Tópicos de Matemática Aplicada

Para Ingeniería y Física

Prof. Raúl Castillo S.

Universidad de La Serena
Chile

Tópicos de Matemática Aplicada

Para Ingeniería y Física

Prof. RaúlCastillo S.

Prólogo

Presentamos aquí un texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden para estudiantes de Ingeniería . Se trata de problemas resueltos y aplicaciones . Se entiende que el estudiante está familiarizado con la parte teórica y que domina los procesos algebraicos y métodos de integración simple ya que no se entrará en detalles respecto de esas materias .

2015

Índice

Resumen Teórico

Definición.-Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una relación de la forma $F(x,y,y',y'',......,y^{(n)})=0$,donde x es la variable independiente e y la variable dependiente.

Definición.-El orden de una EDO es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Definición.- El grado de una EDO es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Definición.-Una solución de una EDO es una relación funcional entre las variables que satisface la ecuación.

Definición.- La solución general de una EDO de orden n es una relación que contiene n constantes arbitrarias linealmente independientes y que satisface la ecuación.

Definición.- Una ecuación de la forma M(x)dx+N(y)dy se llama de variables separables y se resuelve integrando.

Definición.- Una función f(x,y) se llama homogénea de grado n si $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$

Definición.- Una EDO de la forma M(x,y)dx+N(x,y)dy =0 se llama homogénea si M,N son homogéneas del mismo grado. Se resuelve con la sustitución y=vx que la convierte en una EDO de variables separables en v y x. También puede ser x=vy según convenga.

Nota.- Una ecuación de la forma $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ se puede reducir a una homogénea mediante una "traslación" que elimina las constantes c , o bien en caso que esto no sea posible se puede recurrir a otra variable auxiliar.

Definición.- Una ecuación de la forma M(x,y)dx+N(x,y)dy se llama exacta si es la diferencial exacta de alguna función u(x,y) ,para ello debe cumplirse

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Nota.- Teóricamente la ecuación M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 se puede convertir a una exacta si la multiplicamos por una función u(x,y) ,que se llama factor integrante . El problema consiste en encontrar dicho factor.

TABLA DE DIFERENCIALES EXACTAS

1.- $xdy + ydx = d(xy)$

2.- $xdx \pm ydy = d(\frac{1}{2}(x^2 \pm y^2))$

3.- $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$

4.- $\frac{xdy - ydx}{y^2} = d(-\frac{x}{y})$

5.- $\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln\frac{x}{y})$

6.- $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\text{arctg}\frac{x}{y})$

7.- $\frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = d(\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y})$

8.- $\frac{xdy - ydx}{(x-y)^2} = d(\frac{1}{2}(\frac{x+y}{x-y}))$

9.- $\frac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = d(\text{arcsen}\frac{y}{x})$

10.- $\frac{ydx - xdy}{(x+y)^2} = d(\frac{1}{2}(\frac{x-y}{x+y}))$

11.- $\frac{ydx + xdy}{(xy)^2} = d(-\frac{1}{xy})$

12.- $\frac{dx + dy}{x+y} = d(\ln(\text{x}+\text{y}))$

Además si $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})= f(x)$ entonces un factor integrante es $\exp(\int f(x)dx)$ y si $\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})= f(\text{y})$ un factor integrante es $\exp(\int f(\text{y})dy)$

En algunos casos se puede multiplicar por $x^m y^n$ la ecuación y aplicar la condición $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ para determinar los valores de m y n.

Definición.- Una EDO de la forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), o, \frac{dx}{dy}+P(\text{y})\,\text{x}=Q(\text{y})$ se llama lineal de primer orden . Un factor integrante para esta ecuación es $\exp(\int P(\text{x})\,\text{dx})$ o bien se puede usar la sustitución y=uv ,se reemplaza y se determinan u y v bajo ciertas condiciones.

Definición.- La ecuación de Bernoulli es de la forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ o bien intercambiando los roles de x e y . Se convierte en lineal mediante la transformación $v=y^{1-n}$.

Definición.- Sea $p=\frac{dy}{dx}$ y sea f(x,y,p)=0 tal que puede factorizarse en la forma $\left[p-f_1(x,y)\right]........\left[p-f_n(x,y)\right]=0$ La solución se obtiene haciendo cero cada factor y se obtienen n soluciones $F_1(x,y,C_1)=0,........,F_n(x,y,C_n)=0$
También el producto de todas estas funciones es una solución general
$\prod_{i=1}^{n} F_i(x,y,C_i)=0$

Nota.- Si una ecuación es de la forma y=f(x,p) (1) se puede derivar para obtener $y'=p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}p'$ esta última ecuación contiene x y p solamente
si podemos resolverla para obtener F(x,p,c)=0 (2) entonces con (1) y (2) podemos eliminar p y obtener una relación entre x e y .En el proceso pueden resultar soluciones extrañas o "singulares" que no están contenidas en la solución general ,deben chequearse.

Nota.- Si una ecuación es de la forma x=f(y,p) (1) entonces $\text{x}'=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$
y podemos resolverla para obtener F(y,p,c)=0 (2) ,podemos eliminar p de (1) y (2) para obtener una solución.

Definición.- La ecuación de Clairaut es de la forma y=px+f(p) , derivando se obtiene la ecuación $(x+\frac{df}{dp})p'=0$, de donde p=C es una solución (general)
y de x+f'(p)=0 se tiene x=-f'(p) (3) y entonces y=f(p)-pf'(p) (2) , de (3) y (2) se puede obtener otra solución que es la singular .

Nota .-Por lo general la solución singular es tangente a la familia de curvas que es la solución general.

Nota.-Cualquier curva que en cada uno de sus puntos es tangente a un miembro de una familia uniparamétrica de curvas se llama una envolvente de esa familia.

APLICACIONES

a) Para una sustancia o población que decae o crece tenemos la ecuación
$\frac{dP}{dt}=kP$ donde k es la constante de proporcionalidad y P es la cantidad de sustancia o población.

b)Temperatura , Ley de enfriamiento de Newton $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_a)$
donde T es la temperatura del cuerpo , k es la constante de proporcionalidad
y T_a es la temperatura del ambiental .

c) Cuerpos que caen , tenemos la segunda Ley de Newton $F=m\frac{dv}{dt}$,
cuando hay resistencia proporcional a la velocidad se tiene $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

d)Disoluciones . Supongamos que un tanque contiene V_0 litros de una cierta solución de alguna sustancia . Entran E litros/seg al tanque y salen F litros/seg del tanque ,entonces el volumen en el tiempo t es $V_0+Et-Ft$
, la concentración de la sustancia es $\frac{Q}{V_0+Et-Ft}$ donde Q denota la cantidad de sustancia disuelta en el tiempo t . Así podemos plantear la ecuación
$\frac{dQ}{dt}=BE-\frac{Q}{V_0+Et-Ft}$ donde B es la cantidad de unidades de sustancia disuelta en el líquido que entra por unidad de volumen.

e) Circuitos eléctricos . En un circuito cerrado en serie con una fem E , una resistencia R y un solenoide la relación es $\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$ donde E es el voltaje,
I es la intensidad , R la resistencia , L la reluctancia , t el tiempo.
En un circuito cerrado en serie con una fem E, un capacitor C y una resistencia R la relación es $\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{E}{R}$ donde E es el voltaje, t el tiempo , R la resistencia ,C la capacitancia , Q la carga . Además , $I=\frac{dQ}{dt}$

f) Para las trayectorias ortogonales de una familia de curvas A, se deriva respecto a x y se reemplaza $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$. A veces es necesario eliminar C de las ecuaciones obtenidas .

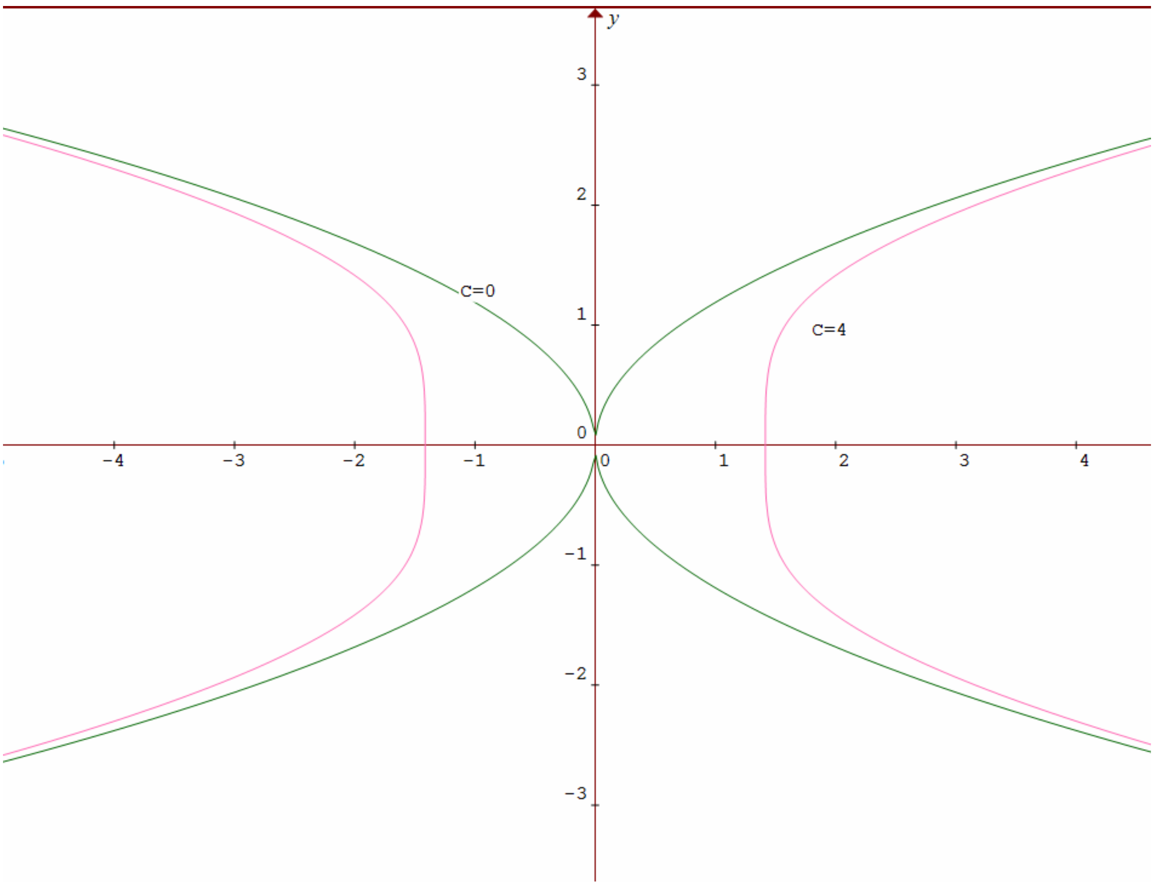
Ecuaciones Separables

Problema 1.- Resuelva

$$3x^2 - 2y^3 y' = 0$$

Solución

$$3x^2 - 2y^3 \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 3x^2 dx' 2y^3 dy = 0 \rightarrow \int 3x^2 dx - 2y^3 dy = C' \rightarrow x^3 - \frac{y^4}{2} = C' \rightarrow 2x^2 - y^4 = C$$



Problema 2.- Resuelva

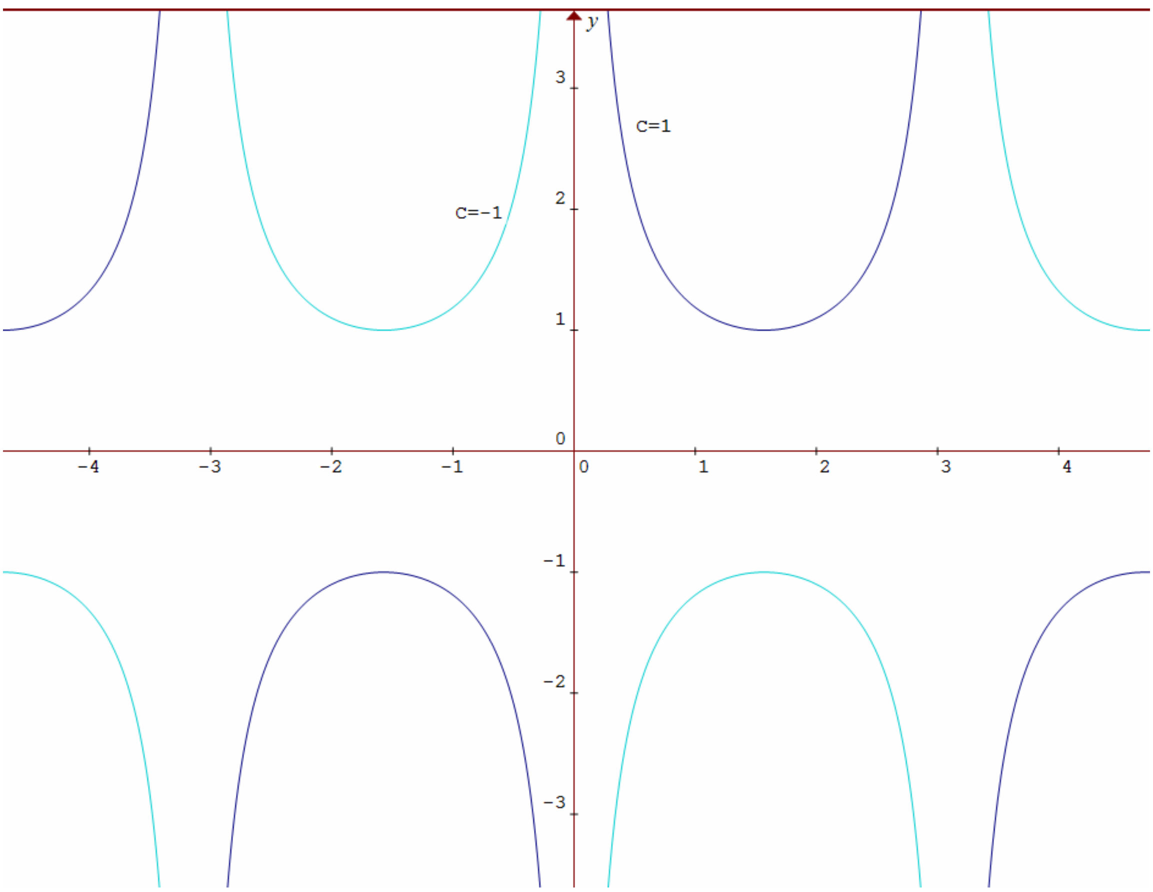
$$senx dy + y\cos x dx = 0$$

Solución

$$\frac{dy}{y} + \frac{\cos x}{senx}dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{\cos x}{senx}dx = 0$$

$$\ln y + \ln senx = C' \rightarrow \ln ysenx = \ln C \rightarrow ysenx = C$$



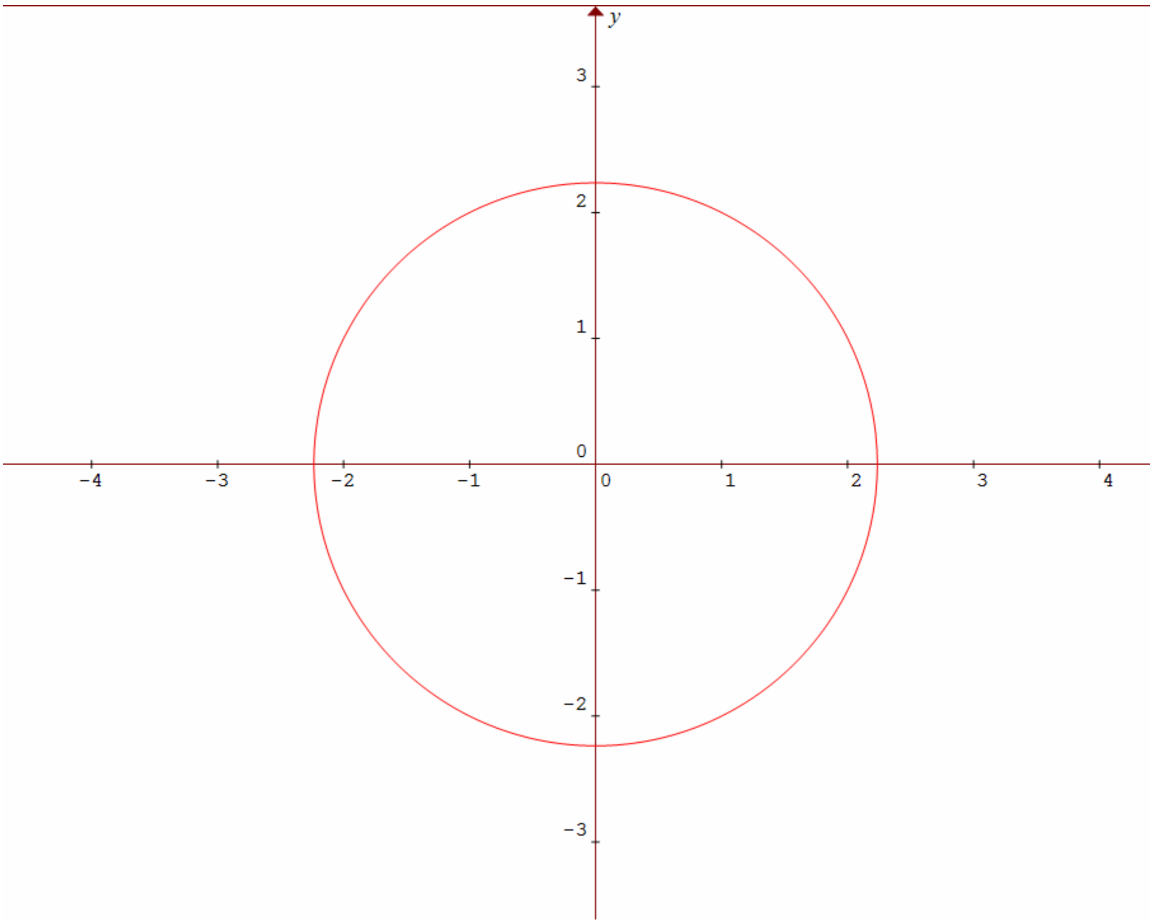
Problema 3.- Resuelva

$xdx + ydy = 0$ y determine una solución particular tal que $y = 2$ si $x = 1$

Solución

$$\int xdx + \int ydy = C' \to \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C' \to x^2 + y^2 = C$$

Si $x = 1, y = 2 \quad \to 1 + 4 = C \to C = 5 \to x^2 + y^2 = 5$



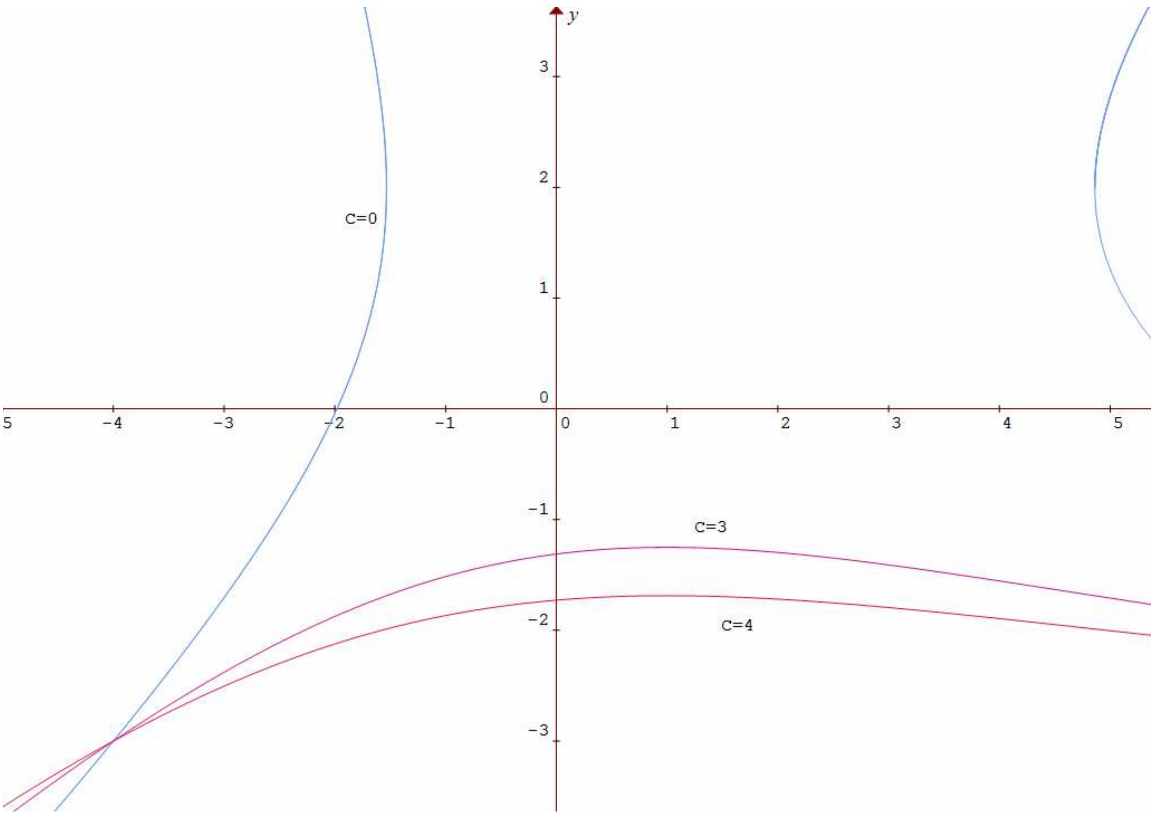
Problema 4.- Resuelva

$$\left(xy-2x+4y-8\right)dy-\left(xy+3x-y-3\right)dx=0$$

Solución

Factorizando $\left(y-2\right)\left(x+4\right)dy-\left(y+3\right)\left(x-1\right)dx=0 \quad \rightarrow \frac{y-2}{y+3}dy=\frac{x-1}{x+4}dx$,

