quad (\mathrm{t}=\pm\sqrt{2})$$

Problema 84.-

En una PG de tres términos la suma es 224 y la suma de los extremos excede en 96 al término del medio .Calcular los 3 términos.

Solución:

$$a_1 = \frac{a}{r} \ , \ a_2 = a \ , \ a_3 = ar$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 224 \ , \ \frac{a}{r} + ar - 96 = a \Rightarrow$$

$$a + (a + 96) = 224 \Rightarrow a = 64 \Rightarrow$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = 2 \ \ o \ \ \frac{1}{2}$$

$$La\ PG\ es\ 32\ ,\ 64\ ,\ 128\ \ o\ \ 128,64\ ,32$$

Problema 85.-

¿Cuántos términos tiene una PG con $a_1 = 8$, $a_n = 530,5$, $r = 1,2$?

Solución:

$$a_n = 530,5 = 8 \cdot (1,2)^{n-1} \Rightarrow$$

$$n = \frac{\ln(66,3125)}{\ln(1,2)} + 1 = 24$$

Problema 86.-

La población de un cierto país es de 5000000 de habitantes y tiene un crecimiento anual de 1,7% ¿Cuál será el número de habitantes dentro de 10 años?

Solución:

$$Sea\ a = 5000000$$

$$En\ 10\ años\ habrá\ a(1+\frac{1,7}{100})^{10} =$$

$$5000000(1+\frac{1,7}{100})^{10} \approx 5.918.062\, Personas$$

Problema 87.-

En una PG

a)

$$a_8 = 30\ ,\ a_{32} = 900\ \ Calcular\ a_{16}$$

b)

$$a_1 + a_4 = 56\ ,\ a_2 + a_3 = 24\ \ Calcular\ S_8$$

Solución:

a)

$$a_8 = a_1 r^7 = 30 \ \ , \ \ a_{32} = a_1 r^{31} = 900 \Rightarrow$$

$$r^{24} = 30 \Rightarrow r = 30^{\frac{1}{24}} \Rightarrow a_1 = 30(30^{-\frac{1}{24}}) \Rightarrow$$

$$a_{16} = 30(30^{-\frac{1}{24}})(30^{\frac{15}{24}}) = 30^{\frac{4}{3}} \approx 93,2169$$

b)

$$a_1 + a_4 = 56 = a_1 + a_1 r^3$$

$$a_2 + a_3 = 24 = a_1 r + a_1 r^2$$

$$E\lim inando\, a_1 \Rightarrow$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow r = 3 \ \ o \ \ \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$a_1 = 2 \ \ o \ 54$$

$$S_n = \frac{2(3^8 - 1)}{2} = 6560 \ \ o \ \ S_n = \frac{54(\frac{1}{3^8} - 1)}{\frac{2}{3}} = \frac{6560}{81}$$

Polinomios

Problema 1.-

Sean los polinomios

$p(x)=2x^3+5x^2-3x+8$, $q(x)=4x^2+7x-3$

Calcular

a) p(x)+q(x)

b) p(x)q(x)

c) p(x)-q(x)

Solución:

a)

$$p(x)+q(x)=(2+0)x^3+(5+4)x^2+(-3+7)x+(8-3)=$$
$$2x^3+9x^2+4x+5$$

b)

$$p(x)q(x)=(2x^3+5x^2-3x+8)(4x^2+7x-3)=$$
$$(8x^5+20x^4-12x^3+32x^2)+(14x^4+35x^3-21x^2+56x)+$$
$$+(-6x^3-15x^2+9x-24)=8x^5+34x^4+17x^3-4x^2+65x-24$$

c)

$$p(x)-q(x)=(2-0)x^3+(5-4)x^2+(-3-7)x+(8+3)=$$
$$=2x^3+x^2-10x+11$$

Problema 2.-

Determinar las constante A , B , C para que se cumpla

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-1}-\frac{9}{x-2}+\frac{8}{x-3}\ ,\ x\neq 1,2,3$$

Solución:

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2(x-2)(x-3)-9(x-1)(x-3)+8(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$$
$$=\frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\Rightarrow A=1\ ,\ B=2\ ,\ C=1$$

Problema 3.-

Encontrar el cuociente y el resto cuando se divide $3x^3 - 4x + 2$

por x+3

Solución:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & 0 & -4 & 2 & \underline{-3} \\
 & -9 & 27 & 69 & \\
\hline
3 & -9 & 23 & -67 \Rightarrow &
\end{array}
$$

$$Cuociente \quad 3x^2 - 9x + 23 \quad \mathrm{Re}\,sto\ -67$$

Problema 4.-

¿Para qué valores de a y b , el polinomio $3x^2 + bx - b^2 - a$

es divisible por x+2 , pero al dividirlo por x-1 da resto 1?

Solución:

Por el Teorema del resto p(-2)=0 , p(1)=1 entonces

$$\left.\begin{array}{l} 12-2b-b^2-a=0 \\ 3+b-b^2-a=1 \end{array}\right| \Rightarrow a=\frac{52}{9}\ ,\ b=\frac{10}{3}$$

Problema 5.-

Sea $p(x)=x^4+bx^3-13x^2-14x+24$

a) Determinar b de modo que -2 sea raíz de p(x)

b) Calcular las raíces restantes

Solución:

a)

p(-2)=0=16-8b , luego b=2

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 2 & -13 & -14 & 24 & \underline{-2} \\
 & -2 & 0 & 26 & -24 & \\
\hline
1 & 0 & -13 & 12 & 0 &
\end{array}$$

Queda $x^3 - 13x + 12 = 0$ que tiene 1 como raíz y dividiendo por x-1 se obtiene $x^2 + x - 12$ cuyas raíces son 3 y -4

Problema 6.-

Resolver la ecuación $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$

Solución:

Las posibles raíces racionales son:

$$\pm 1 \ , \ \pm 2 \ , \ \pm 4 \ , \ \pm\frac{1}{3} \ , \ \pm\frac{2}{3} \ , \ \pm\frac{4}{3}$$

Se comprueba que 2/3 es raíz y haciendo la división sintética se obtiene $3x^2-6$ .Así , las raíces son

$$\frac{2}{3} \ , \sqrt{2} \ , -\sqrt{2}$$

Problema 7.-

De la ecuación $x^4-x^3-15x^2+19x-4=0$ se sabe que $2-\sqrt{3}$

es raíz . Hallar las otras raíces.

Solución:

Sabemos que $2+\sqrt{3}$ también es raíz .Entonces el polinomio es divisible por x^2-4x+1 (que tiene estas raíces) y efectuando la división resulta x^2+3x-4 cuyas raíces son -4 y 1

Problema 8.-

Demostrar que si p(x) y q(x) son polinomios tales que q(x) es divisible por p(x) y p(x) es divisible por q(x), entonces existe c tal que p(x)=cq(x).

Solución:

Existe $q_2(x)$ tal que $\mathrm{q}(x) = p(x)q_1(x)$ (1) .Análogamente existe $\mathrm{q}_2(x)$ tal que $\mathrm{p(x)} = \mathrm{q(x)}\,\mathrm{q}_2(x)$ (2) . Reemplazando (2) en (1) tenemos

$\mathrm{q(x)} = \mathrm{q(x)}\,\mathrm{q}_2(x)q_1(x) \Rightarrow q(x)(1 - q_2(x)q_1(x)) = 0$

Si q(x)=0 por (2) p(x)=0 , luego p(x)=c q(x) para cualquier c

Si

$$q_2(x)q_1(x) = 1 \Rightarrow gdo(q_2(x)q_1(x)) = 0 \Rightarrow$$
$$gdo(q_1(x)) = gdo(q_2(x)) = 0 \Rightarrow q_2(x) = c$$

y reemplazando en (2) se tiene p(x)=c q(x)

Problema 9.-

Sean p(x) , q(x) , r(x) polinomios tales que q(x) es divisible por p(x) y r(x) lo es por q(x) . Demostrar que r(x) es divisible por p(x).

Solución:

Existen polinomios $q_1(x)$, $q_2(x)$ tales que

$$q(x) = p(x)q_1(x) \quad (1)$$
$$r(x) = q(x)q_2(x) \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos

$$\mathrm{r(x)} = \mathrm{p(x)}\,\mathrm{q}_1(x)q_2(x)$$

Luego r(x) es divisible por p(x).

Problema 10.-

Si p(x) es un polinomio y a , b son reales obtenga una expresión para el resto que se obtiene al dividir p(x) por (x-a)(x-b).

Solución:

Si a=b , por el algoritmo de la división tenemos

$$p(x) = (x-a)q(x) + \mathrm{r} \quad (1)$$
$$\mathrm{q(x)} = (\mathrm{x-a})\,\mathrm{q}_1(x) + r' \quad (2)$$

De (1) r=p(a) y además despejando q(x) resulta

$$\mathrm{q(x)} = \frac{p(x) - p(a)}{x-a} \qquad (3)$$

de (2) r'=q(a)

Además si reemplazamos (2) en (1) queda

$$\mathrm{p(x)} = (\mathrm{x-a})^2 q_1(x) + r'(x-a) + r$$

Luego el resto en cuestión es

r(x)=r'(x-a)+r=q(a)(x-a)+p(a) , siendo q(x) el polinomio definido en (3)

Supongamos ahora que a=b con gdo r(x) <gdo (x-a)(x-b)

Luego p(x)=(x-a)(x-b)q(x)+cx+d

p(a)=ca+d y p(b)=cb+d

Resolviendo este sistema se tiene

$$c = \frac{p(a) - \mathrm{p(b)}}{a-b} \quad , \quad d = \frac{ap(b) - bp(a)}{a-b} \Rightarrow$$

$$r(x) = \frac{p(a) - p(b)}{a-b} x + \frac{ap(b) - bp(a)}{a-b}$$

Problema 11.-

Sea $p(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d \quad , \quad q(x) = ax^2 + 2bx + c \ , \ a > 0$

tales que p(x) es divisible por q(x) .Demostrar que p(x) es el cubo de un binomio y q(x) es el cuadrado de un binimio.