Integrando resulta $y-5\ln\left(y+3\right)=x-5\ln\left(x+4\right)+C$

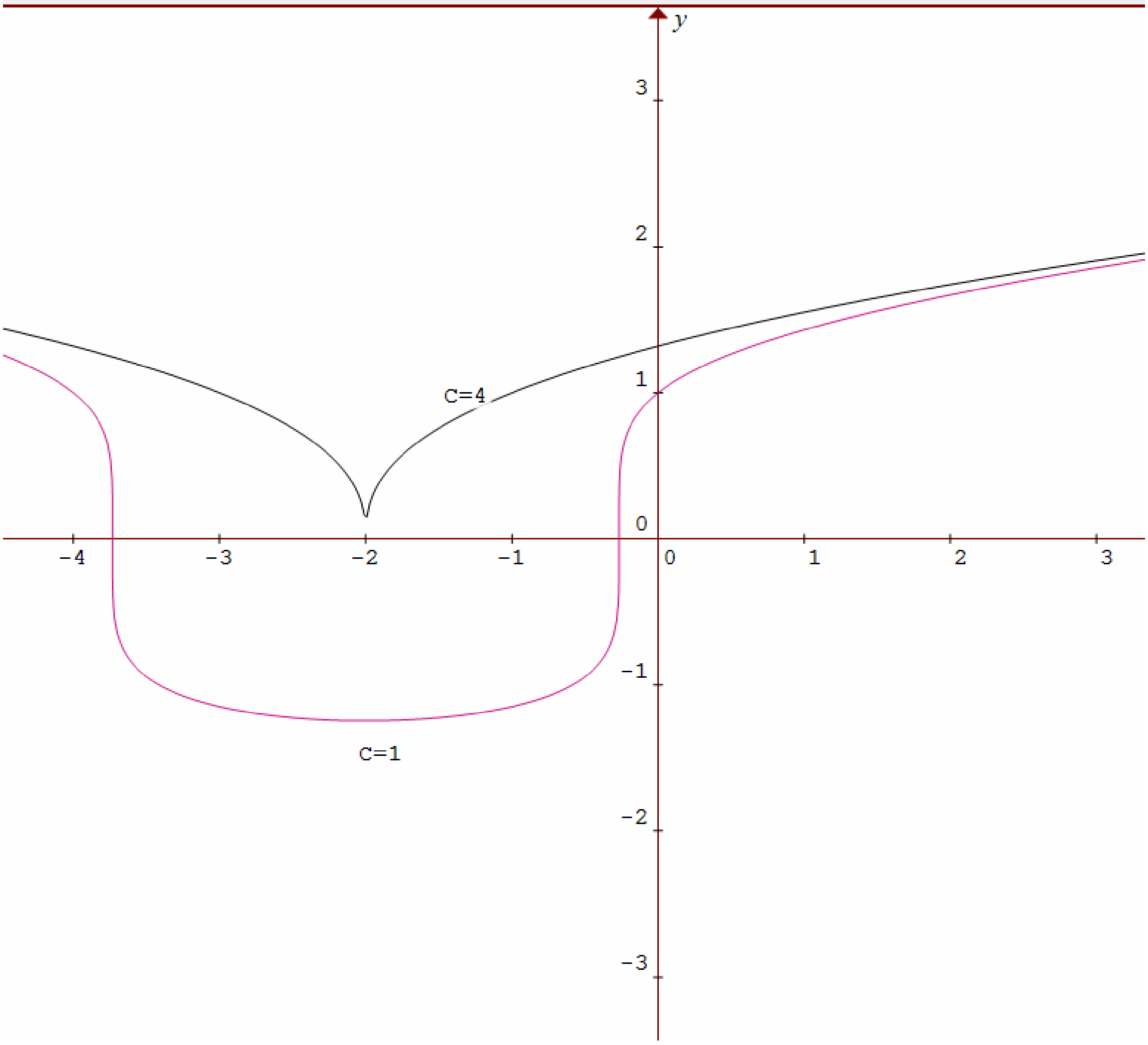


Problema 5.- Resuelva

$$y^4 dy = (x+2)\,dx$$

Solución

Integrando $\dfrac{y^5}{5} = \dfrac{x^2}{2} + 2x + C' \rightarrow y^5 = \dfrac{5}{2}x^2 + 10x + C$



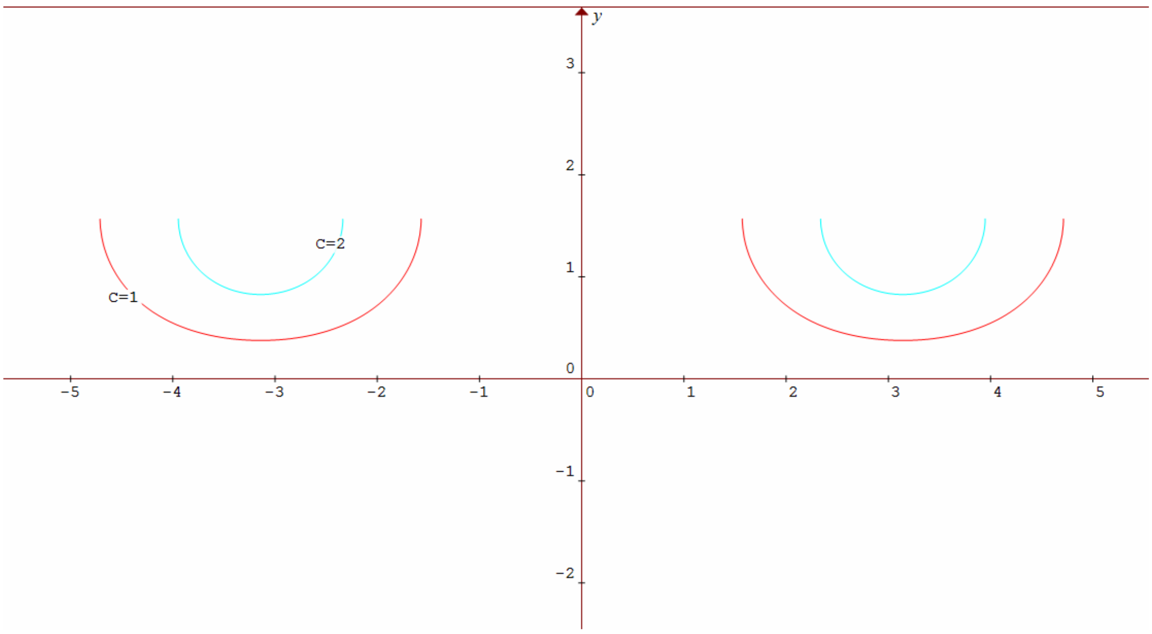
Problema 6.- Resuelva

$$\frac{tgy}{ctgx}dx + \sec x dy = 0$$

Solución

Arreglando podemos escribir

$$senxdx + \frac{\cos y}{seny}dy = 0 \rightarrow -\cos x + \ln seny = C' \rightarrow seny = Ce^{\cos x}$$

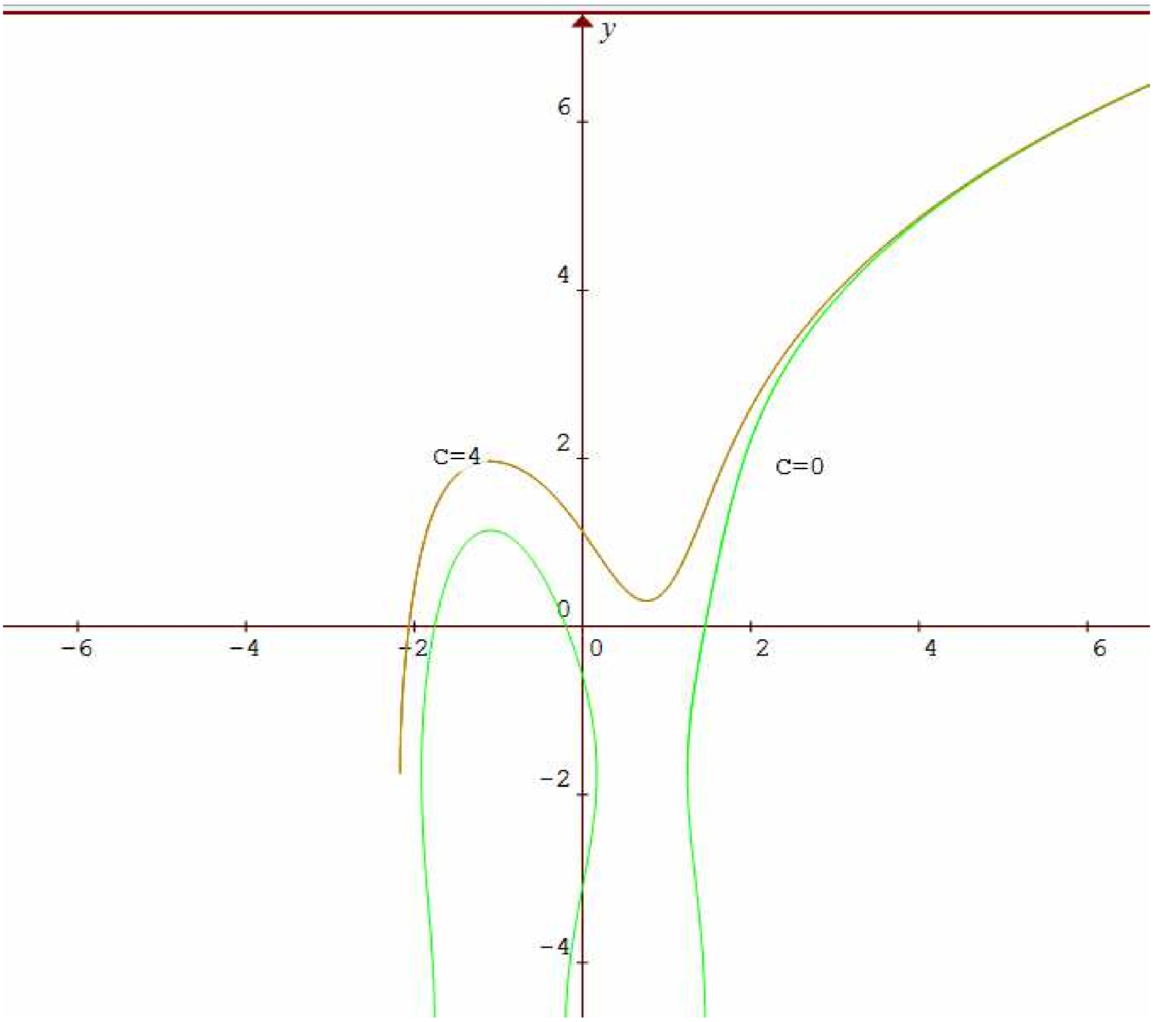


Problema 7.- Resuelva

$$\left(\cos y + e^{y}\right)dy = \left(6x^{2} + 2x - 5\right)dx$$

Solución

Integrando $seny + e^{y} = 2x^{3} + x^{2} - 5x + C$

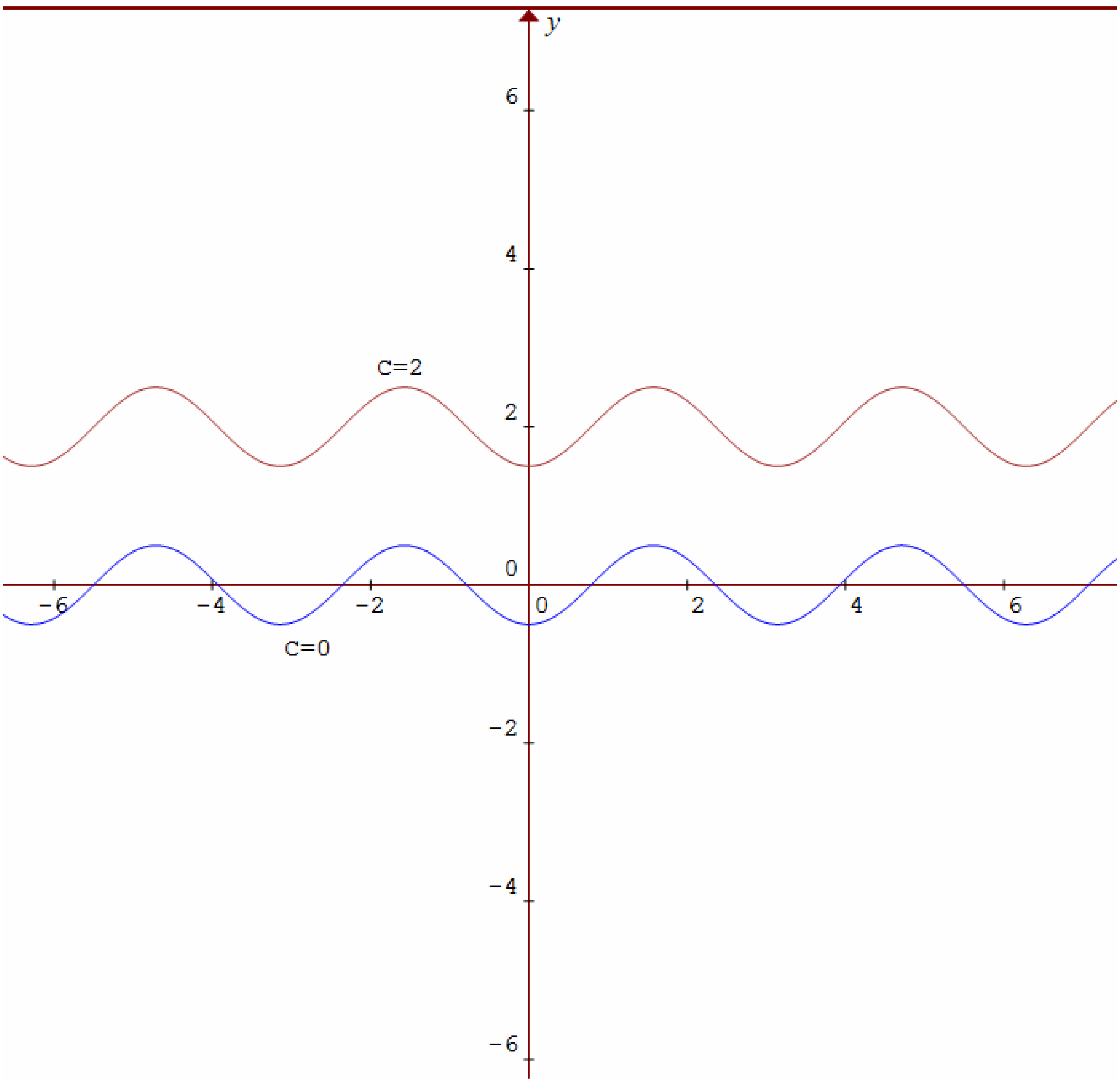


Problema 8.- Hallar la solución particular de la ecuación $y' = 2senx\cos x$ si $y = 1$ en $x = 0$

Solución

$$dy = sen2xdx \rightarrow y = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

Si $x = 0 \rightarrow 1 = -\frac{1}{2} + C \rightarrow C = \frac{3}{2}$ así la solución pedida es $y = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}$

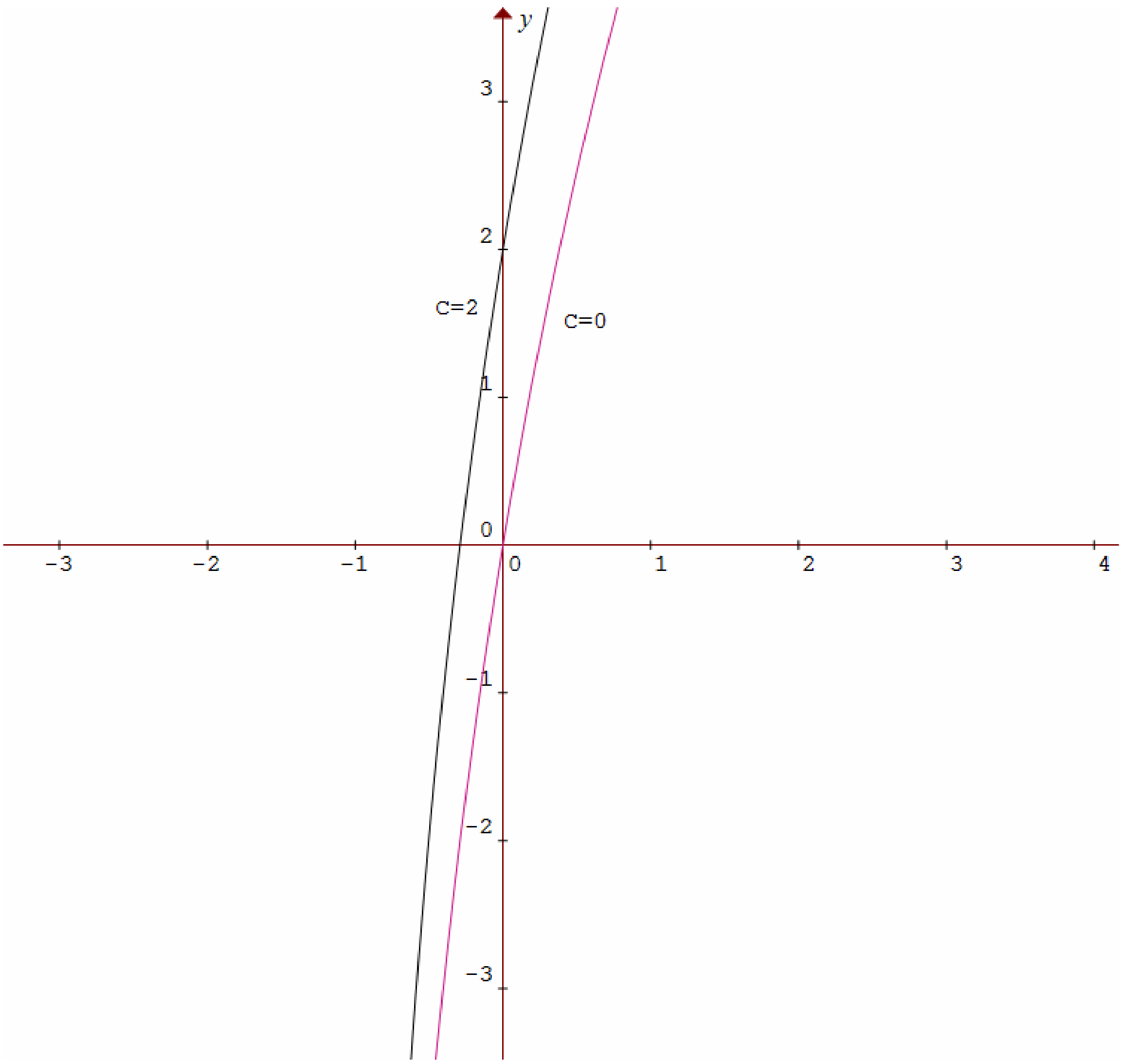


Problema 9.- Resuelva

$$\left(x+1\right)y' = x+6$$

Solución

Separando $dy = \dfrac{x+6}{x+1}dx$ integrando $y = x+5\ln\left(x+1\right)+C$

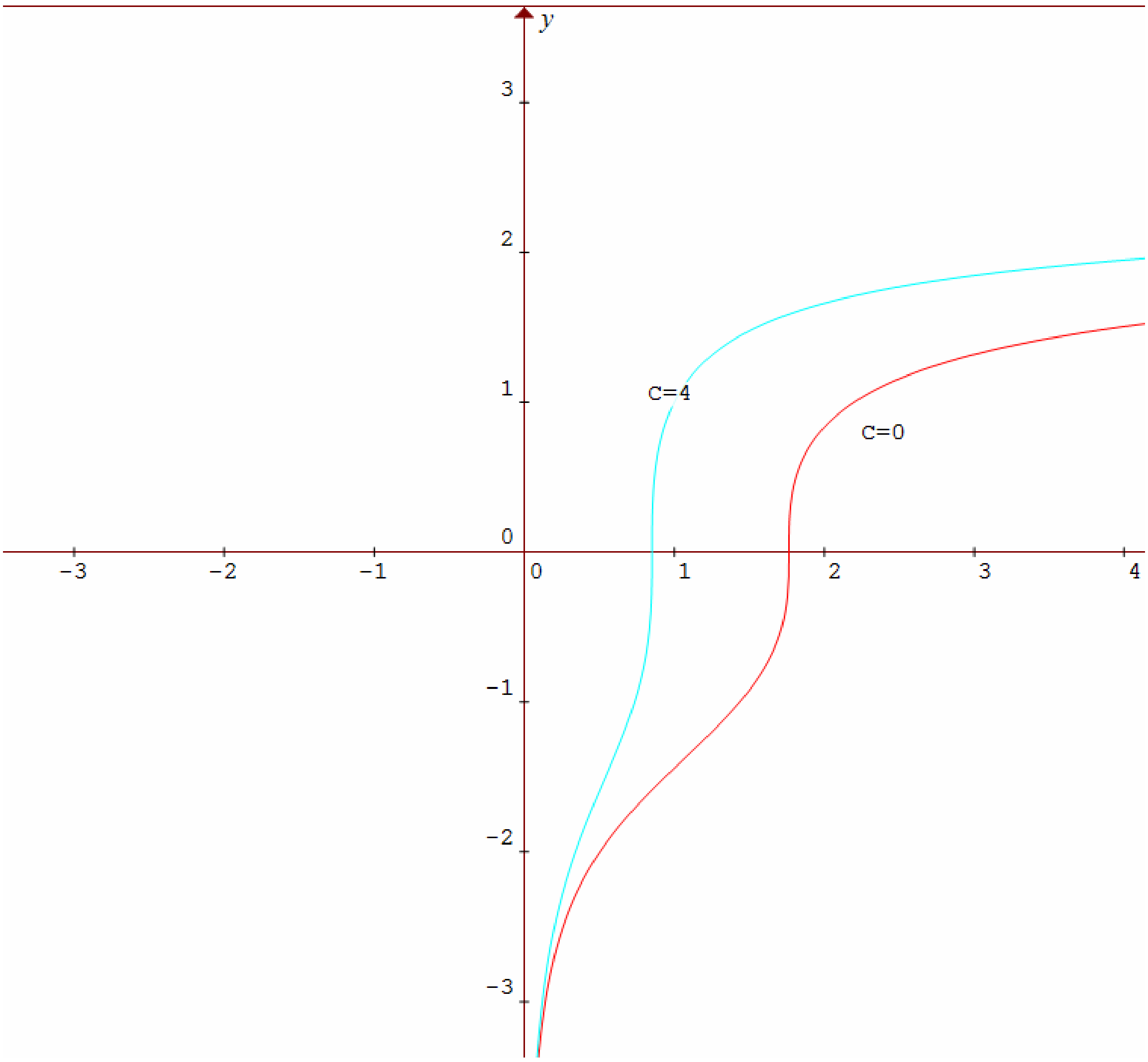


Problema 10.- Resuelva

$$\frac{1}{y'} = \frac{x^2 y^2}{1+x}$$

Solución

Escribimos $y^2 dy = \left(\frac{1+x}{x^2}\right) dx$ integrando $\frac{1}{3} y^3 = -\frac{1}{x} + \ln x + C' \rightarrow y^3 = 3\ln x - \frac{3}{x} + C$