Solución:

Por hipótesis , existe k tal que p(x)=q(x)(x+k) o sea

$$p(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d \quad , \quad q(x) = ax^2 + 2bx + c \ , \ a > 0$$
$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d \equiv ax^3 + 2bx^2 + cx + kax^2 + 2kbx + kc$$
$$\equiv ax^3 + (2b + ka)x^2 + (2kb + c)x + kc \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3b = 2b + ka \\ 3c = 2kb + c \\ d = kc \end{array}\right| \Rightarrow b = ka \ , \ c = kb \ , \ d = kc = k^3 a$$

Luego

$$p(x) = a(x^3 + 3kx^2 + 3k^2 x + k^3) = a(x+k)^3 = a(x + \frac{b}{a})^3$$

$$q(x) = a(x^2 + 2kx + k^2) = a(x + \frac{b}{a})^2$$

Problema 12.-

Sean $p(x) = x^2 + 1 \ , \ q(x) = x^2 - 2x - 3$

Encontrar a(x) , b(x) tales que a(x)p(x)+b(x)q(x)=1

Solución:

$$x^2+1=(x^2-2x-3)\cdot 1+2x+4$$

$$x^2-2x-3=(2x+4)\cdot\frac{1}{2}(x-4)+5$$

$$\Rightarrow 5=(x^2-2x-3)-\frac{1}{2}(2x-4)(x-4)=$$

$$(\mathrm{x}^2-2x-3)-\frac{1}{2}((x^2+1)-(x^2-2x-3))(x-4)=$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+1)(x-4)+(x^2-2x-3)(1+\frac{x-4}{2})\Rightarrow$$

$$1=\frac{1}{10}(4-x)(x^2+1)+\frac{1}{10}(x-2)(x^2-2x-3)$$

Luego

$$\mathrm{a(x)}=\frac{1}{10}(4-x) \quad , \quad b(x)=\frac{1}{10}(x-2)$$

Problema 13.-

Demuestre el algoritmo de la división . Dados

$$a(x)\ ,\ b(x)\ ,\ b(x)\neq 0\ ,\exists q(x)\ ,\ r(x)\ \ tal\ \ que$$
$$a(x)=q(x)b(x)+r(x)\quad con\quad r(x)=0\ \ o\ \ gdo\, r(x)<\mathrm{gdo\, b(x)}$$

Solución:

Sean

$$a(x) = a_0 + a_1 x + ...+ a_n x^n$$

$$b(x) = b_0 + b_1 x + ...+ b_m x^n \quad , \ b_m \neq 0$$

i) Si a(x) es el polinomio nulo o si gdo a(x)< gdo b(x) entonces se tiene la representación

a(x)=b(x) 0+a(x)

ii) Supongamos que n=gdo a(x) es mayor o igual que gdo b(x)=m

Por inducción se tiene que

a) Para n=1 . Si gdo b(x)=1 entonces

$$a(x) = a_0 + a_1 x = (b_0 + b_1 x)\frac{a_1}{b_1} + (a_0 - \frac{a_1 b_0}{b_1}) = b(x)q(x) + r(x)$$

$$con \quad gdo\, r(x) = \mathrm{gdo}\,(\mathrm{a}_0 - \frac{a_1 b_0}{b_1}) = 0 < 1$$

Si gdo b(x)=0 , entonces

$$a(x) = a_0 + a_1 x = b_0\left(\frac{a_1}{b_0}x + \frac{a_0}{b_0}\right) + 0 =$$
$$= b(x)q(x) + 0 \ , \ con \ \ r(x) \equiv 0$$

b)

Supongamos que

$$\forall p(x) \in P_{n-1} \ \ se \ \ tiene \ \ el \ \ \mathrm{Alg}oritmo$$
$$Sea \ \ a(x) = a_0 + a_1 + ... + a_n x^n \quad , a_n \neq 0, \ entonces$$
$$a(x) - \frac{a_n}{b_n} x^{n-m} b(x) = a_1(x) \in P_{n-1} \quad y \quad por \quad la$$
$$hipótesis \ \ de \ \ inducción$$
$$a_1(x) = b(x)q_1(x) + r(x) \quad donde \ \ r(x) = 0 \ \ o \ \ gdo\, r(x) < m \Rightarrow$$
$$a(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b(x) + a_1(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q_1(x)\right)b(x) + r(x) = q(x)b(x) + r(x)$$
$$gdo\, r(x) < m$$

Problema 14.-

Hallar el resto de las divisiones siguientes

$$a)\,(2x^3+3x^2-18x-4):(x-2)\Rightarrow R=f(2)=-12$$
$$b)\,(x^4-3x^3+5x+8):(x+1)\Rightarrow R=f(-1)=7$$
$$c)\,(4x^3+5x^2-1):(x+\frac{1}{2})\Rightarrow R=f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$$
$$d)\,(x^3-2x^2+x-4):(x)\Rightarrow R=f(0)=-4$$
$$e)\,(\frac{8}{27}x^3-\frac{4}{9}x^2+x-\frac{3}{2}):(2x-3)\Rightarrow R=f(\frac{3}{2})=0$$
$$f)\,(x^8-x^5-x^3+1):(x+i)\Rightarrow r=f(-i)=2$$

Problema 15.-

Demuestre que x-3 es un divisor del polinomio

$$f(x)=x^4-4x^3-7x^2+22x+24$$

Solución:

f(3)=81-108-63+66+24=0

Luego (x-3) es un divisor del polinomio y x=3 es una raíz del mismo.