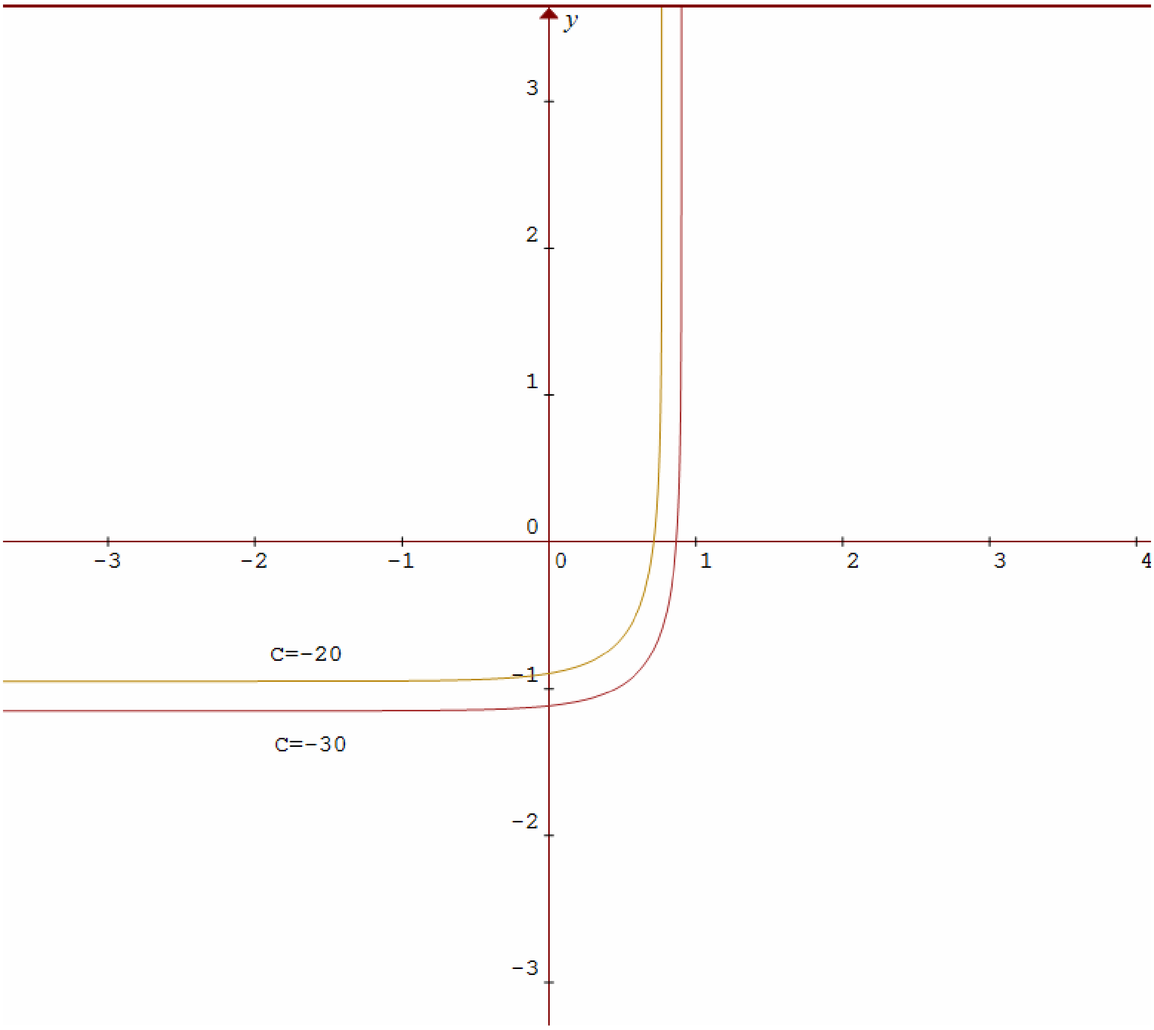


Problema 11.- Resuelva

$y' = e^{3x+2y}$

Solución

Separando $e^{-2y}dy = e^{3x}dx$ integrando $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$

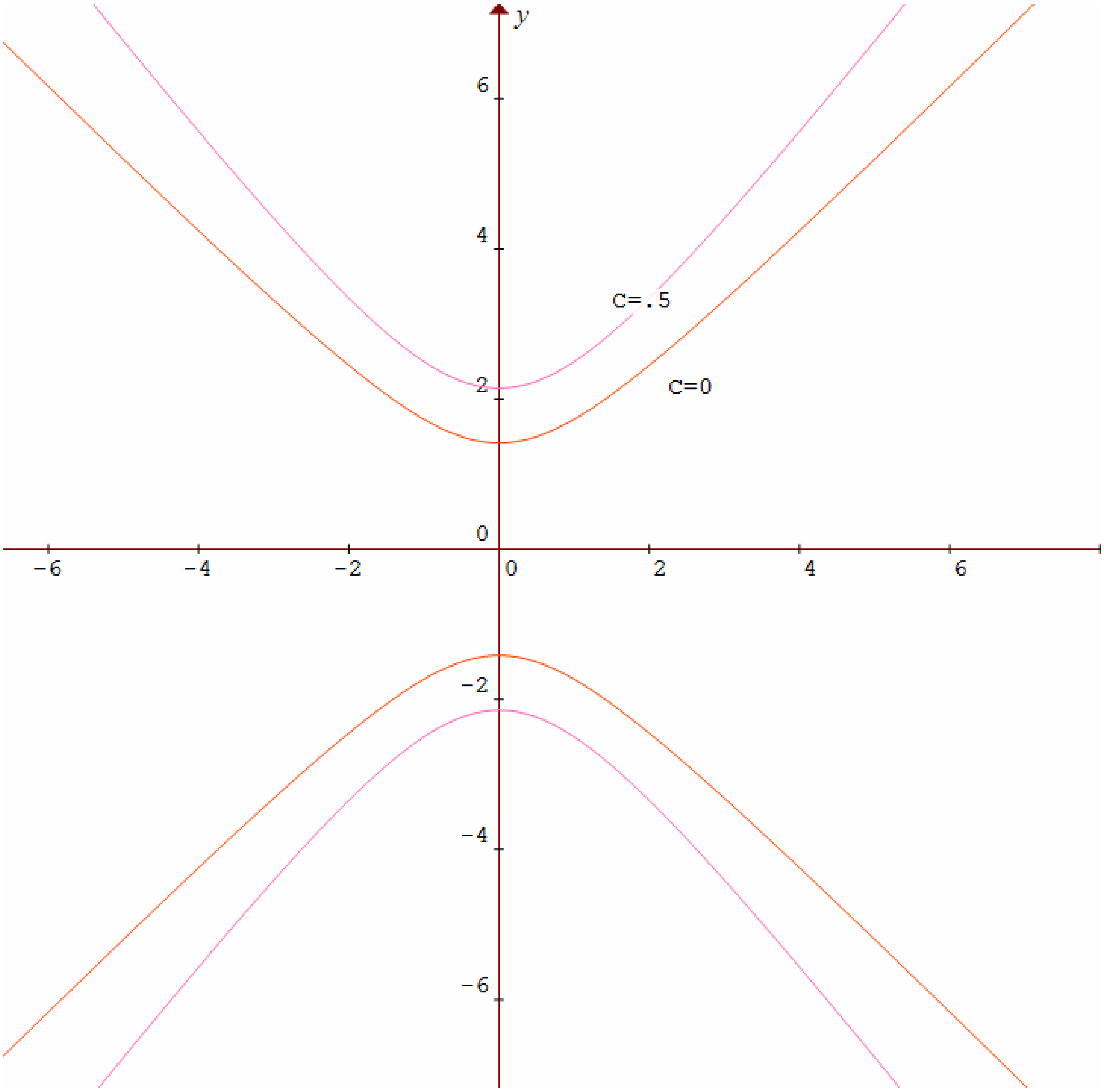


Problema 12.- Resuelva

$$\left(4y+yx^2\right)dy-\left(2x+xy^2\right)dx=0$$

Solución

Separando $\dfrac{y}{2+y^2}dy=\dfrac{x}{4+x^2}dx$ integrando $\ln\left(2+y^2\right)=\ln\left(4+x^2\right)+C$



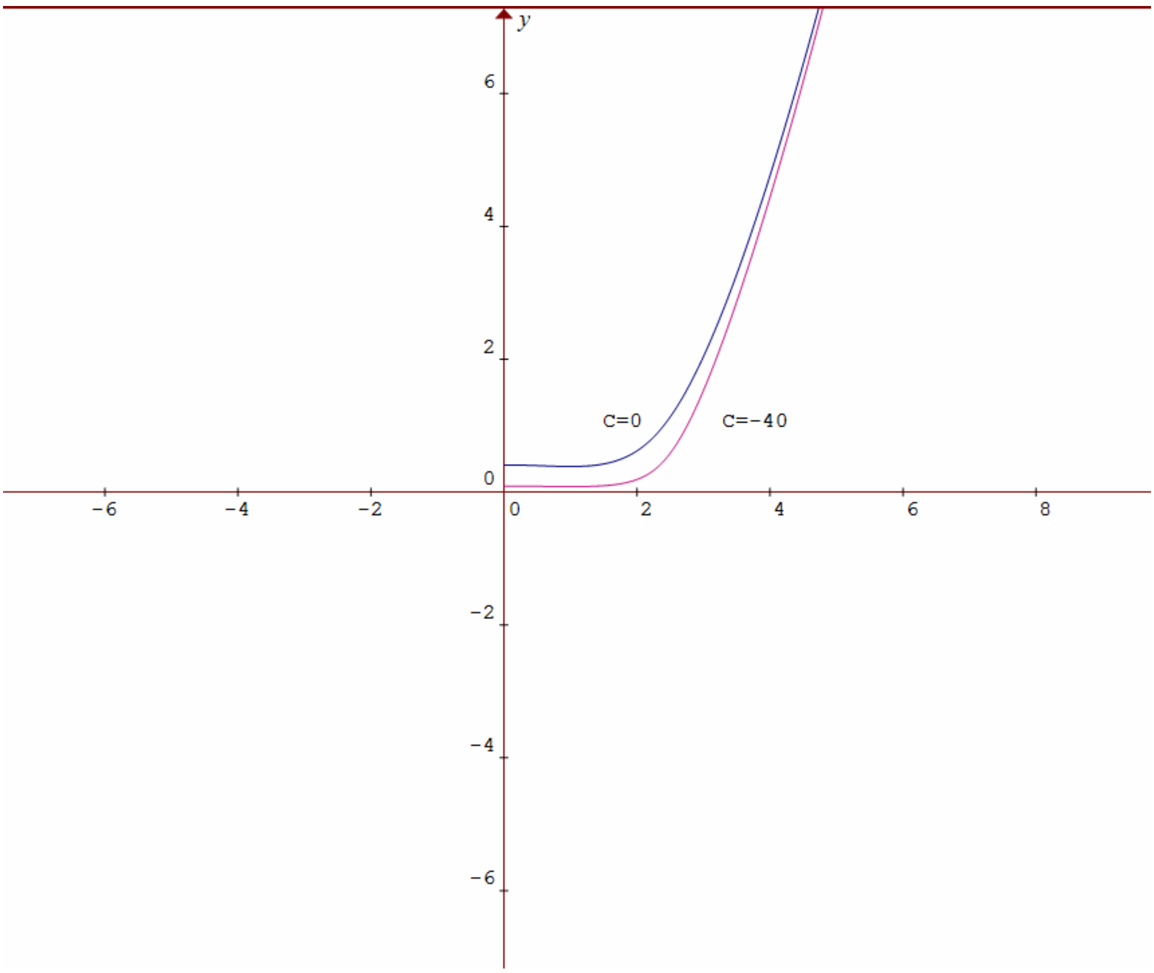
Problema 13.- Resolver

$$y \ln x y' = \left(\frac{y+1}{x} \right)^2$$

Solución

Separando $\frac{(y+1)^2}{y} dy = x^2 \ln x$ integrando

$$\frac{y^2}{2} + 2y + \ln y = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C' \rightarrow 9y^2 + 36y + 18 \ln y = 6x^3 \ln x - 2x^3 + C$$

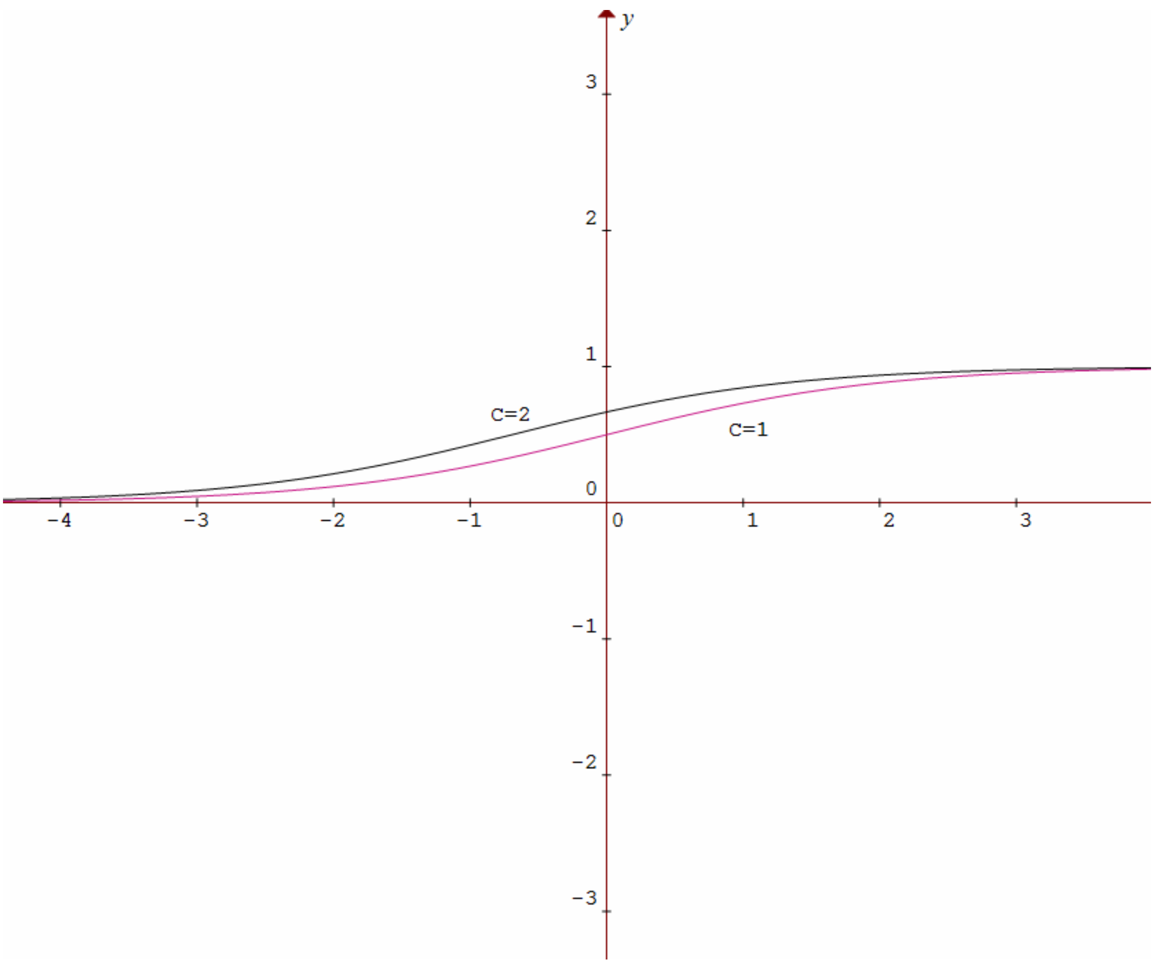


Problema 14.- Resolver

$$y' = y - y^2$$

Solución

Separando $\frac{1}{y-y^2}dy = dx$ integrando resulta $y = \frac{Ce^x}{1+Ce^x}$

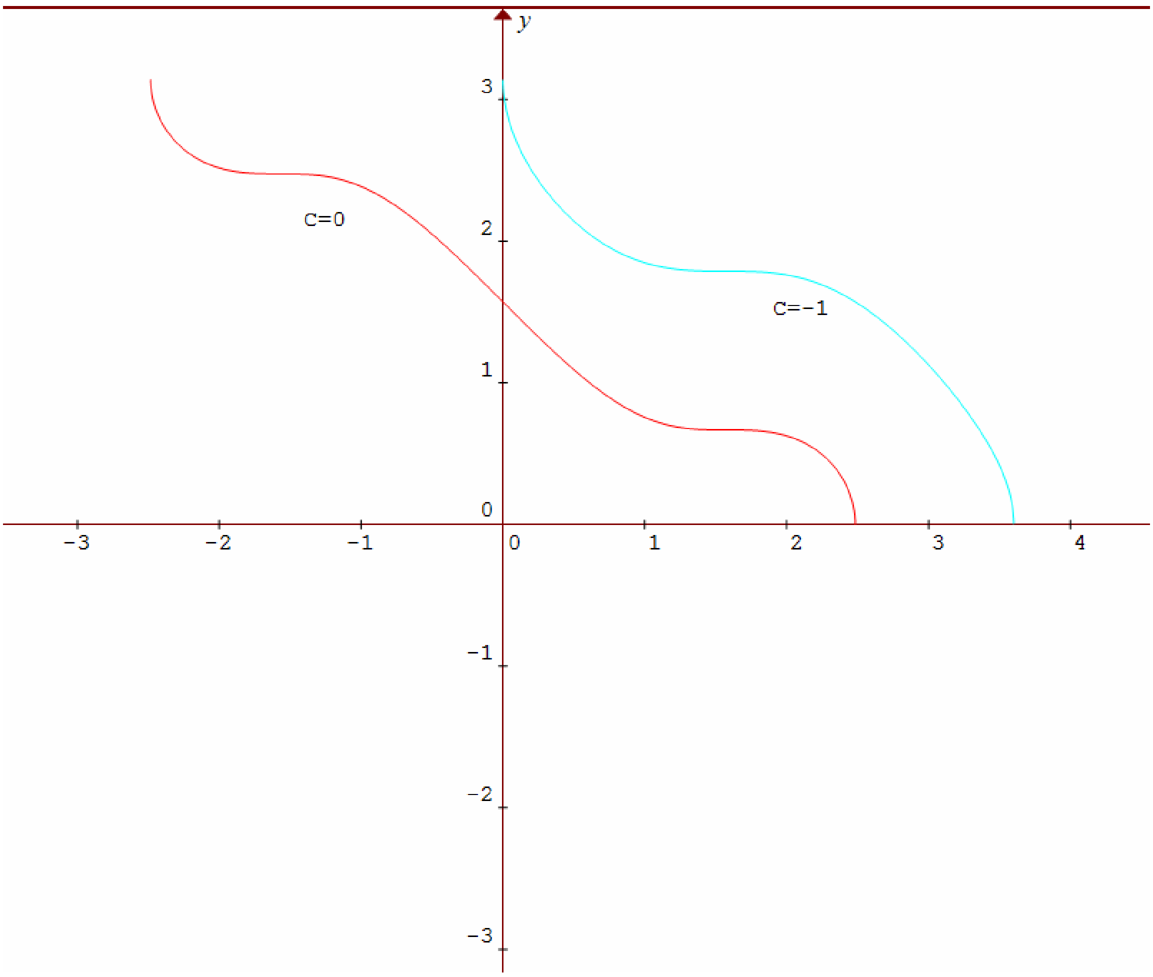


Problema 15.- Resolver

$\sec^2 xdy + \cos ecydx = 0$

Solución

Arreglando tenemos $senydy = -\cos^2 xdx$ de donde resulta $\cos y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}sen2x + C$



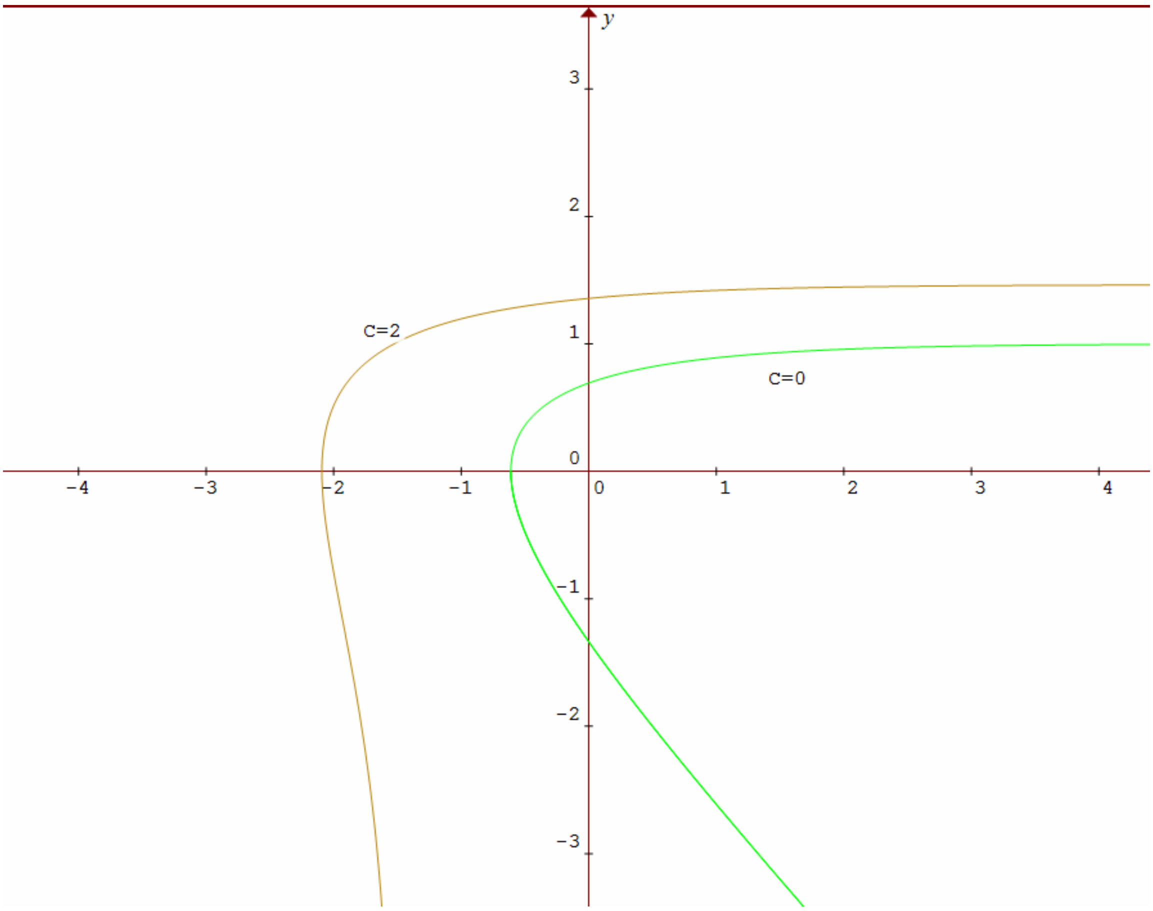
Problema 16.- Resolver

$$e^{\frac{x}{2}} y dy - \frac{dx}{e^{y}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)} = 0$$

Solución

Separando tenemos $ye^{y}dy = \dfrac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)}$ integrando resulta

$$ye^{y} - e^{y} = -\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}} - \frac{2\ln e^{\frac{x}{2}}}{x} + 2\ln\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right) + C$$

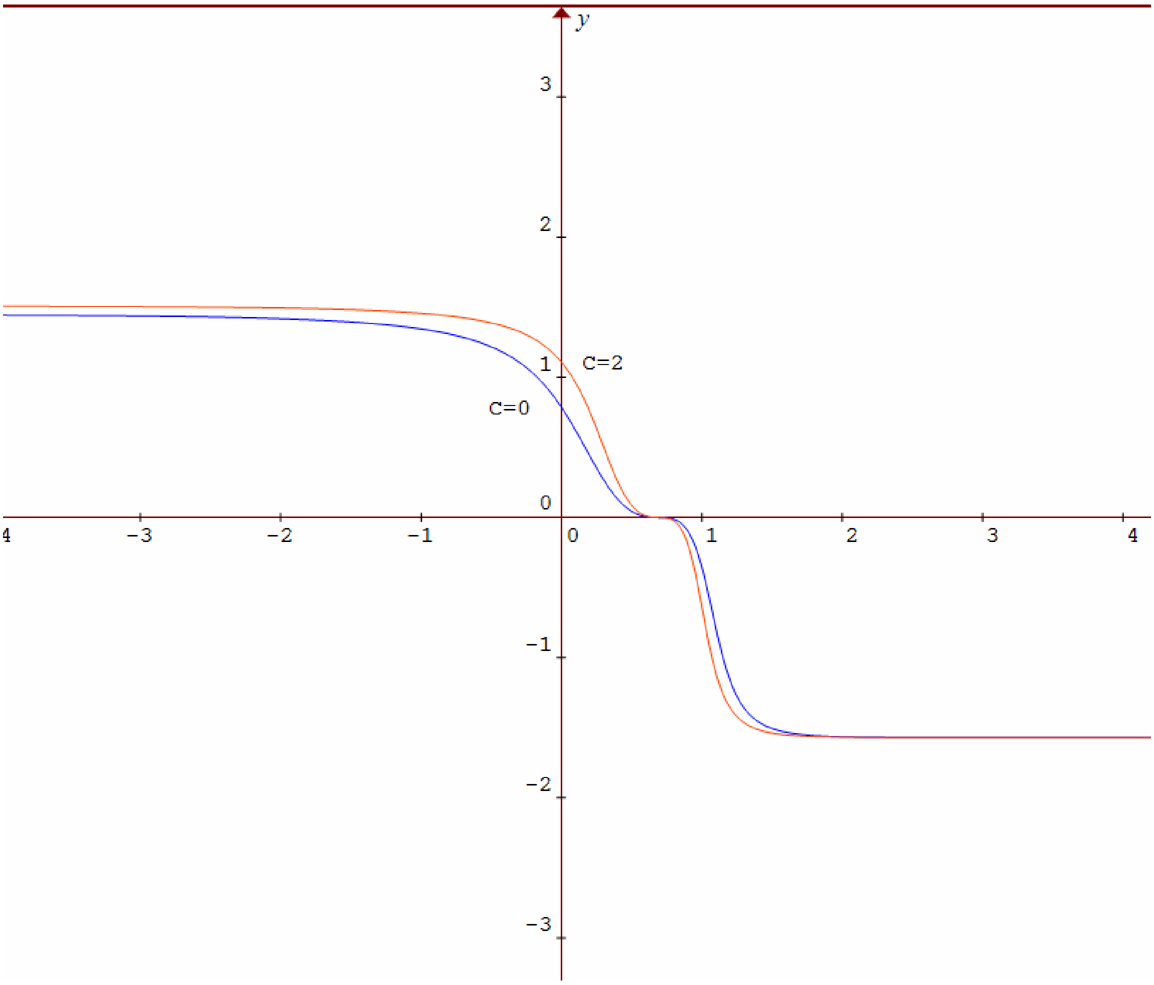


Problema 17.- Resuelva

$$3e^{x}tgydx+\left(2-e^{x}\right)\sec^{2}ydy=0$$

Solución

Separando tenemos $\frac{\sec^{2}ydy}{tgy}=-\frac{3e^{x}dx}{2-e^{x}}$ integrando resulta $tgy=C\left(2-e^{x}\right)^{3}$



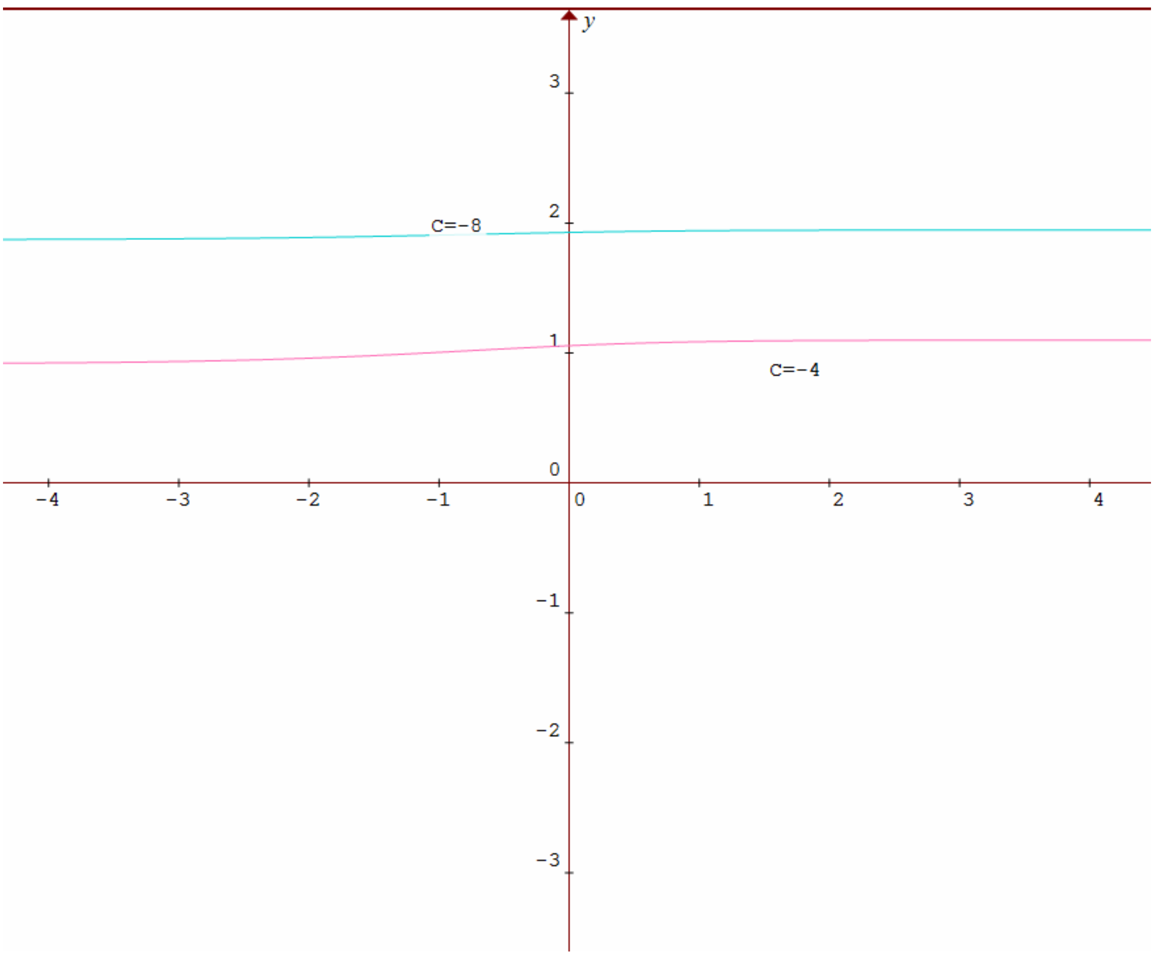
Problema 18.- Resolver

$$\left(e^{y}+1\right)^{2} e^{-y}dx+\left(e^{x}+1\right)^{3} e^{-x}dy=0$$

Solución

Separando resulta $\dfrac{e^{y}}{\left(e^{y}+1\right)^{2}}dy=-\dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{3}}dx$ integrando resulta

$$\frac{-1}{\left(e^{y}+1\right)}=\frac{1}{2\left(e^{x}+1\right)^{2}}+C$$

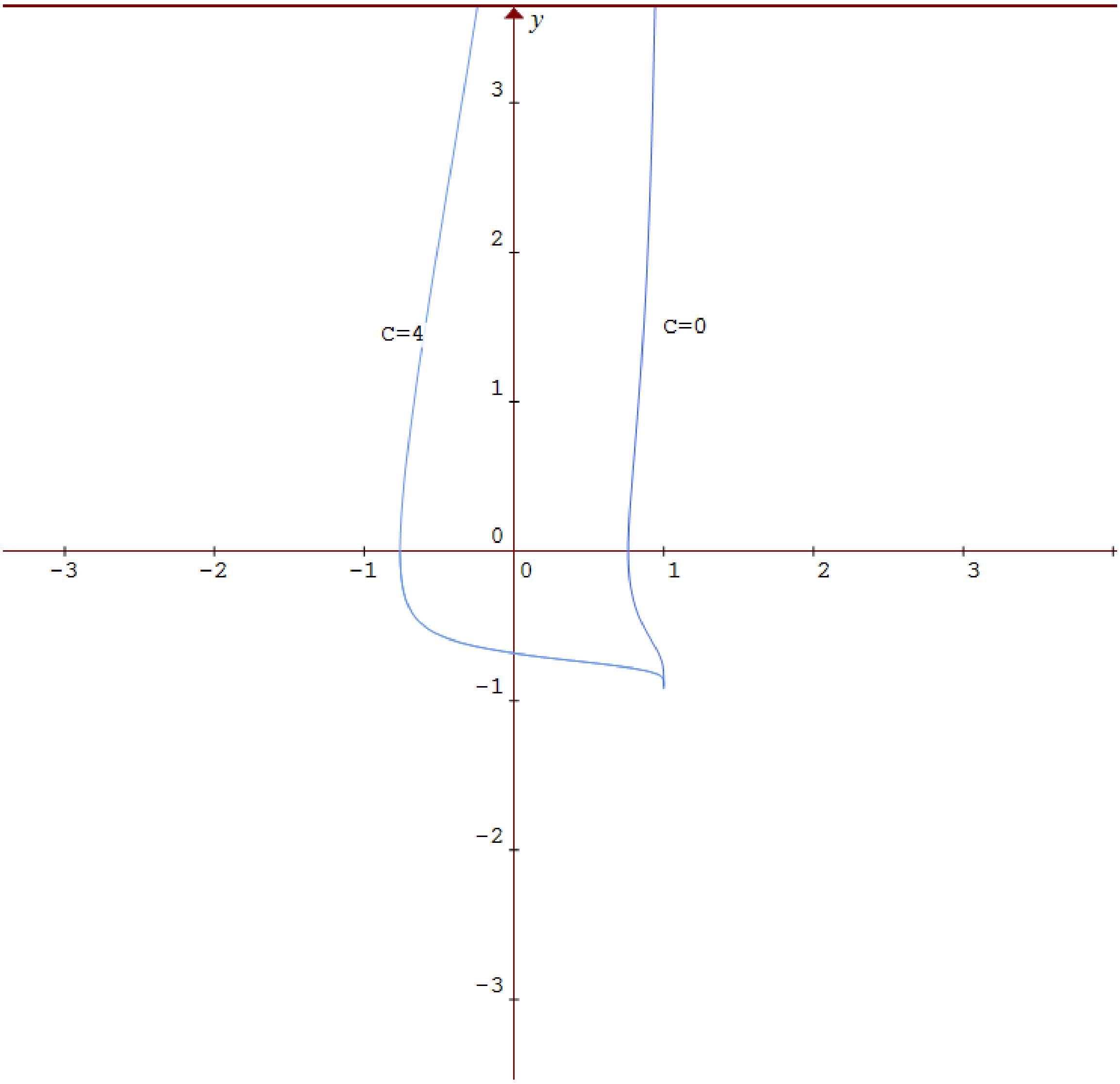


Problema 19.- Resolver

$$\left(y - yx^2\right) y' = \left(y+1\right)^2$$

Solución

Separando $\dfrac{y}{\left(y+1\right)^2}dy = \dfrac{1}{1-x^2}dx$ integrando resulta $\ln\left(y+1\right)^2 + \dfrac{2}{y+1} = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + C$



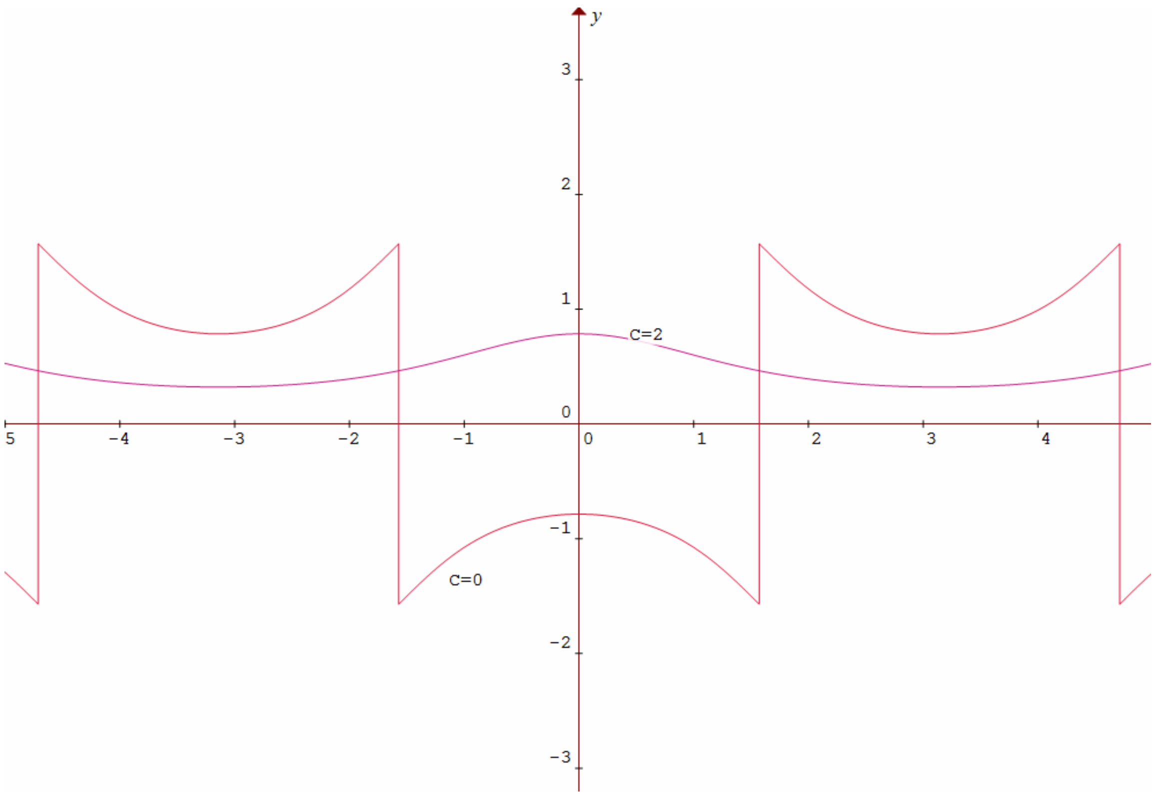
Problema 20.- Resolver

$$y' = senx\left(\cos 2y - \cos^2 y\right)$$

Solución

Separando tenemos $\dfrac{1}{\cos 2y - \cos^2 y}dy = senxdx$ integrando resulta

$\dfrac{\cos y}{seny} = -\cos x + C$ o $ctgy = -\cos x + C$



Ecuaciones Homogéneas

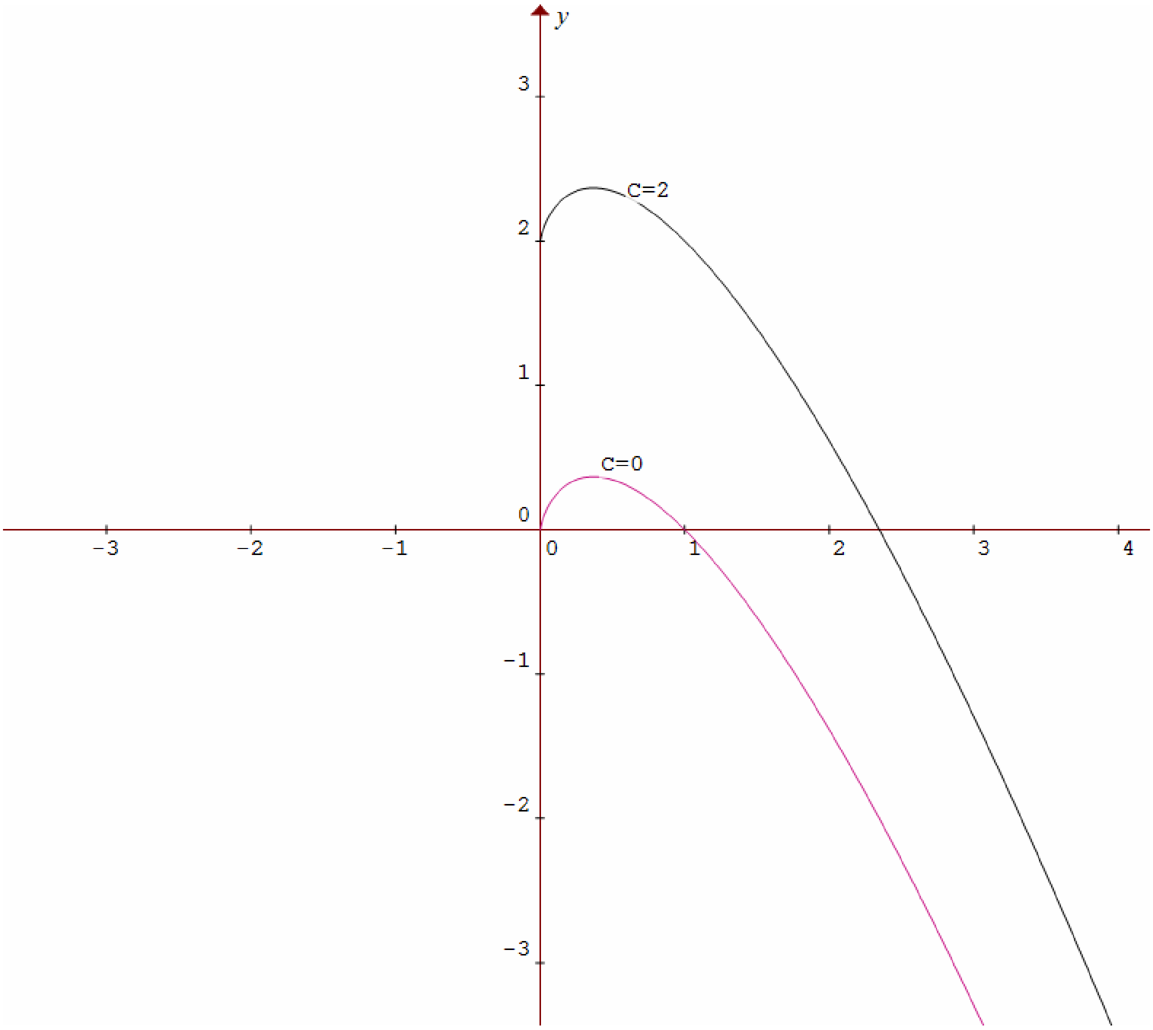
Problema 1.- Resolver

$$\left(x-y\right)dx+xdy=0$$

Solución

Sea $y=vx$ reemplazamos y separamos, queda

$$dv=-\frac{1}{x}dx\rightarrow v=\ln x+C\rightarrow\frac{y}{x}=-\ln+C\rightarrow y=-x\ln x+C$$



Problema 2.- Resolver

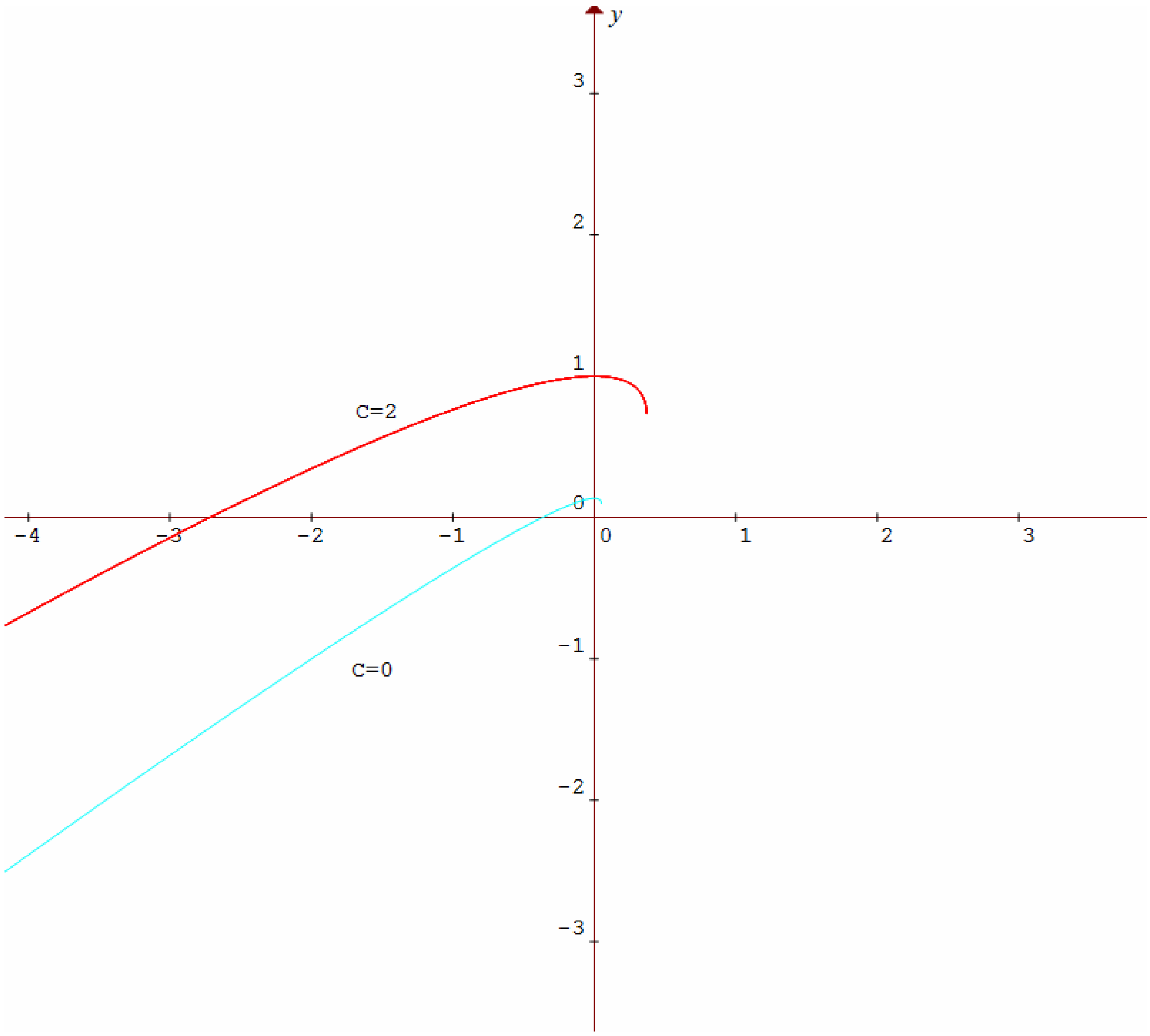
$$xdx + (y - 2x)\,dy = 0$$

Solución

$y = vx$, reemplazamos y separamos $\dfrac{2 - v}{1 - 2v + v^2}dv = \dfrac{dx}{x}$ integrando resulta