Problema 16.-

$a)$ ¿$Es\ -1\ raíz\ de\ f(x)=x^3-7x-6=0$?

b) ¿Es 2 raíz de $f(x)=y^4-2y^2-y+7=0$?

$c)$ ¿$Es\ 2i\ raíz\ de\ f(z)=2z^3+3z^2+8z+12=0$?

Solución:

a) f(-1)=0 , luego es raíz

b) f(2)=13 , luego no es raíz

c) f(2i)= 0 , luego es raíz

Problema 17.-

Demostrar que x-a es un divisor de x^n-a^n

Solución:

$$f(x) = x^n - a^n \Rightarrow f(a) = 0$$

Luego x-a divide a f(x)

Problema 18.-

a) Demuestre que $x^5 + a^5$ es divisible por x+a

b) ¿Cuál es el resto de la división de $x^6 + a^6$ por x+a ?

Solución:

a)

$$f(x) = x^5 + a^5 \Rightarrow f(-a) = 0$$

luego f(x) es divisible por x+a

b)

$$f(x) = x^6 + a^6 \Rightarrow f(-a) = 2a^6$$

Luego f(x) no es divisible por x+a

Problema 19.-

Demostrar que x+a es un divisor de $x^n - a^n$ si n es par , pero no lo es si n es impar .

Solución:

En efecto

$$f(x) = x^n - a^n \Rightarrow f(-\mathrm{a}) = 0 \ \ , \ \ n \ \ par$$
$$f(x) = x^n - a^n \Rightarrow f(-\mathrm{a}) = -2a^n \ \ , \ \ n \ \ impar$$

Problema 20.-

Hallar los valores de p para los cuales

$$a)\ 2x^3 - px^2 + 6x - 3p \ \ es \ \ divisible \ \ por \ \ x+2$$
$$b)\ (x^4 - p^2x + 3 - p):(x-3) \ \ tiene \ \ resto\ 4$$

Solución:

$$a)\ \ f(-2)=0=-28-7p \Rightarrow p=-4$$

$$b)\ \ f(3)=4=84-3p^2--p \Rightarrow$$

$$3p^2+p-80=0 \Rightarrow p=5\ \ o\ \ -\frac{16}{3}$$

Problema 21.-

Efectuar la división sintética

$$(3\mathrm{x}^5-4x^4-5x^3-8x+25):(\mathrm{x}-2)$$

Solución:

$$\begin{array}{cccccc|c}
3 & -4 & -5 & 0 & -8 & 25 & \underline{2} \\
 & 6 & 4 & -2 & -4 & -24 & \\
\hline
3 & 2 & -1 & -2 & -12 & 1 &
\end{array}$$

$$\textit{Cuociente}\ \ 3x^4+2x^3-x^2-2x-12\ \ \ \textit{resto}\ \ 1$$

Problema 22.-

Efectuar la división sintética

$$(x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 15x + 50) : (x + 4)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -24 & 15 & 50 & \underline{4} \\ & -4 & 24 & 0 & -60 & \\ \hline 1 & -6 & 0 & 15 & -10 & \end{array}$$

$$Cuociente \;\; x^3 - 6x^2 + 15 \quad resto \quad -10$$

Problema 23.-

Efectuar la división sintética

$$(2x^4 - 17x^2 - 4) : (x + 3)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -17 & 0 & -4 & \underline{-3} \\ & -6 & 18 & -3 & 9 & \\ \hline 2 & -6 & 1 & -3 & 5 & \end{array}$$

$$Cuociente \;\; 2x^3 - 6x^2 + x - 3 \;\; , \quad resto \;\; 5$$

Problema 24.-

Efectuar la división sintética

$$(4x^3 - 10x^2 + x - 1) : (x - \frac{1}{2})$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -10 & 1 & -1 & \underline{1/2} \\ & -2 & -4 & -3/2 & \\ \hline 4 & -8 & -3 & -5/2 & \end{array}$$

$$Cuociente \;\; 4x^2 - 8x - 3 \quad , \quad resto \;\; -5/2$$

Problema 25.-

$Dado \;\; f(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 40 \;\; calcular$

$a)$ $f(-5)$

$b)$ $f(4)$

$Por \;\; división \; \text{sin} \, tética$

Solución:

a)

$$\begin{array}{ccccl} 1 & -6 & -2 & 40 & \underline{|-5} \\ & -5 & 55 & -265 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -6 & -2 & 40 & \underline{|-5} \\ & -5 & 55 & -265 & \\ \hline 1 & -11 & 53 & -125 & \end{array}$$

$$Luego \quad f(-5) = -225$$

b)

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -6 & -2 & 40 & \underline{|4} \\ & -4 & -8 & -40 & \\ \hline 1 & -2 & -10 & 0 & \end{array}$$

$$Luego \quad f(4) = 0$$

Problema 26.-

Sabiendo que una raíz de $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$ es 5 , resolver la ecuación

Solución:

$$\begin{array}{ccccc|}
1 & 2 & -23 & -60 & \underline{5} \\
 & 5 & 35 & 60 & \\
\hline
1 & 7 & 12 & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^2+7x+12=0 \Rightarrow x=-4 \;\; o \;\; -3$$