$-\ln(v-1) - \dfrac{1}{v-1} = \ln x + C$ y como $v = \dfrac{y}{x}$ resulta rearreglando

$$\ln(y - x) + \frac{x}{y - x} + C = 0$$



Problema 3.- Resolver

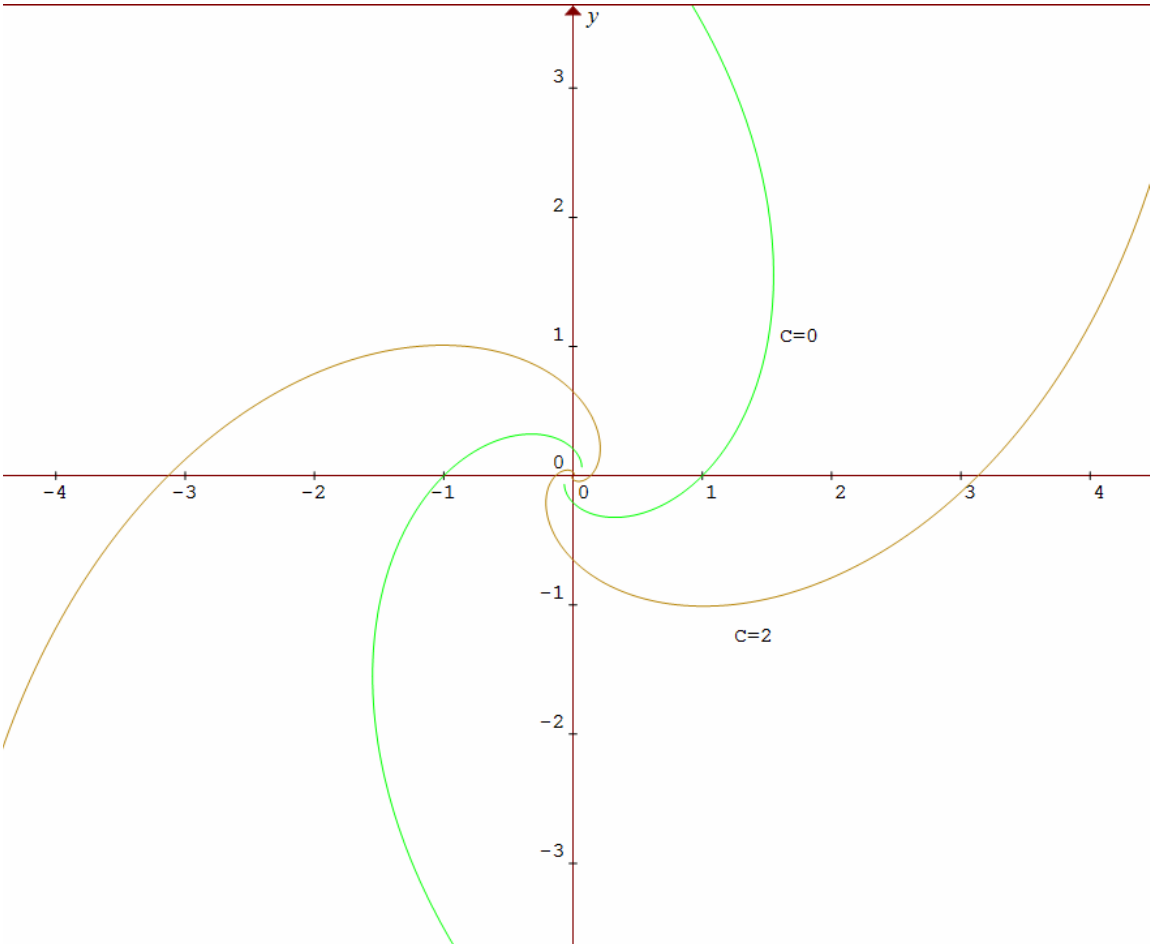
$$(x+y)dx-(x-y)dy=0$$

Solución

Sea $y=vx$, reemplazando y separando $\frac{dx}{x}=\frac{1-v}{1+v^2}dv$, integrando se tiene

$\ln x = arctgv - \frac{1}{2}\ln(1+v^2)+C$ y reemplazando $v=\frac{y}{x}$ se tiene

$$arctg\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$$

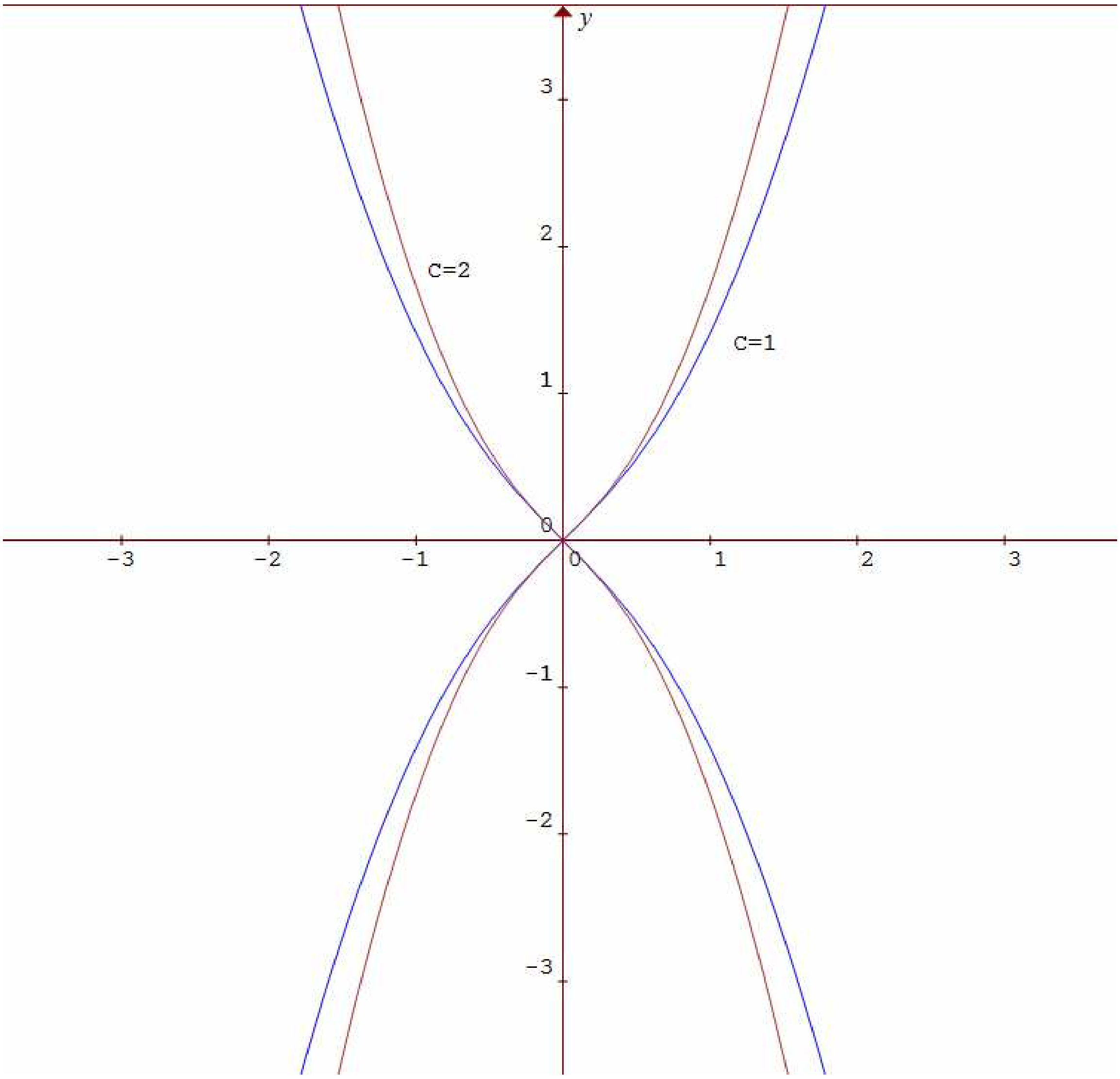


Problema 4.- Resolver

$$\left(x^2 - 2y^2\right)dx + xydy = 0$$

Solución

Haciendo el reemplazo $y = vx$ y separando tenemos $\frac{v}{v^2 - 1}dv = \frac{dx}{x}$ integrando se tiene $\ln\left(v^2 - 1\right) = \ln Cx^2$ y reemplazando $v = \frac{y}{x}$ se tiene $y^2 = x^2 + Cx^4$



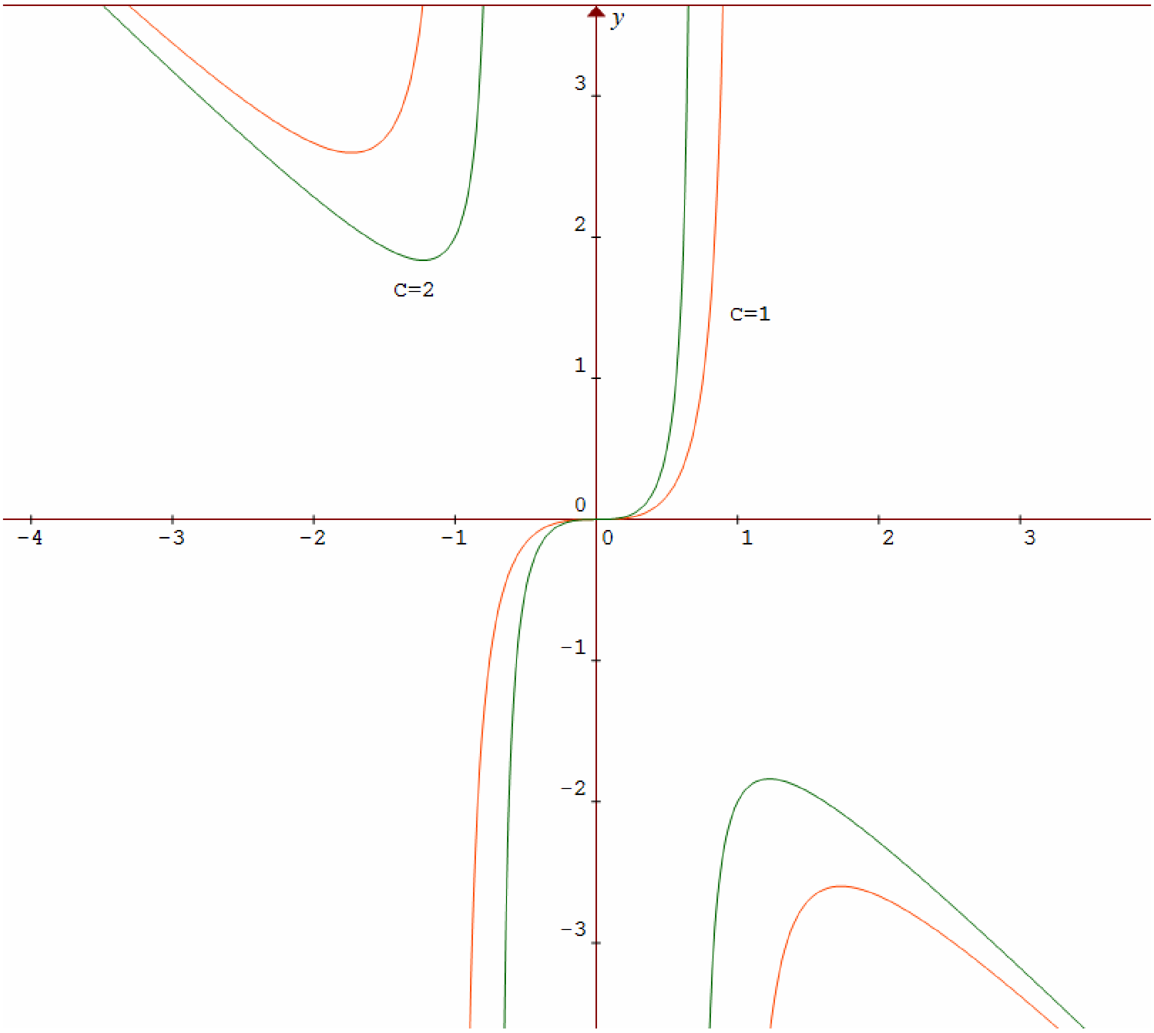
Problema 5.- Resolver

$$x^2 dy - \left(2xy + 2y^2\right) dx = 0$$

Solución

Reemplazando $y = vx$ y separando $\dfrac{dv}{v(1+v)} = 2\dfrac{dx}{x}$ integrando se tiene

$\ln\left(\dfrac{v}{1+v}\right) = 2\ln x + \ln C$ y como $v = \dfrac{y}{x}$ se llega finalmente a $y = \dfrac{Cx^3}{1-Cx^2}$

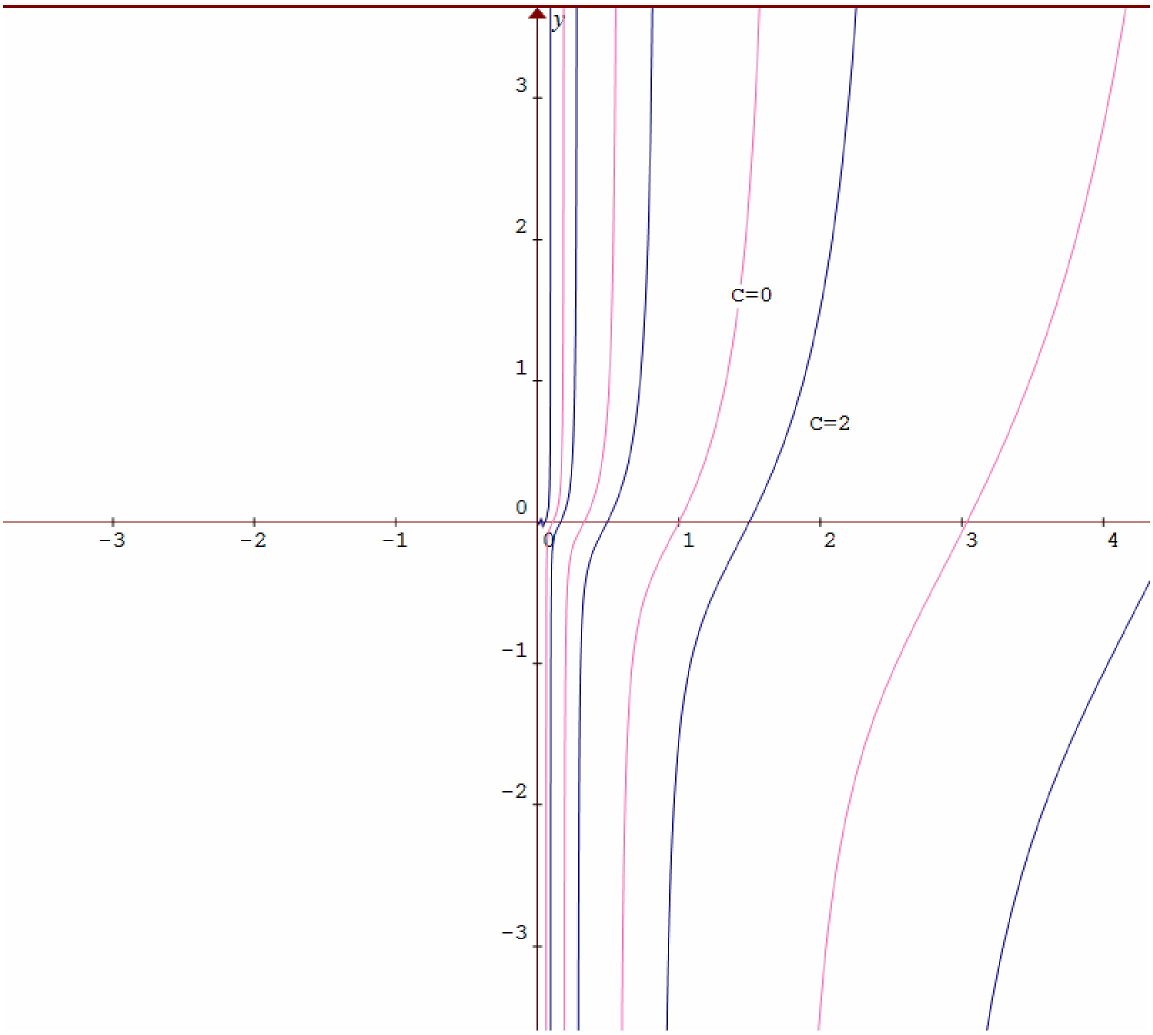


Problema 6.- Resolver

$$\left(xy+4y^2+2x^2\right)dx-x^2dy=0$$

Solución

Haciendo $y=vx$, reemplazando y separando $\dfrac{dv}{4\left(v^2+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{dx}{x}$, integrando llegamos a $v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}tg\left(\dfrac{4\ln x}{\sqrt{2}}+C\right)$ así $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}tg\left(\dfrac{4\ln x}{\sqrt{2}}+C\right)$

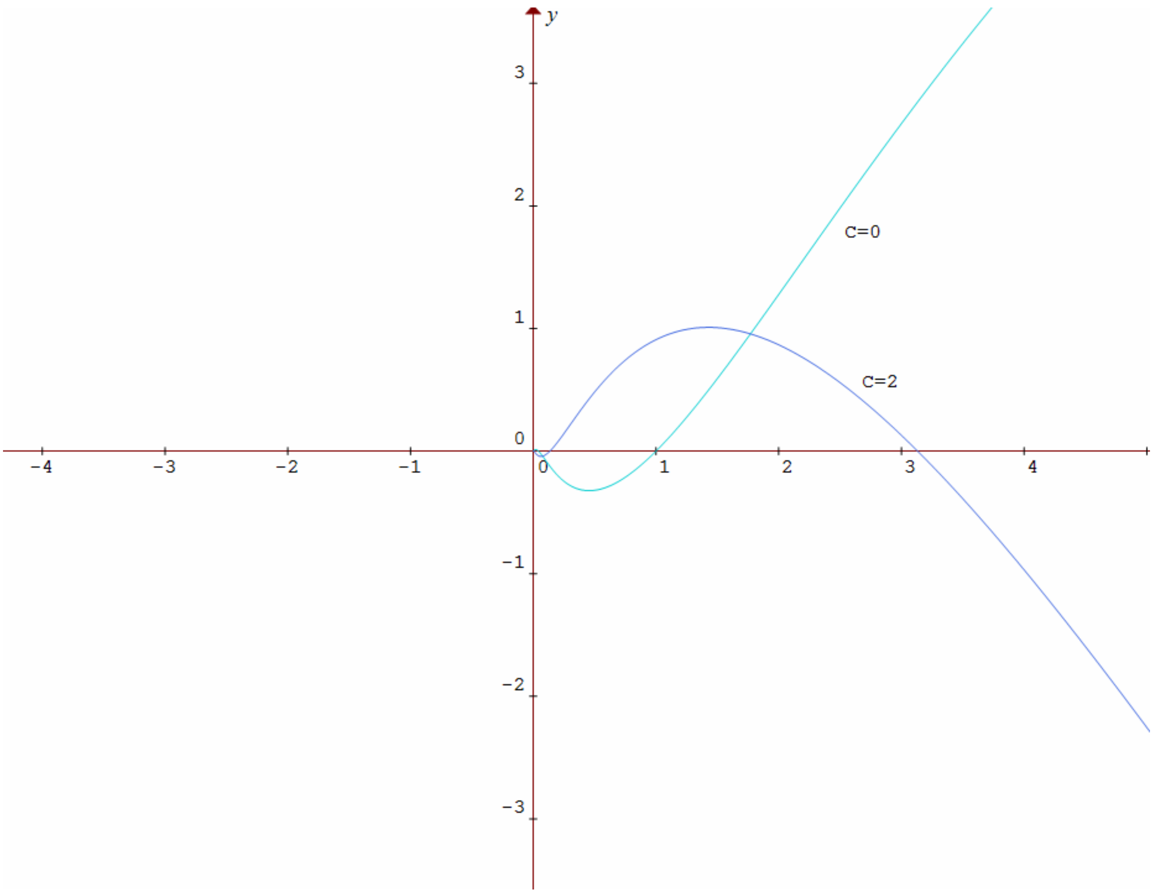


Problema 7.- Resolver

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

Solución

Haciendo el reemplazo $y = vx$ y separando se tiene $\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$ integrando se tiene $v = sen(\ln x + C)$ de donde $y = xsen(\ln x + C)$



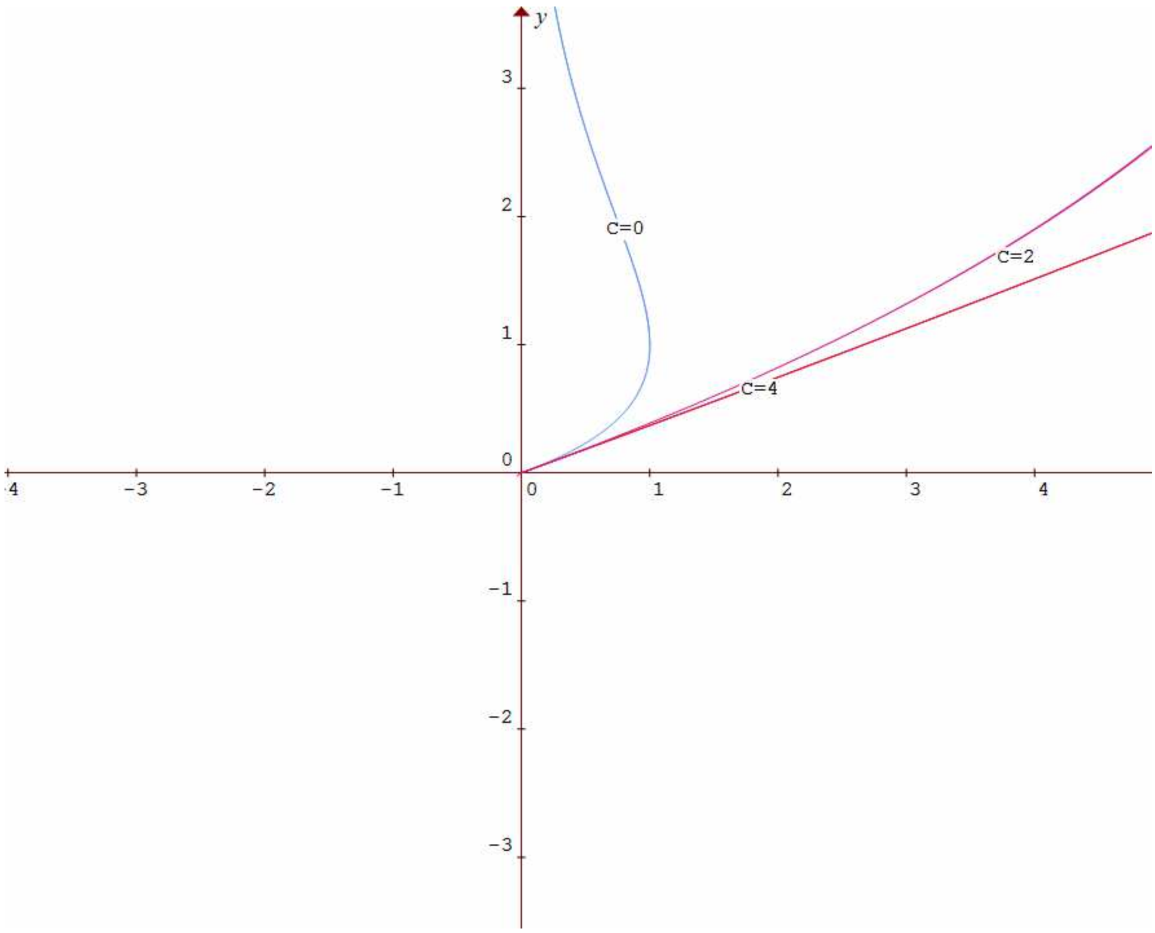
Problema 8.- Resolver

$$x\left(\ln\frac{y}{x}\right)dy - ydx = 0$$

Solución

Haciendo $y = vx$ reemplazando y separando llegamos a $\dfrac{\ln v}{v(1+\ln v)}dv = -\dfrac{dx}{x}$

integrando se llega a $\ln v - \ln(1+\ln v) = -\ln x + C$ o $\ln\dfrac{y}{x} - \ln\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right) = -\ln x + C$

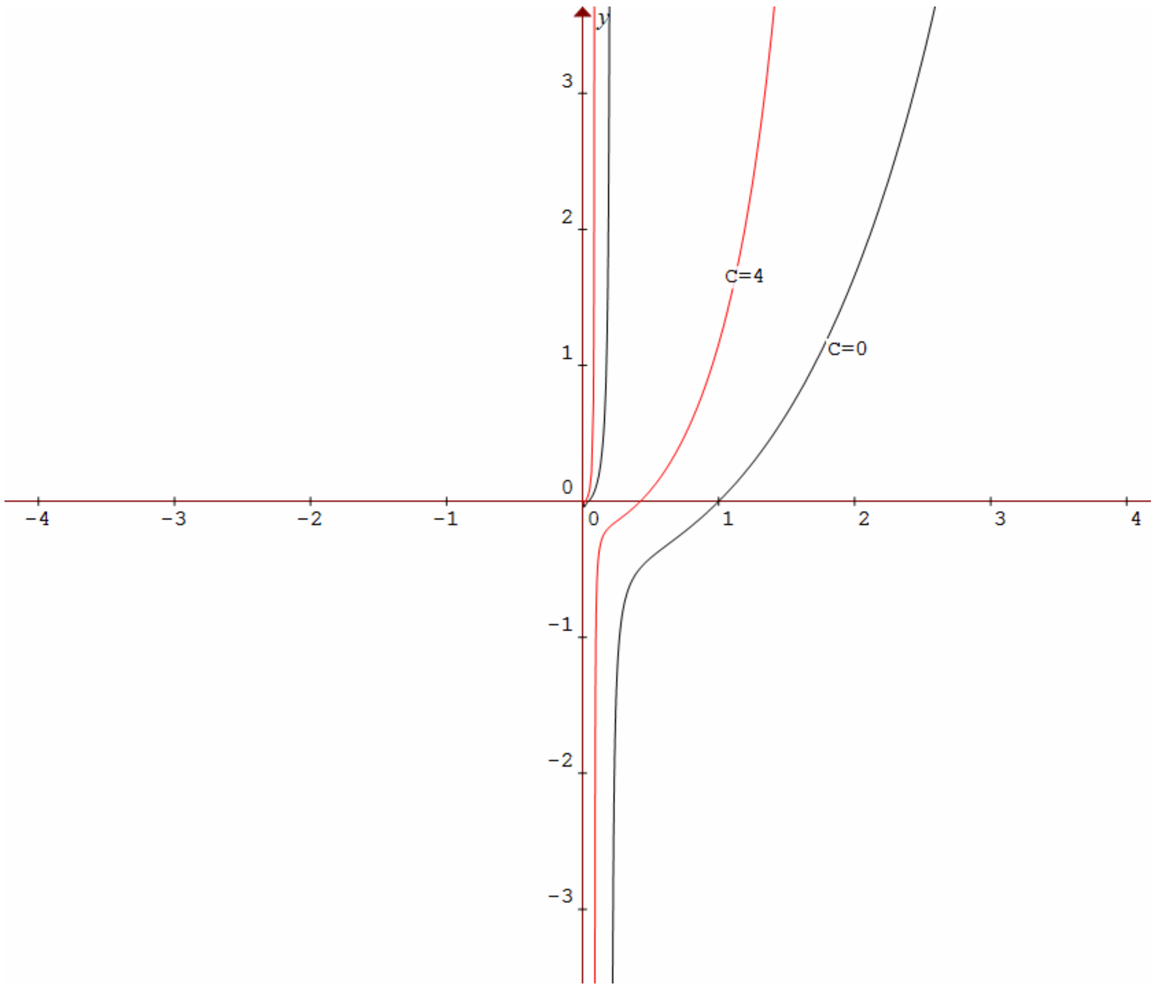


Problema 9.- Resolver

$$\left(xy+y^2+x^2\right)dx-x^2dy=0$$

Solución

Haciendo $y=vx$ reemplazando y separando se llega a $\dfrac{dv}{v^2+1}=\dfrac{dx}{x}$ integrando se tiene $v=tg\left(\ln x+C\right)\rightarrow y=xtg\left(\ln x+C\right)$



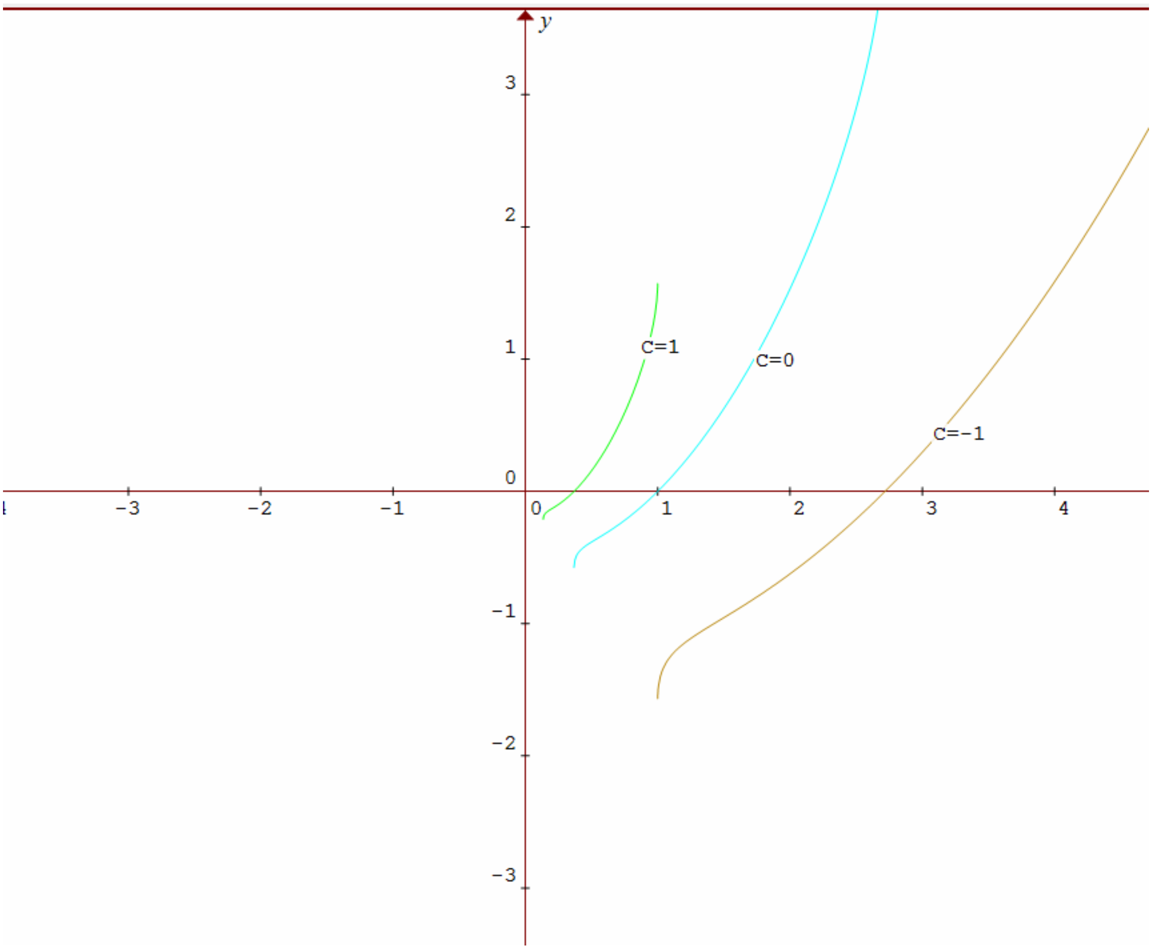
Problema 10.- Resolver

$$xdy = \left(x \sec \frac{y}{x} + y \right) dx$$

Solución

Haciendo $y = vx$ reemplazado y separando se tiene

$$\cos v dv = \frac{dx}{x} \rightarrow senv = \ln x + C \rightarrow sen \frac{y}{x} = \ln x + C$$

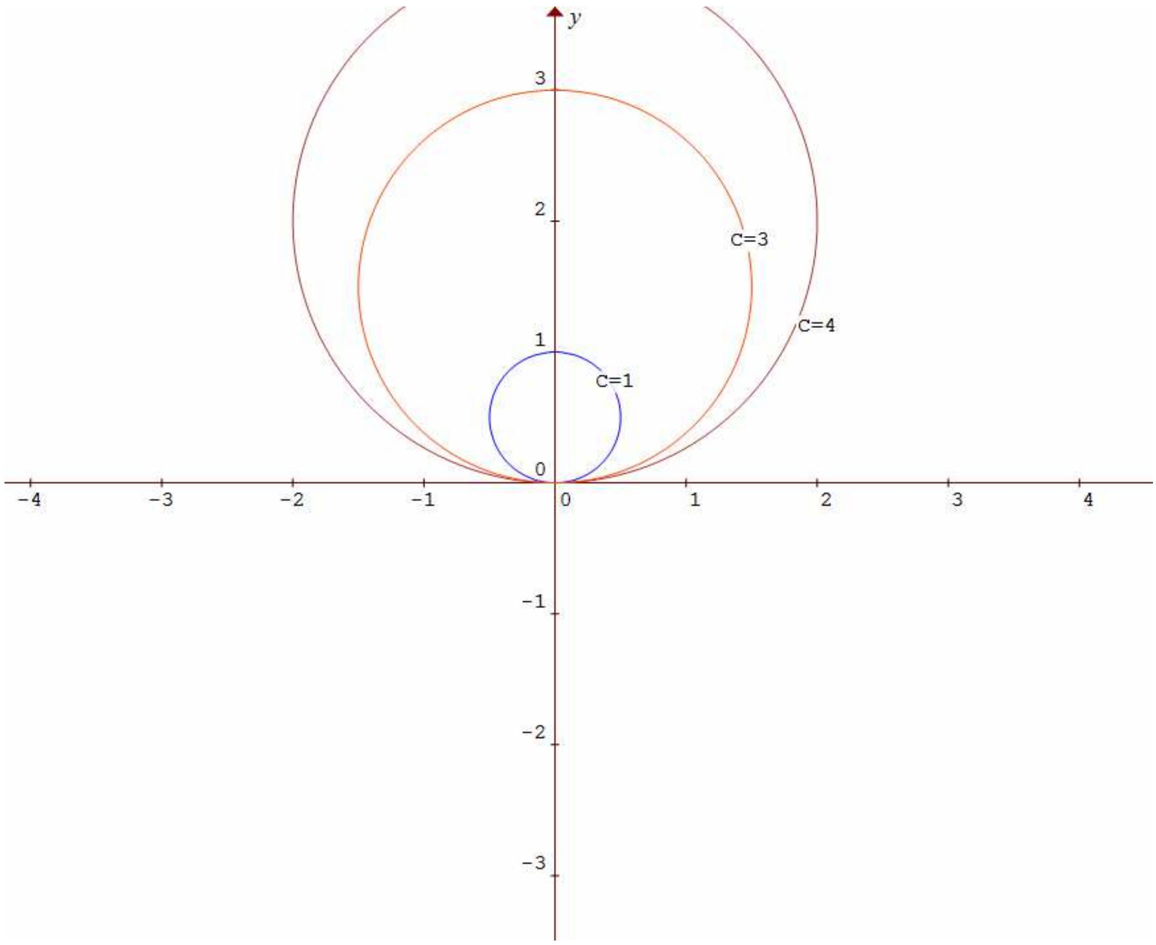


Problema 11.- Resolver

$$2xydx-\left(x^2-y^2\right)dy=0$$

Solución

Hacemos $y=vx$ reemplazamos y separamos $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{v^2-1}{v\left(1+v^2\right)}dv=0$ integrando se tiene $x\left(v^2+1\right)=Cv\rightarrow y^2+x^2=Cy$

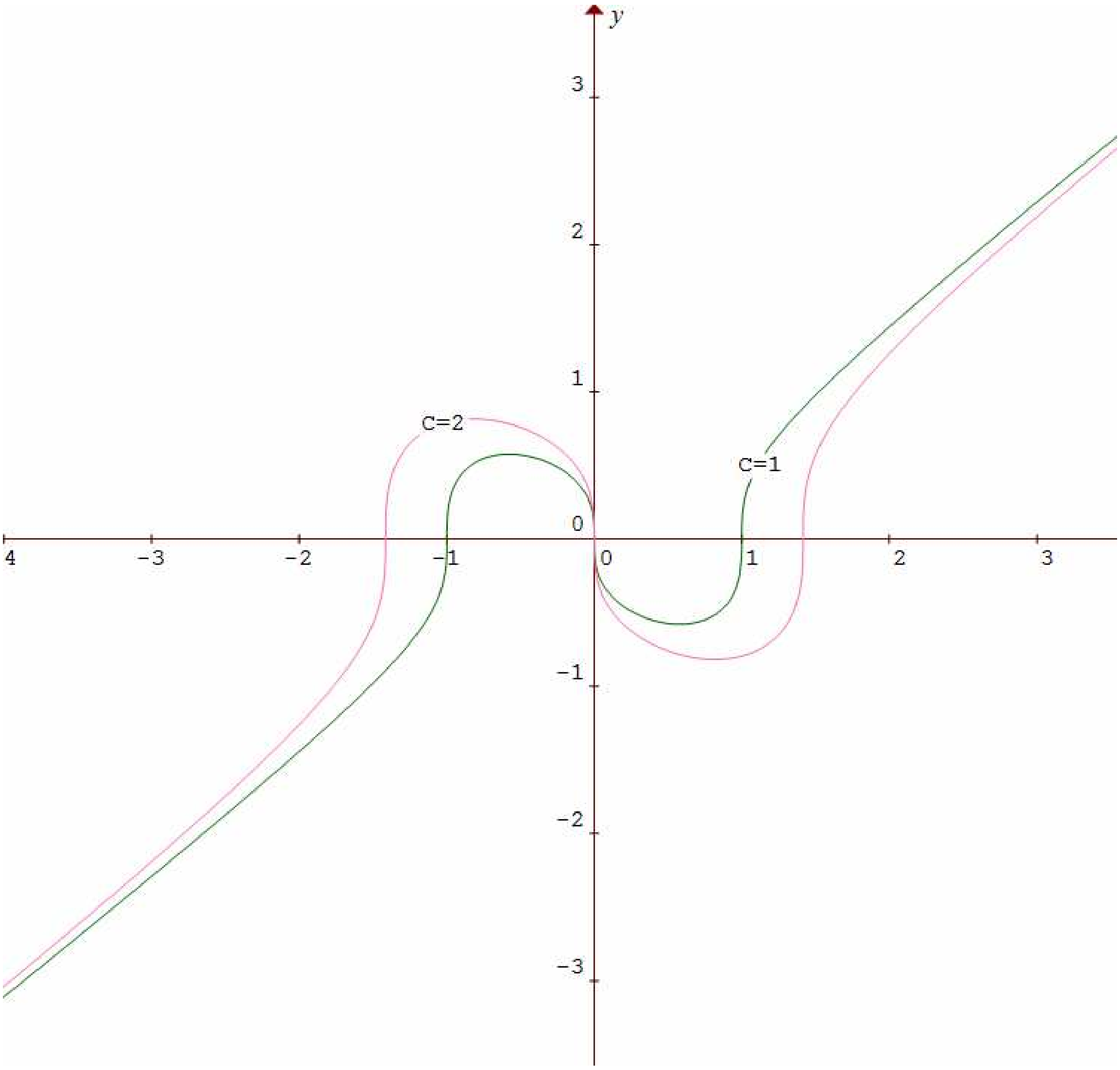


Problema 12.- Resolver

$$\left(x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$$

Solución

Haciendo $y=vx$ reemplazando y separando se tiene $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{3v^2}{1-2v^2}dv=0$ integrando llegamos a $x^2\left(1-2v^3\right)=C \rightarrow x^3-2y^3=Cx$

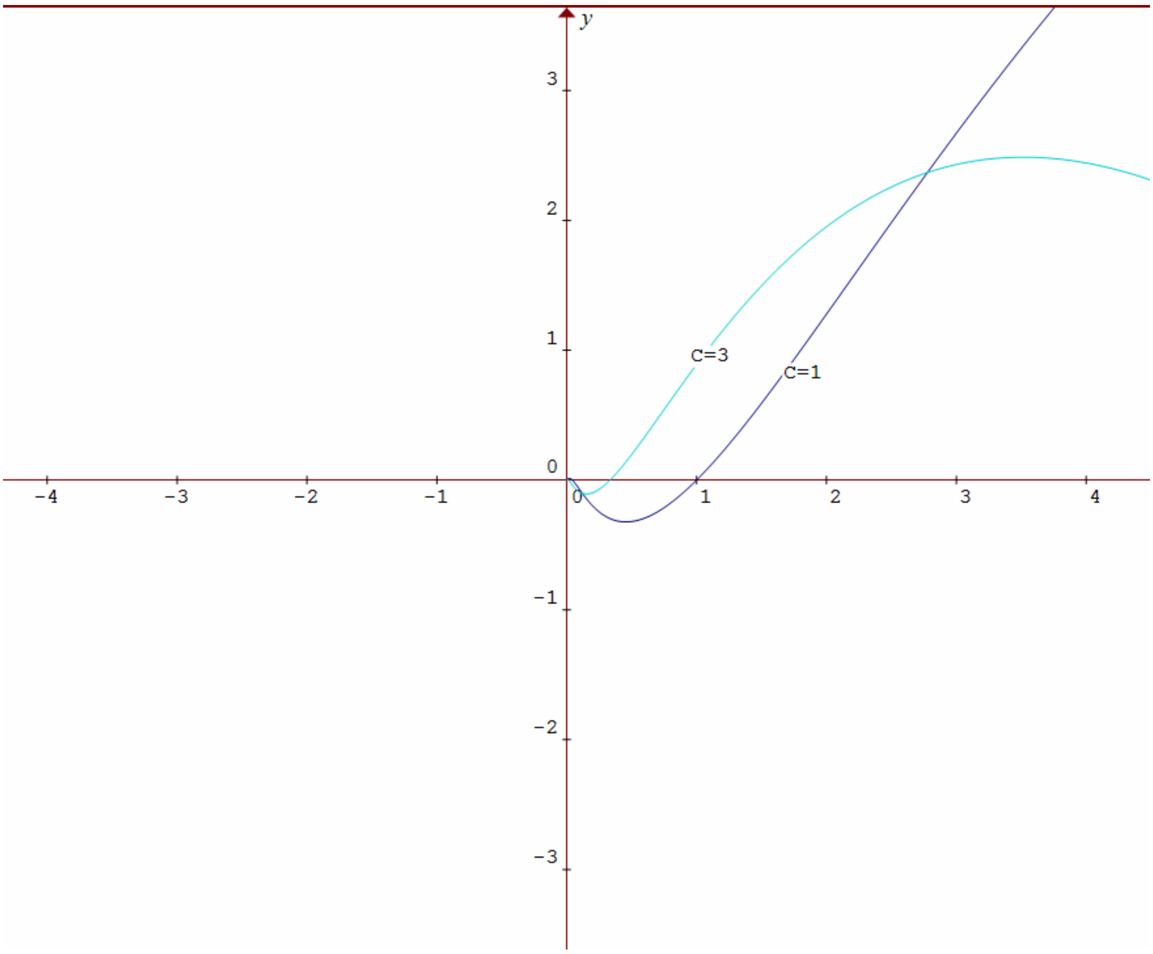


Problema 13.- Resolver

$$xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$$

Solución

Hacemos $y = vx$ reemplazando y separando se tiene $\dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}} - \dfrac{dx}{x} = 0$ integrando se tiene $arcsen\dfrac{y}{x} = \ln Cx \rightarrow cx = e^{arcsen\frac{y}{x}}$