Problema 27.-

Dos raíces de $x^4-2x^2-3x-2=0$ son -1 y 2 .Resolver la ecuación

Solución:

$$\begin{array}{cccccc|}
1 & 0 & -2 & -3 & -2 & \underline{-1} \\
 & -1 & 1 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & -1 & -1 & -2 & 0 & \underline{2} \\
 & 2 & 2 & 2 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-12\pm i\sqrt{3}}{2}$$

Problema 28.-

Hallar las raíces de las ecuaciones

$$a)\,(x-1)^2(x+2)(x+4)=0 \Rightarrow\; 1\,(doble)\;,\,-2\;\;,-4$$

$$b)\;(2x+1)(3x-2)^3(2x-5)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\;,\;\frac{2}{3}(triple),\frac{5}{2}$$

$$c)\,x^3(x-5)(x+3)=0 \Rightarrow 0\,(triple)\;,5\;,-3$$

$$d)(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})(x-6)=0 \Rightarrow -1-\sqrt{3}\;,\,-1+\sqrt{3}\;,6$$

$$e)((x-i)(x+i))^3(x+1)^2=0 \Rightarrow \pm i\;(triples)\;,-1(doble)$$

$$f\,)\;3(x+m)^4(5x-n)^2=0 \Rightarrow -m\;(cuádruple)\;,\;\frac{n}{5}\;(doble)$$

Problema 29.-

Escribir las ecuaciones cuyas raíces se indican

$$a)\;5\;,1\;,-3\;\Rightarrow (x-5)(x-1)(x+3)=0$$

$$b)\;2\;,-\frac{1}{4}\;,\;-\frac{1}{2}\;\;\Rightarrow (x-2)(\mathrm{x}+\frac{1}{4})(x+\frac{1}{2})=0$$

$$c)\;\pm 2\;,\;2\pm\sqrt{3}\;\;\Rightarrow (x-2)(x+2)(x-(2-\sqrt{3}))(x-(2+\sqrt{3})=0$$

$$d)\;0\;,1\pm 5i\;\;\Rightarrow\; x(x-(1+5i))(x-(1-5i))=0$$

Problema 30.-

Escribir la ecuación de coeficientes enteros cuyas raíces son las que se indican

$$a)\ 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \Rightarrow (x-1)(2x-1)(3x+1)=0$$

$$b)\ 0, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, -1 \Rightarrow x(4x-3)(3x-2)(x+1)=0$$

$$c)\ \pm 3i\ ,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (x-3i)(x+3i)(x-\frac{\sqrt{2}}{2})(x+\frac{\sqrt{2}}{2})=0$$

$$d)\ 2\,(\text{raíz}\ triple), -1 \Rightarrow (\mathrm{x}-2)^3(x+1)=0$$

Problema 31.-

Hallar los valores de A y B para los cuales la ecuación

A(2x+3)+B(x-4)=3x+10 es una identidad

Solución:

(2A+B)x+3A-4B=3x+10 Entonces 2A+B=3 , 3A-4B=10 ,

de donde resulta A=2 , B=-1

Problema 32.-

Hallar los valores de A ,B ,C para los cuales

A(x-3)(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)(x-3)=6x-10 es una identidad

Solución:

$$Desarrollando:$$
$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\,\mathrm{x}^2+(-4A-2C)x+3A-B-3C=6x-10$$
$$\Rightarrow A+B+C=0\ ,\ -4A-2C=6,\ 3A-B-3C\Rightarrow$$
$$A=-2\ \ ,\ B=1\ ,\ C=1$$

Problema 33.-

Sabiendo que los números indicados son raíces de una ecuación de coeficientes reales , hallar otra raíz de dicha ecuación

$$a)\ 2i\ \ ,\ \ otra\ raíz\ es\ -2i$$
$$b)\ -3+2i\ ,\ otra\ raíz\ es\ -3-2i$$
$$c)\ \ -3-i\sqrt{2}\ \ ,\ \ otra\ raíz\ \ es\ -3+i\sqrt{2}$$

Problema 34.-

Sabiendo que los números indicados son raíces de una ecuación de coeficientes racionales , hallar otra raíz de dicha ecuación

Solución:

$$a)\ -\sqrt{7}\quad ,\quad otra\ raíz\ es\ \sqrt{7}$$
$$b)\ -4+2\sqrt{3}\ ,\ otra\ raíz\ es\ -4-2\sqrt{3}$$
$$c)\ 5-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad ,\quad otra\ raíz\ \ es\ 5+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 35.-

Estudiar los razonamientos siguientes

$$a)\ x^3+7x-6i=0,\ tiene\ una\ raíz\ \ x=i\Rightarrow x=-i\ \ es\ otra\ raíz$$
$$b)\ \mathrm{x}^3+(1-2\sqrt{3})x^2+(5-2\sqrt{3})x+5=0\ tiene\ una\ raíz\ \sqrt{3}-i\sqrt{2}$$
$$luego\ \sqrt{3}+i\sqrt{2}\ es\ otra\ raíz$$
$$c)\ x^4+(1-2\sqrt{2})x^3+(4-2\sqrt{2})+(3-4\sqrt{2})x+1=0\ tiene\ una$$
$$raíz\ -1+\sqrt{2}\ ,\ luego\ \ -1-\sqrt{2}\ \ es\ \ otra\ \ raíz$$