Problema 14.- Resolver

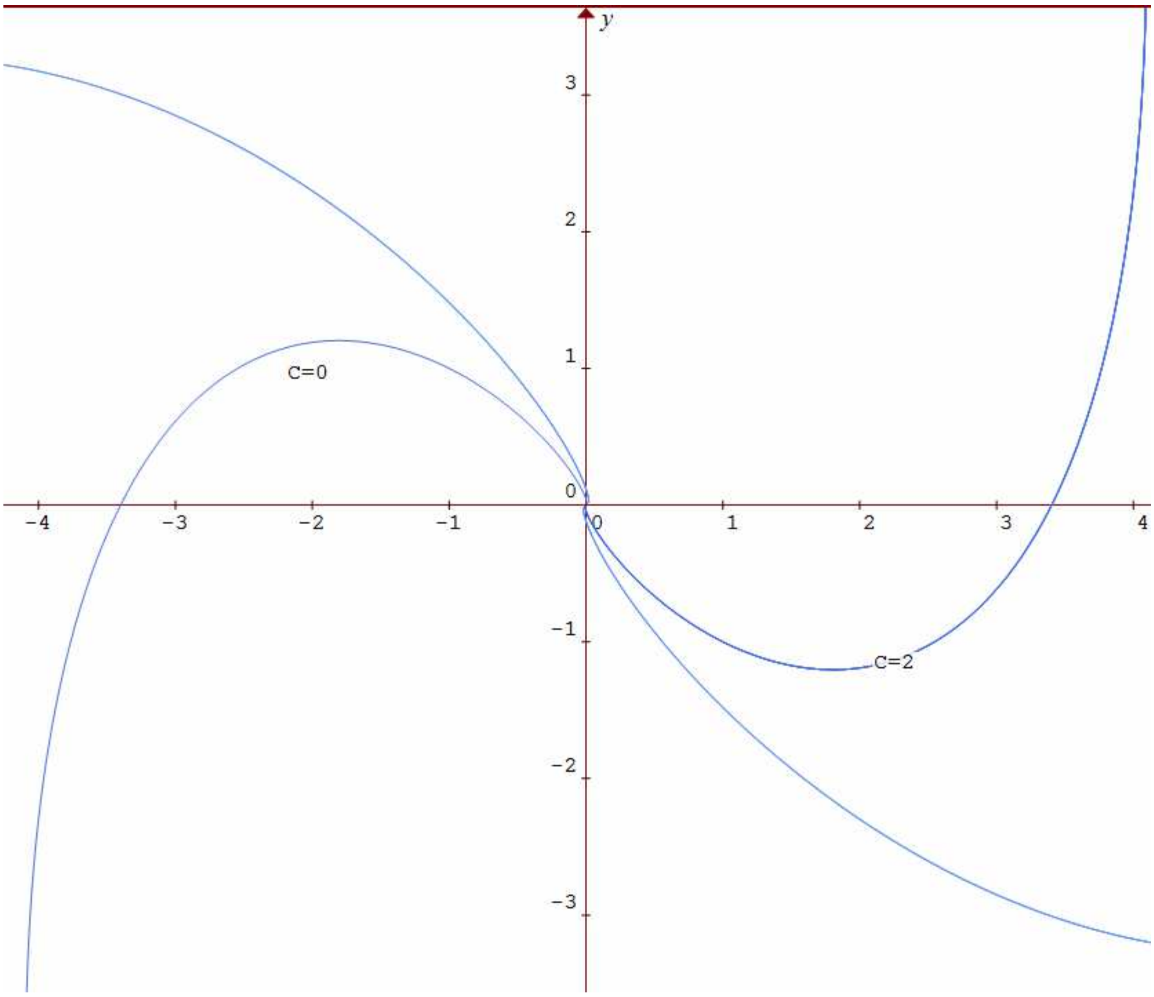
$$(2x+3y)dx+(y-x)dy=0$$

Solución

Hacemos $y=vx$ reemplazamos y separamos

$\frac{dx}{x}+\frac{v-1}{v^2+2v+2}dv=0$ integrando y reemplazando $v=\frac{y}{x}$ llegamos a

$$\ln\left(y^2+2xy+2x^2\right)-4arctg\left(\frac{y+x}{x}\right)=C$$

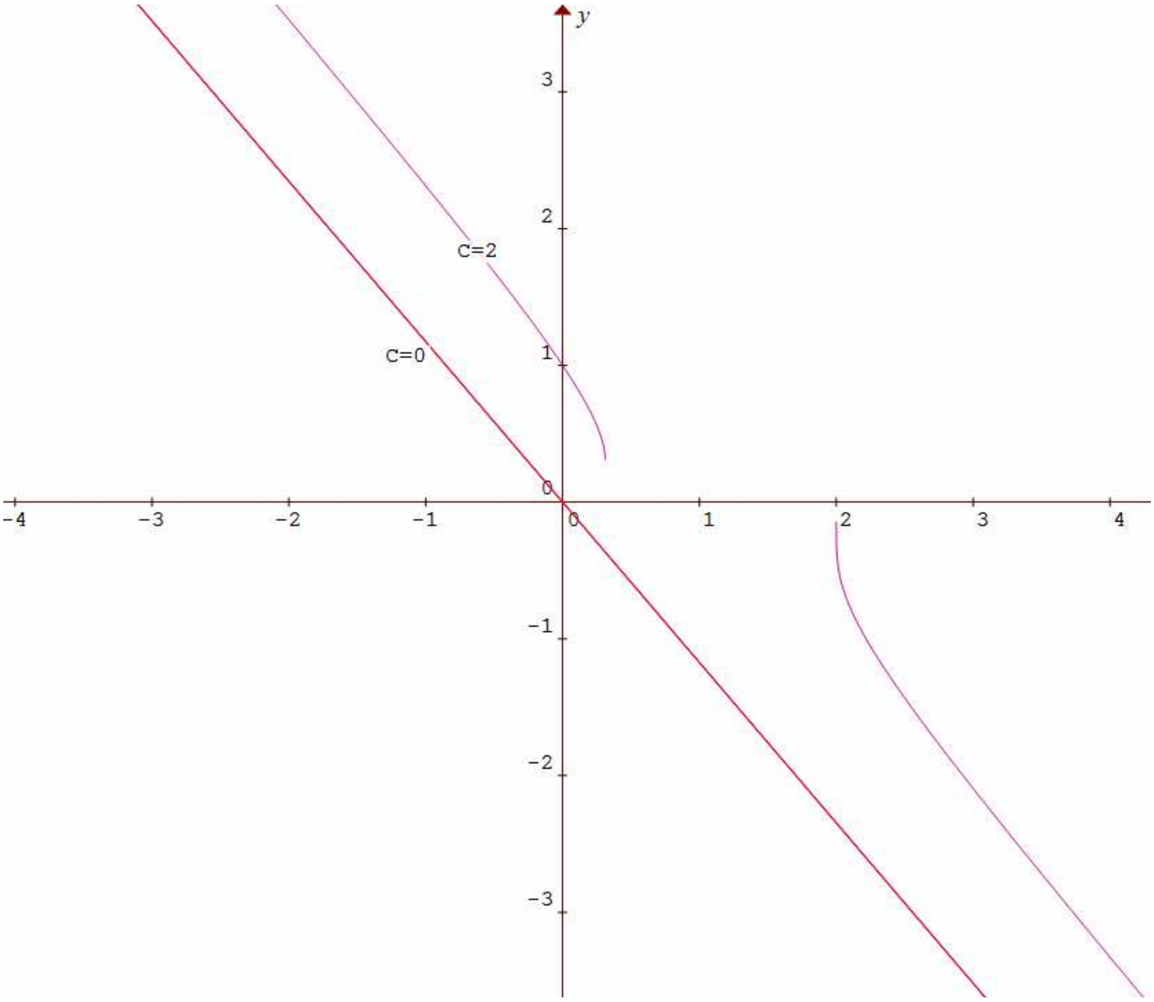


Problema 15.- Resolver

$$\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)d=0$$

Solución

Hacemos $x=vy$ reemplazamos y separamos $\frac{dy}{y}+\frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}dv=0$ integrando y reemplazando $v=xy$ se tiene $x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$

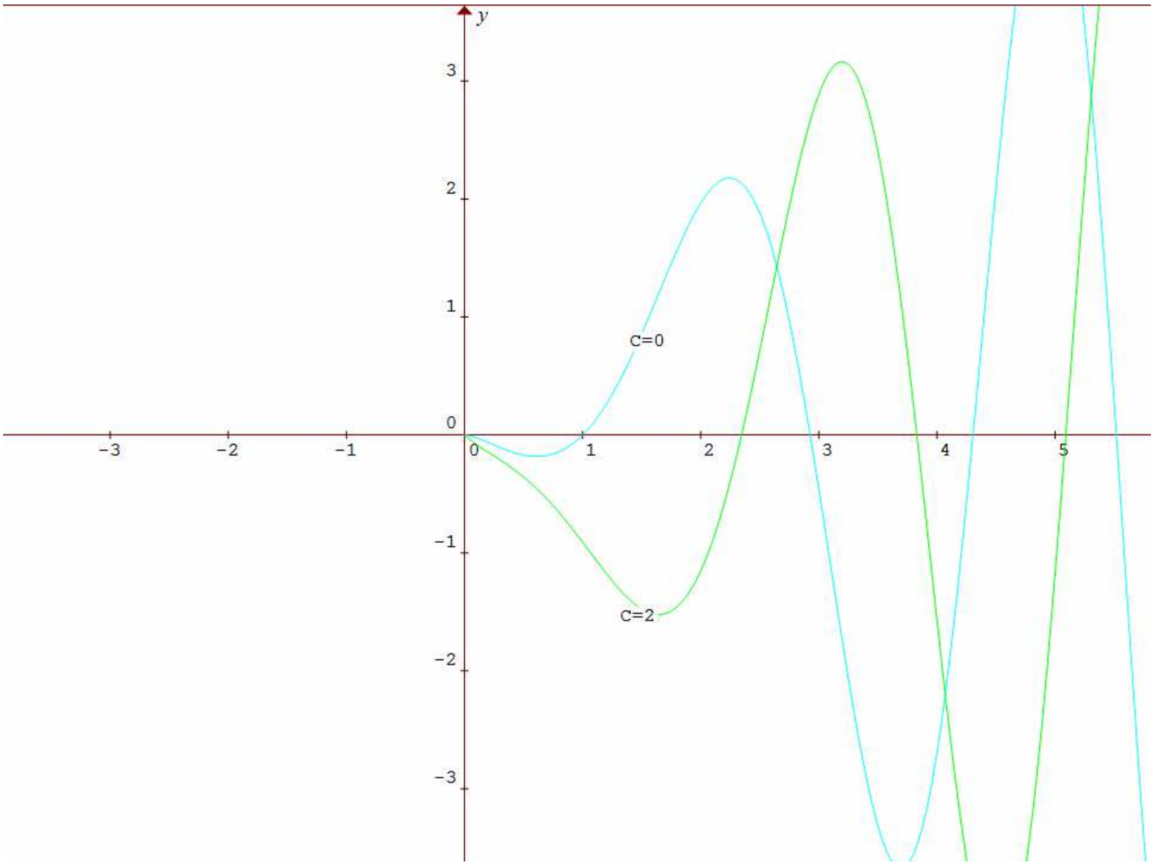


Problema 16.- Resolver

$$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-xdy=0$$

Solución

Hacemos $y=vx$ reemplazamos y separamos $\frac{dx}{x}=\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$ integrando y reemplazando $v=\frac{y}{x}$ tenemos $x\ln x=arcsen\frac{y}{x}+C$

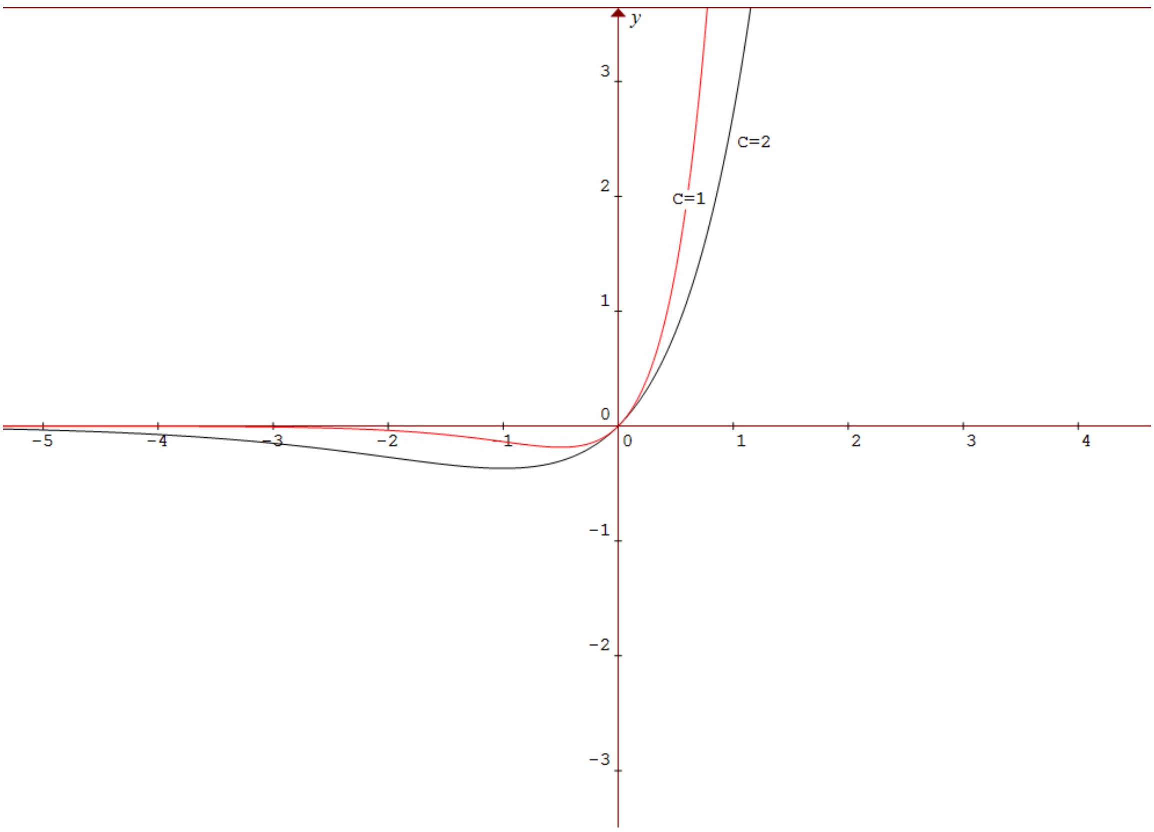


Problema 17.- Resolver

$xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$

Solución

Haciendo $y = vx$ reemplazando y separando se tiene $\frac{dv}{v \ln v} - \frac{dx}{x} = 0$ integrando y reemplazando $v = \frac{y}{x}$ tenemos $y = xe^{Cx}$

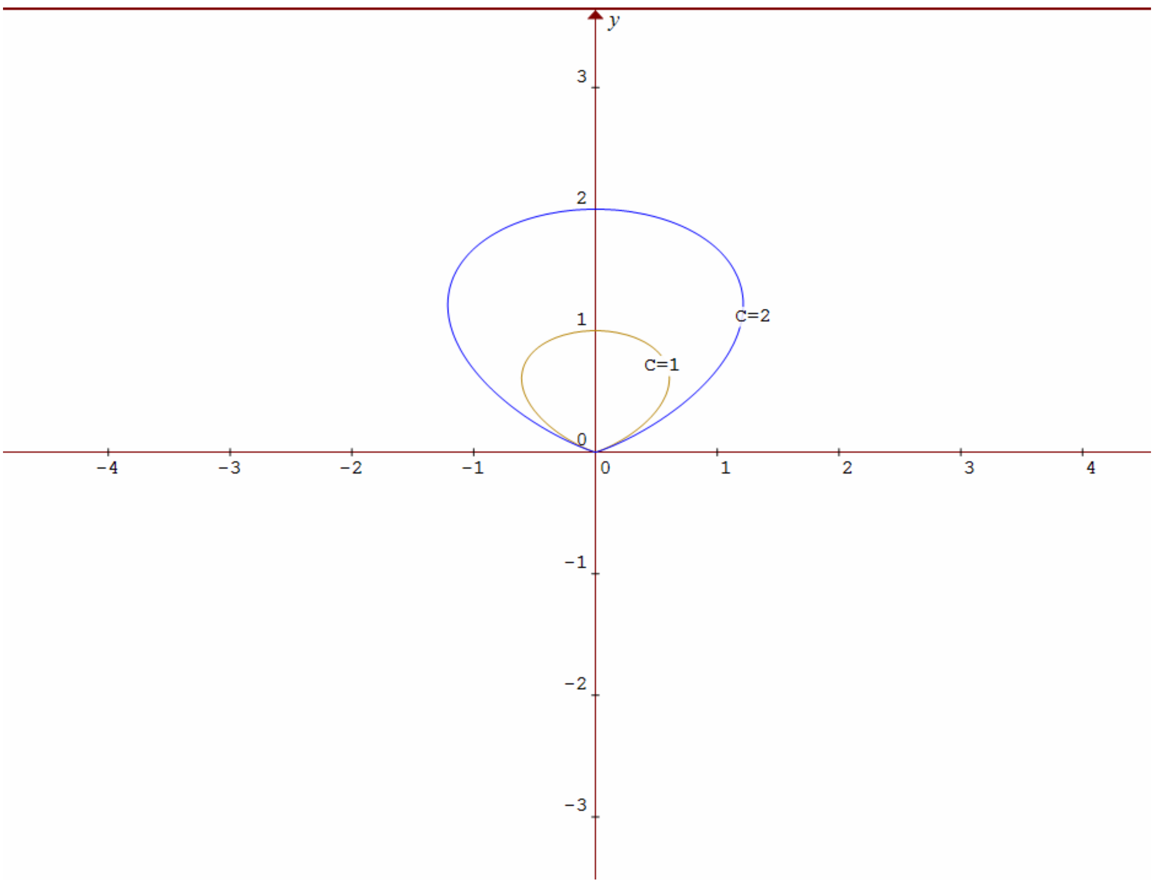


Problema 18.- Resolver

$$xydx+\left(y^2-x^2\right)dy=0$$

Solución

Hacemos $y=vx$ reemplazamos y separamos $\frac{v^2-1}{v^3}dv+\frac{dx}{x}=0$ integrando y reemplazando $v=\frac{y}{x}$ tenemos $x^2+2y^2\ln\frac{y}{C}=0$

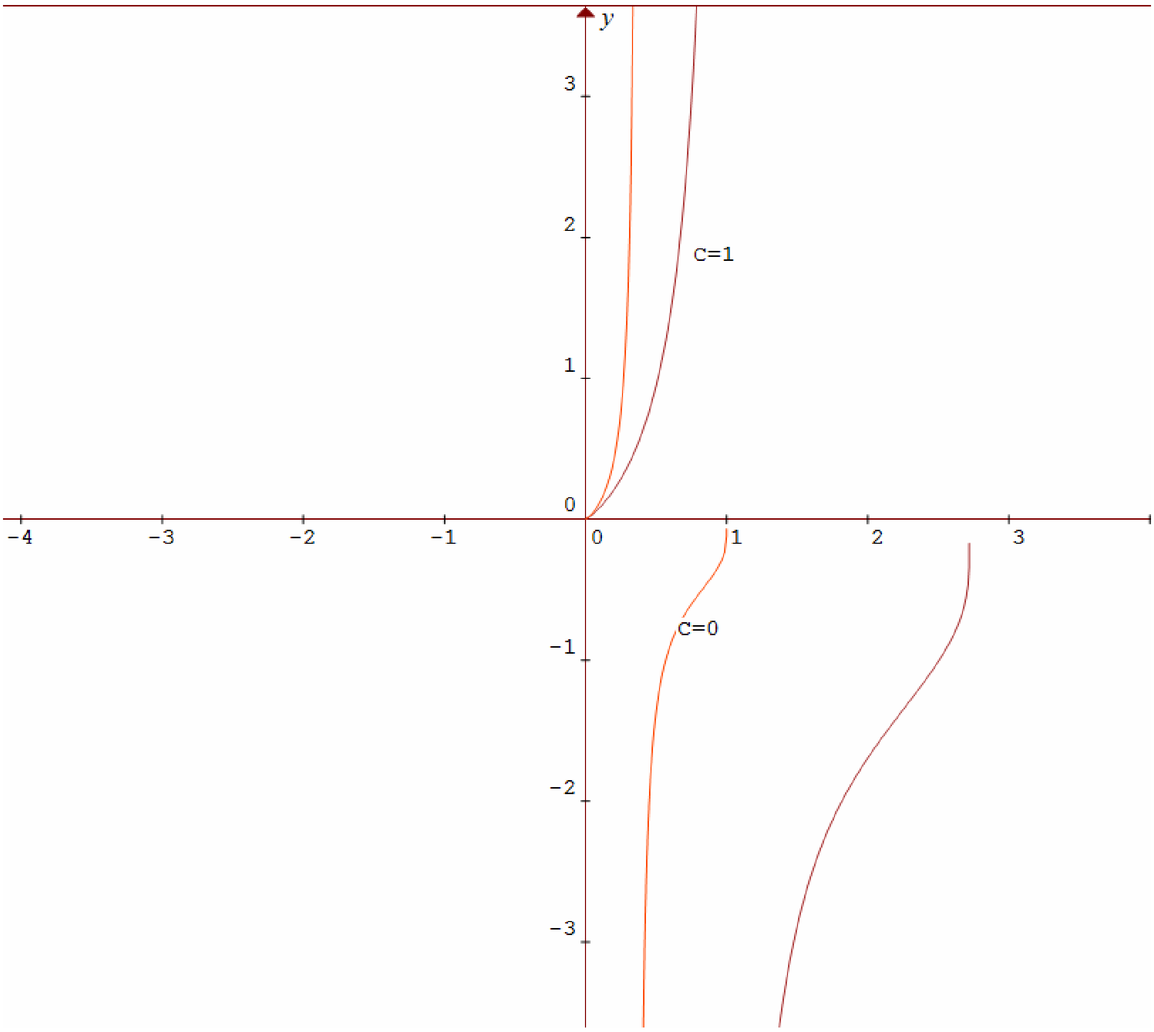


Problema 19.- Resolver

$$\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^{2}\right)dx-x^{2}e^{\frac{x}{y}}dy=0$$

Solución

Hacemos $x=vy$ reemplazamos y separamos $\frac{dy}{y}-\frac{\left(ve^{v}-1\right)dv}{v}=0$ integrando y reemplazando $v=\frac{x}{y}$ tenemos $\ln x+e^{\frac{x}{y}}=C$

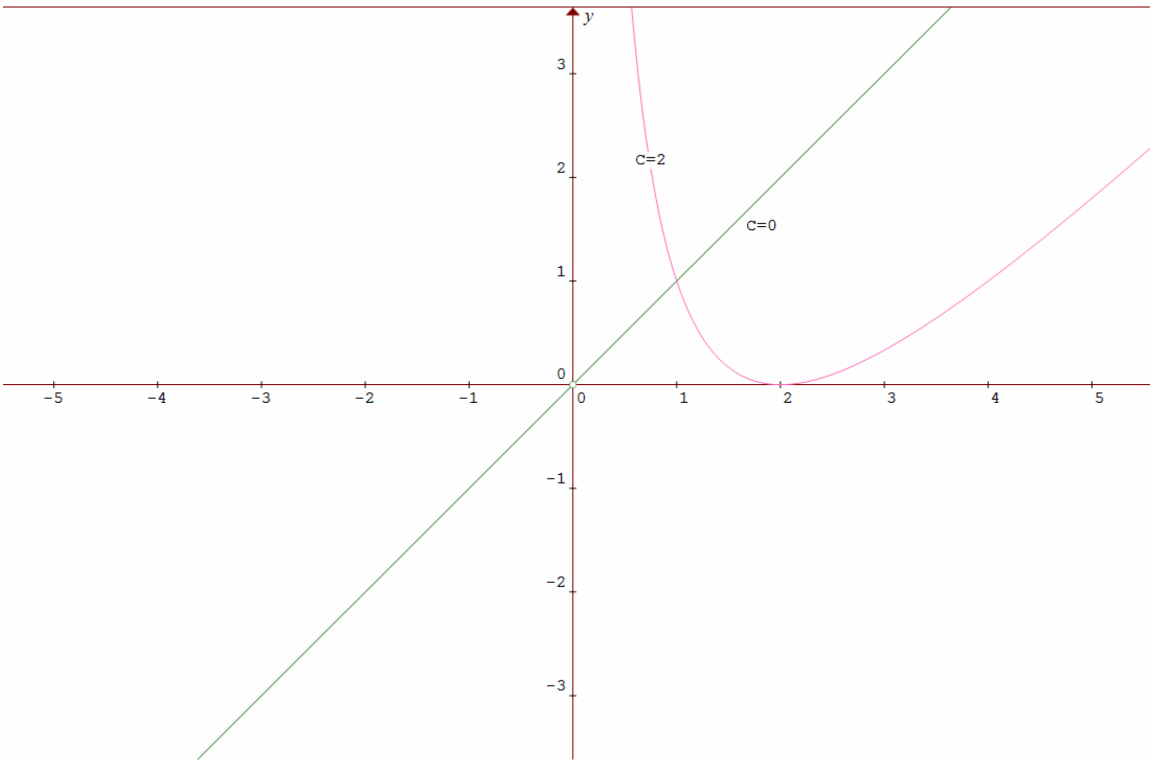


Problema 20.- Resolver

$\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx-xdy=0$

Solución

Hacemos $y=vx$ reemplazamos y separamos $\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\frac{dv}{\sqrt{v}-v}$ integrando y reemplazando $v=\frac{y}{x}$ se tiene $x\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=C \rightarrow x-\sqrt{xy}=C$ x