Solución:

a) -i no es necesariamente una raíz , porque no son reales todos los coeficientes de la ecuación

b) Cierto, pues los coeficientes de la ecuación son reales

c) No necesariamente , porque no son racionales todos los coeficientes de la ecuación

Problema 36.-

Escribir la ecuación de menor grado de coeficientes reales que tenga por raíces 2 y 1-3i

Solución:

1+3i debe ser otra raíz , entonces

$$(x-2)(x-(1-3i))(x-(1+3i)) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20$$

Problema 37.-

Escribir la ecuación de menor grado de coeficientes racionales que tenga raíces $-1+\sqrt{5}\ \ y\ \ -6$

Solución:

Debe tener también $-1-\sqrt{5}$ entonces

$$(x-(-1+\sqrt{5}))(\mathrm{x}-(-1-\sqrt{5}))(x+6)=x^3+8x^2+8x-20$$

Problema 38.-

escribir la ecuación de cuarto grado con coeficientes racionales que tenga dos raíces

a) $-5i \quad y \quad \sqrt{6}$

b) $2+i \quad y \quad 1-\sqrt{3}$

Solución:

$$a)\ (x+5i)(x-5i)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) = x^4+19x^2-150=0$$

$$b)\ (x-(2+i))(x-(2-i))(x-(1-\sqrt{3}))(x-(1+\sqrt{3}))=$$
$$x^4-6x^3+11x^2-2x-10=0$$

Problema 39.-

Hallar las raíces de $x^4+2x^2+1=0$

Solución:

$$x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2=0 \Rightarrow$$
$$x=i\ ,\ i\ ,\ -i\ ,\ -i$$

Problema 40.-

Resolver $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es bi , b real

Solución:

Si hacemos x=bi tenemos

$$b^4 + 3b^3 i - 5b^2 - 27bi - 36 = 0 \Rightarrow$$
$$b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \Rightarrow b = \pm 3$$
$$\textit{Además}$$
$$3b^3 - 27b = 0 \Rightarrow b = 0\ ,\ \pm 3$$
$$\textit{La solución común es } \pm 3 \Rightarrow \pm 3i \textit{ son dos raíces}$$
$$\Rightarrow x^2 + 9 \textit{ divide al polinomio y resulta}$$
$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1) \textit{ y las otras raíces son } 4 \textit{ y } -1$$

Problema 41.-

Escribir la ecuación de menor grado de coeficientes racionales que tenga una raíz igual a

a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}+i$

Solución:

a)

$$x=\sqrt{3}-\sqrt{2} \Rightarrow x^2-5=-2\sqrt{6} \Rightarrow x^4-10x^2+1=0$$

b)

$$x=\sqrt{2}+i \Rightarrow x^2-1=2\sqrt{2}i \Rightarrow x^4-2x^2+9=0$$

Problema 42.-

a) Escribir la ecuación de menor grado de coeficientes constantes que tengan las raíces 2 y 1-3i

b) Escribir la ecuación de menor grado de coeficientes reales que tenga -6 y $-1+\sqrt{5}$

Solución:

a)

$$(x-2)(x-(1-3i)) = x^2 - 3(1-i)x + 2 - 6i = 0$$

b)

$$(x+6)(x-(-1+\sqrt{5})) = x^2 + (7-\sqrt{5})x - 6(\sqrt{5}-1) = 0$$

Problema 43.-

Hallar las raíces reales si existen de las ecuaciones

a)

$$x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

b)

$$x^3 - x - 6 = 0$$

Solución:

a) -1 y 2 b) 2

Problema 44.-

Hallar las raíces racionales si las hay

a)

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$$

b)

$$2x^4 + x^2 + 2x - 4 = 0$$

Solución:

a) -1 , 2 , -3/2 b) no hay

Problema 45.-

Resolver la ecuación $x^3 - 2x^2 - 31x + 20 = 0$

Solución:

-5 única raíz racional y dividiendo se tiene $x^2 - 7x + 4 = 0$

de donde resulta $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$

Problema 46.-

Resolver $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0$

Solución:

Se verifica que 3 y 1/2 son raíces y dividiendo se obtiene

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$x = -1 \pm i$$

Problema 47.-

Demuestre que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es un número irracional

Solución:

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Rightarrow$$
$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Los únicos candidatos a raíces racionales de esta ecuación son -1 y 1 ,luego x no es racional , o sea x es irracional

Problema 48.-

Escribir una ecuación , en la variable y , cuyas raíces sean el doble de las raíces de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Solución:

$$y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$(\frac{y}{2})^3 - 6(\frac{y}{2})^2 + 11(\frac{y}{2}) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

Problema 49.-

Escribir las ecuaciones en y cuyas raíces sean iguales a las raíces de las ecuaciones dadas multiplicadas por los números que se indican

$a)$ $x^3 - x^2 - 7x + 3 = 0$ (2)

$b)$ $x^3 - 19x - 30 = 0$ (3)

$c)$ $x^4 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{25} = 0$ (5)

$d)\ 32x^4 - 2x - 1 = 0 \quad (4)$

$e)\ 2x^5 + 3x^2 + 1 = 0 \quad (-3)$

$f)\ x^3 - 12x^2 - 16x + 192 = 0 \quad (\frac{1}{4})$

Solución:

a)

$$x = \frac{y}{2} \Rightarrow (\frac{y}{2})^3 - (\frac{y}{2})^2 - 7(\frac{y}{2}) + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$y^3 - 2y^2 - 28y + 24 = 0$$

b)

$$x = \frac{y}{3} \Rightarrow (\frac{y}{3})^3 - 19(\frac{y}{3}) - 30 = 0 \Rightarrow$$
$$y^3 - 171y - 810 = 0$$

c)

$$x = \frac{y}{5} \Rightarrow (\frac{y}{5})^4 + \frac{3}{5}(\frac{y}{5})^2 - \frac{4}{25} = 0 \Rightarrow$$
$$y^4 + 15y^2 - 100 = 0$$

d)

$$x=\frac{y}{4}\Rightarrow(\frac{y}{4})^4-2(\frac{y}{4})-1=0\Rightarrow$$
$$y^4-4y^2-8=0$$

e)

$$x=-\frac{y}{3}\Rightarrow 2(-\frac{y}{3})^5+3(-\frac{y}{3})^2+1=0\Rightarrow$$
$$2y^5-81y^2-243=0$$

f)

$$x=4y\Rightarrow 2(4\,\mathrm{y})^5-12(4\,\mathrm{y})^2-16(4y)+192=0\Rightarrow$$
$$y^3-3y^2-y+3=0$$

Problema 50.-

Hallar las ecuaciones en y cuyas raíces sean iguales a las raíces de las ecuaciones dadas multiplicadas por el menor entero positivo necesario para que las ecuaciones pedidas tengan todos sus coeficientes enteros y el coeficiente de la mayor potencia sea igual a la unidad .

a)

$$x^3 - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{8} = 0$$

b)

$$x^4 - 3x^3 - \frac{x}{27} + \frac{1}{9} = 0$$

c)

$$8x^3 + 18x^2 + x - 6 = 0$$

d)

$$5x^3 + 3 = 0$$

Solución.-

a)

Hacemos x=y/2 entonces

$$(\frac{y}{2})^3-(\frac{y}{2})^2-\frac{3}{2}(\frac{y}{2})+\frac{9}{8}=0 \Rightarrow y^3-2y^2-6y+9=0$$

b)

Hacemos x=y/3 entonces

$$(\frac{y}{3})^4-3(\frac{y}{3})^3-\frac{1}{27}(\frac{y}{3})+\frac{1}{9}=0 \quad \Rightarrow y^4-9y^3-y+9=0$$

c)

Hacemos x=y/4 entonces

$$8(\frac{y}{4})^3+18(\frac{y}{4})^2+\frac{y}{4}-6=0 \Rightarrow y^3+9y^2+2y-48=0$$

d)

Hacemos x=y/5 entonces

$$5(\frac{y}{5})^3+3=0 \Rightarrow \quad y^3+75=0$$

Problema 51.-

Resolver $54x^3 - 9x^2 - 12x - 4 = 0$

Solución:

Escribimos $x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} = 0$ y hacemos x=y/6 entonces

$$(\frac{y}{6})^3 - \frac{1}{6}(\frac{y}{6})^2 - \frac{2}{9}(\frac{y}{6}) - \frac{2}{27} = 0 \Rightarrow$$
$$y^3 - y^2 - 8y - 16 = 0$$

Una raíz de esta ecuación es 4 y por división se tiene

$$y^2 + 3y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$$
$$\Rightarrow \; x = \frac{y}{6} = \frac{2}{3} \; , \; -\frac{1}{4} \pm \frac{i\sqrt{7}}{4}$$

Problema 52.-

Resolver

$$64x^4 - 32x^3 + 4x^2 - 8x - 3 = 0$$

Solución:

Escribimos

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{64} = 0$$

Hacemos x=y/4 entonces

$$(\frac{y}{4})^4 - \frac{1}{2}(\frac{y}{4})^3 + \frac{1}{16}(\frac{y}{4})^2 - \frac{1}{8}\frac{y}{4} - \frac{3}{64} = 0$$

$$\Rightarrow \ y^4 - 2y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$$

se verifica que -1 y 3 son raíces y dividiendo se tiene

$$y^2 + 4 = 0 \Rightarrow y = \pm 2i \Rightarrow$$

$$x = \frac{y}{4} = -\frac{1}{4}\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \pm\frac{i}{2}$$

Problema 53.-

Escribir las ecuaciones en y cuyas raíces sean opuestas a las raíces de las ecuaciones siguientes:

a)

$$x^3+7x^2+11x+5=0$$

b)

$$x^4+3x^2-x-27=0$$

c)

$$2x^5-10x^4-3x+15=0$$

Solución:

En todos los casos hacemos x=-y , entonces

a)

$$(-y)^3+7(-y)^2+11(-y)+5=0 \Rightarrow y^3-7y^2+11y-5=0$$

b)

$$(-y)^4+3(-y)^2-(-y)-27=0 \Rightarrow y^4+y^2+y-27=0$$

c)

$$2(-y)^5-10(-y)^4-3(-y)+15=0 \Rightarrow 2y^5+10y^4-3y-15=0$$

Problema 54.-

Escribir la ecuación en y cuyas raíces sean iguales a las raíces de las dadas , disminuidas en los números que se indican

a)

$$2x^3 - 17x^2 + 26x + 45 = 0 \qquad (3)$$

b)

$$x^3 - x^2 - 17x - 15 = 0 \qquad (-3)$$

c)

$$x^4 - 12x - 5 = 0 \qquad (2)$$

d)

$$\mathrm{x}^3 + 8x^2 - 2 = 0 \qquad (0,4)$$

Solución:

a) Hacemos y=x-3 tenemos

$$2(y+3)^3 - 17(y+3)^2 + 26(y+3) + 45 = 0 \Rightarrow 2y^3 + y^2 - 22y + 24 = 0$$

b) Hacemos y=x+3 tenemos

$$(y-3)^3 - (y-3)^2 - 17(y-3) - 15 = 0 \Rightarrow y^3 - 10y^2 + 16y = 0$$

c) Hacemos x=y+2 tenemos

$$(y+2)^4-12(y+2)-5=0 \Rightarrow \quad y^4+8y^3+24y^2+20y-13=0$$

d) Hacemos x=y+0,4 tenemos

$$(y+0,4)^3+8(y+0,4)^2-2=0 \Rightarrow y^3+9,2\,y^2+6,88y-0,656=0$$

Problema 55.-

Escribir la ecuación cuyas raíces son 1, 3, -2, -4

Solución:

$$(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)=0 \Rightarrow$$
$$x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$$

Problema 56.-

Dada la ecuación $x^3-8x^2+9x+k=0$ Hallar k para que una de las raíces sea el doble de la otra.

Solución:

sean las raíces a, 2a , b

Suma de las raíces =-(-8)=8=a+2a+b o b=8-3a (1)

Suma de productos de dos en dos=9=a(2a)+ab+2ab o
$2a^2+3ab=9 \quad (2)$

Producto de las raíces =-k=a(2a)b o $\mathrm{k}=-2a^2b$ (3)

de (1) (2) se tiene a=3 ,b=-1 y reemplazando en 3 se tiene k=18

Problema 57.-

Transformar la ecuación $2x^4+8x^3+5x^2-3x+6=0$ en otra que carezca del término de tercer grado.

Solución:

Suma de las raíces=-4 . pero en y debe ser cero , esto es la suma de las raíces de la ecuación más 4 . Ello se consigue aumentando en 1 las cuatro raíces de la ecuación dada x=y-1 :

$$2(y-1)^4+8(y-1)^3+5(y-1)^2-3(y-1)+6=0 \Rightarrow$$
$$2y^4-7y^2+3y+8=0$$

Problema 58.-

Hallar la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 23x + k = 0$$

Solución:

Sean las raíces a , b ,c entonces

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 2^2 - 2(-23) = 50$$

Problema 59.-

Dos raíces de la ecuación incompleta $3x^3 - 17x^2 + ... = 0$

son 2 y 4 .Hallar la tercera raíz y completar la ecuación.

Solución:

Suma de las raíces=17/3=2+4+r siendo r la tercera raíz , o sea

r=-1/3 entonces la ecuación es (x-2)(x-4)(x+1/3)=0 o sea

$$3x^3 - 17x^2 + 18x + 8 = 0$$

Problema 60.-

Dada la ecuación $x^3 - 9x + k = 0$,hallar el valor de k para que

a) Dos raíces sean opuestas

b) Exista una raíz doble

c) Las tres raíces estén es PG

d) Las tres raíces estén en PA

e)Una raíz sea $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$

Solución:

a) Sean las raíces a, -a, b entonces

a+(-a)+b=0 o sea b=0 y producto de las raíces =a(-a)b=0=-k ,o sea k=0

b) Sean las raíces a, a, b

suma de las raíces=a+a+b=0 (1)

Productos de dos en dos= $2ab + a^2$ (2)

Producto de las raíces= $a^2 b = -k$ (3)

De (1) y (2) se deduce $a = \pm\sqrt{3},\ b = \mp 2\sqrt{3}$ y reemplazando en (3) se tiene $k = \pm 6\sqrt{3}$

c) Sean las raíces a/r , a , ar entonces

suma de las raíces $\frac{a}{r}+a+ar=0$

Producto de dos en dos $\frac{a^2}{r}+a^2+a^2r=0=-9 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$

No hay solución

d) Sean las raíces a-d , a , a+d

Suma de raíces=3a=0 , o sea a=0

k=-(a-d)a(a+d)=0

e) Sustituyendo en la ecuación dada se tiene

$$(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})^3-9(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})+\mathrm{k}=0 \Rightarrow \mathrm{k}=12$$

Bibliografía

-College Algebra - Stewart - Brooks/Cole-2003

- Algebra- Blitzer- Prentice Hall-2004

-College Algebra- Larson-Brooks/Cole-2007

-College Algebra- Aufmann-Brooks/Cole-2011

-College Algebra- Barnett-McGraw Hill-2011

-College Algebra- Kime -John Wiley & Sons -2011