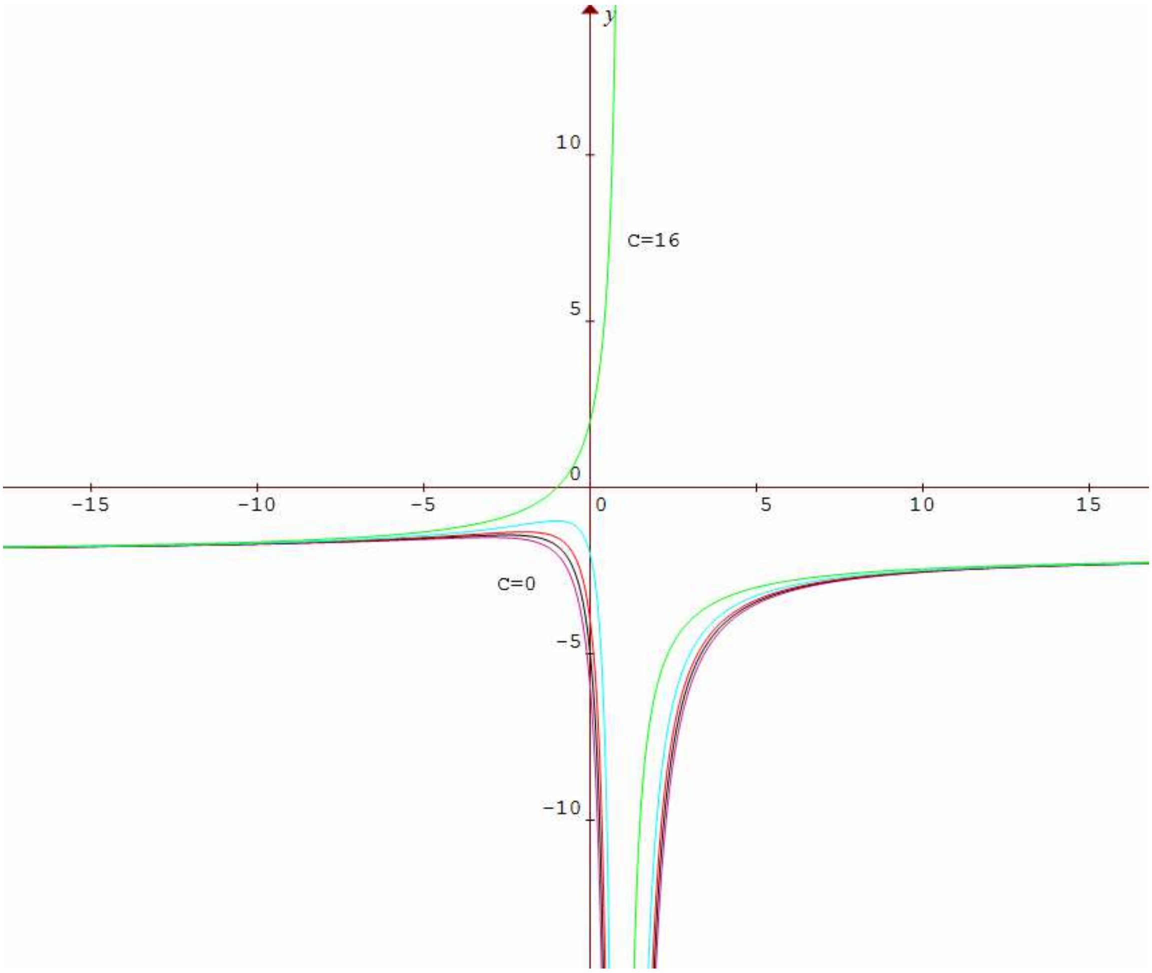
Ecuaciones Reducibles a Homogéneas y otras sustituciones

Problema 1.- Resolver

$$(-3x+y+6)dx+(x+y+2)dy=0$$

Solución

Primero resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{l}-3x+y+6=0\\ x+y+2=0\end{array}\right| \rightarrow x=1, y=-3$. Ahora hacemos $v=x-1, w=y+3$ y reemplazamos, nos queda $(-3v+w)dv+(v+w)dw=0$ que es una ecuación homogénea y cuya solución es $w^2+2vw-3v^2=C$ y reemplazando por las variables originales se tiene $(y+3)^2+2(x-1)^2(y+3)-3(x-1)^2=C$.



Problema 2.- Resolver

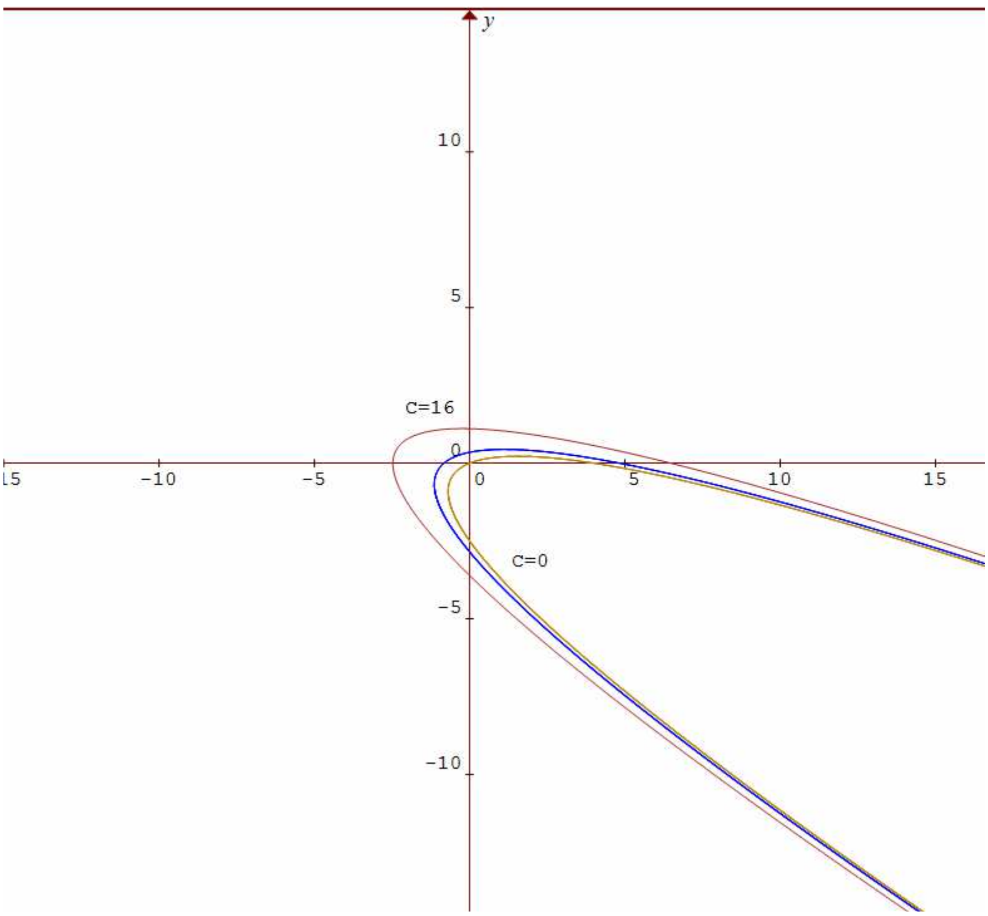
$$(x+2y-2)\,dx+(2x+4y+5)\,dy=0$$

Solución

En este caso, no hay solución del sistema y hacemos

$$z=x+2y \rightarrow y=\frac{z-x}{2} \rightarrow dy=\frac{dz-dx}{2}$$

y reemplazamos y reducimos, nos queda $(2z+5)\,dz=9dx$ de donde resulta $(x+2y)^2+5(x+2y)=9x+C$.

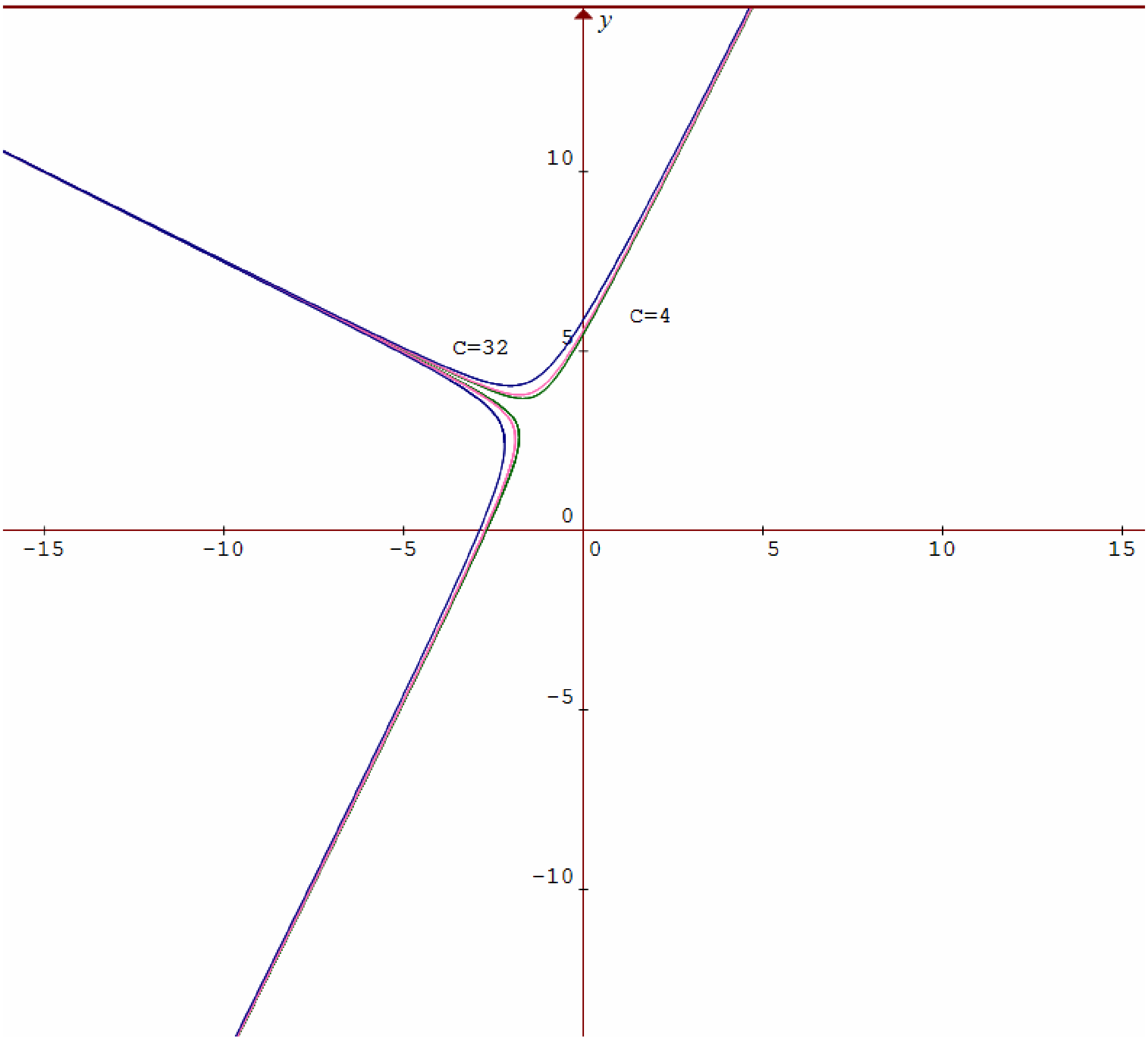


Problema 3.- Resolver

$$\left(-x+2y-7\right)dy-\left(2x+2y-4\right)dx=0$$

Solución

El sistema $\left.\begin{array}{l}-x+2y-7=0\\ 2x+2y-4=0\end{array}\right|$ tiene la solución $x=-1, y=3$ y reemplazamos, nos queda, haciendo $x=u-1, y=v+3$, $\left(-u+2v\right)dv-\left(2u+2v\right)du=0$ que es homogénea y cuya solución es $\left(2v+u\right)^2\left(v-2u\right)^3=C$ y volviendo a las variables originales nos queda $\left(2y+x-5\right)^2\left(y-2x-5\right)^3=C$.



Problema 4.- Resolver

$$\left(3y-7x+7\right)dx-\left(3x-7y-3\right)dy=0$$

Solución

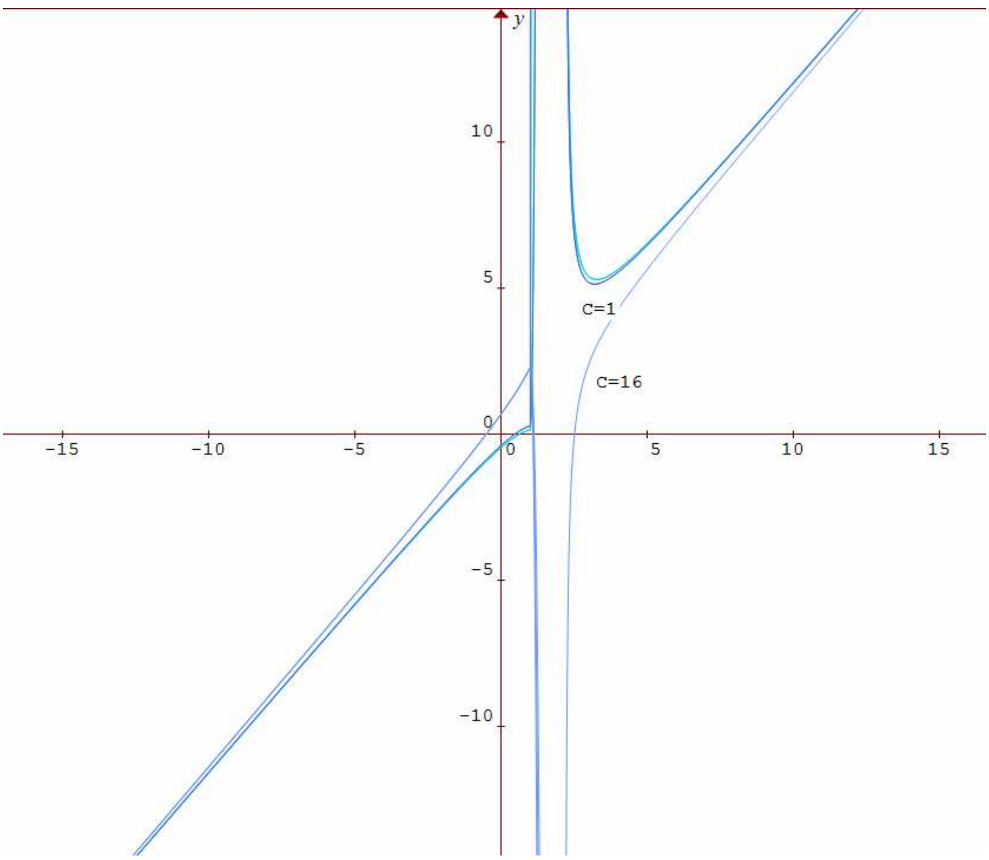
El sistema $\left.\begin{matrix}3y-7x+7=0\\3x-7y-3=0\end{matrix}\right|$ tiene la solución $x=0, y=1$ y hacemos

$x=u+1, y=v+0, dx=du, dy=dv$ reemplazando nos queda

$\left(-3u+7v\right)dv=\left(-7u+3v\right)du$ que es homogénea.

Resolviéndola y volviendo a las variables originales se tiene

$$7\left(\frac{y}{x-1}\right)^2-6\frac{y}{x-1}+7=\frac{C}{\left(x-1\right)^2}$$



Problema 5.- Resolver

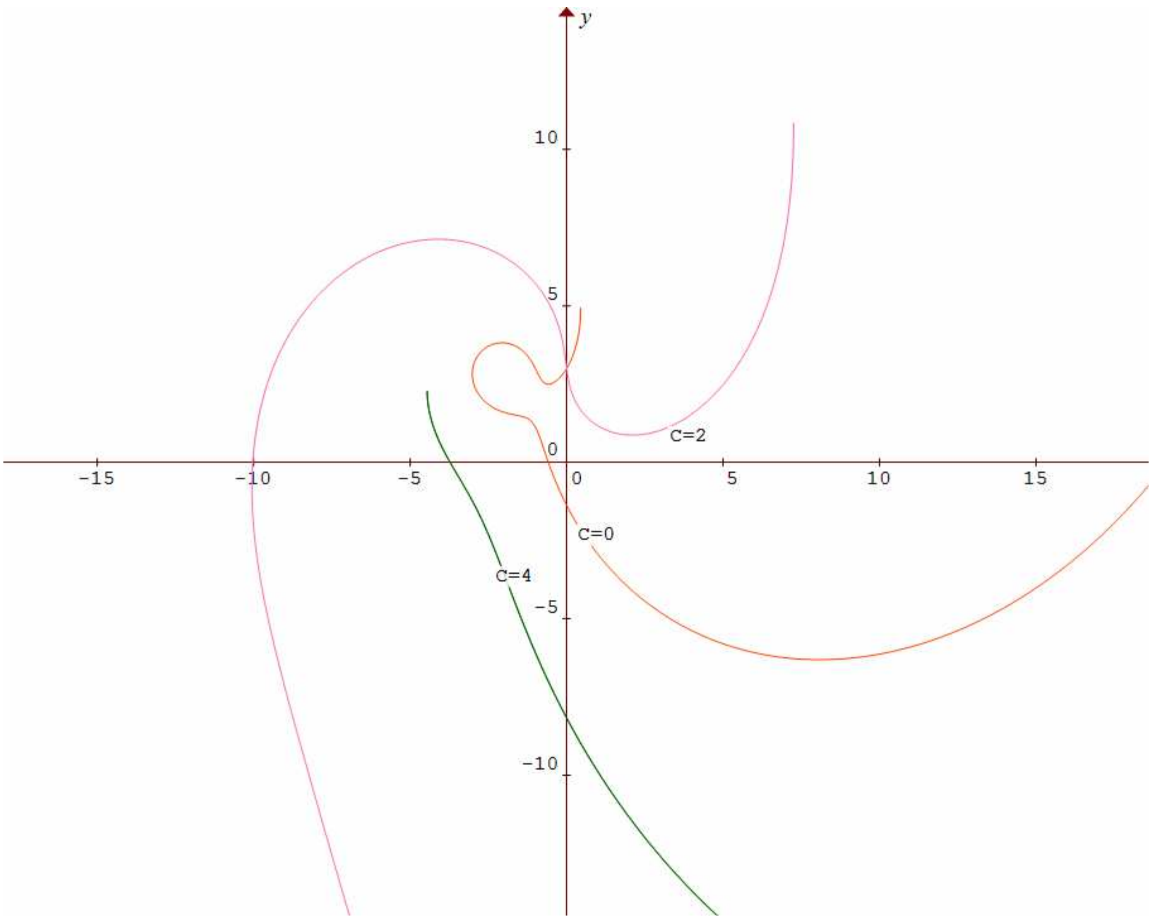
$$\left(y-x-5\right)dy-\left(1-x-y\right)dx=0$$

Solución

El sistema $\left.\begin{array}{l} y-x-5=0 \\ 1-x-y=0 \end{array}\right|$ tiene la solución $x=-2, y=3$ hacemos $x=u-2, y=v+3$ y reemplazamos, nos queda $\left(-u+v\right)dv=-\left(u+v\right)du$ que es homogénea.

Resolviéndola y volviendo a las variables originales se obtiene finalmente

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2+1\right)-arctg\left(\frac{y-3}{x+2}\right)=-\ln\left(x+2\right)+C.$$



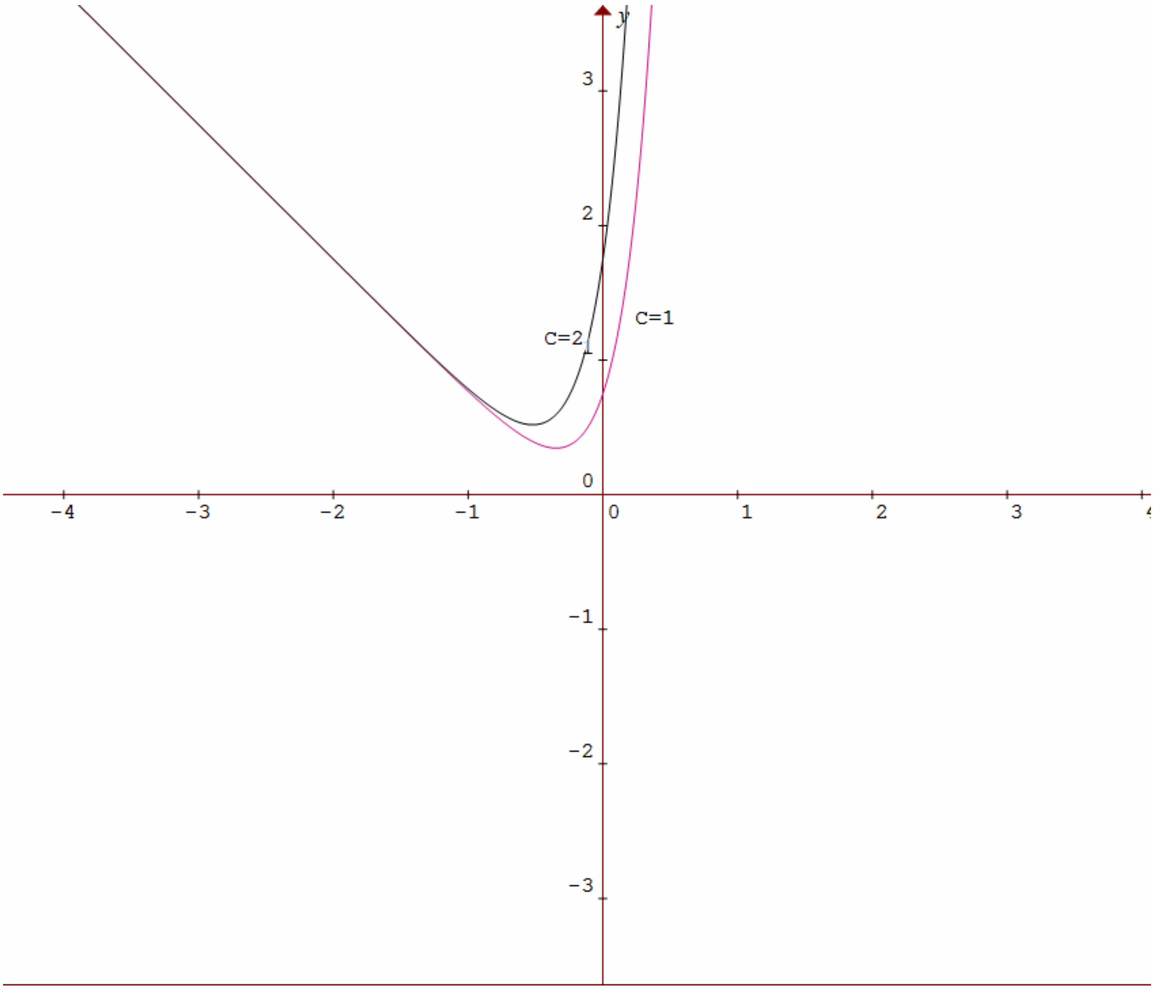
Problema 6.- Resolver

$$y' = (x+y+1)^2 - (x+y-1)^2$$

Solución

Desarrollando queda $\frac{dy}{dx} = 4(x+y)$ hacemos $z = x+y \rightarrow y = z-x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$ $\rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = 4z \rightarrow \frac{dz}{4z+1} = dx$ integrando resulta

$$z = Ce^{4x} - \frac{1}{4} \rightarrow x+y = Ce^{4x} - \frac{1}{4} \rightarrow y = Ce^{4x} - x - \frac{1}{4}$$



Problema 7.- Resolver

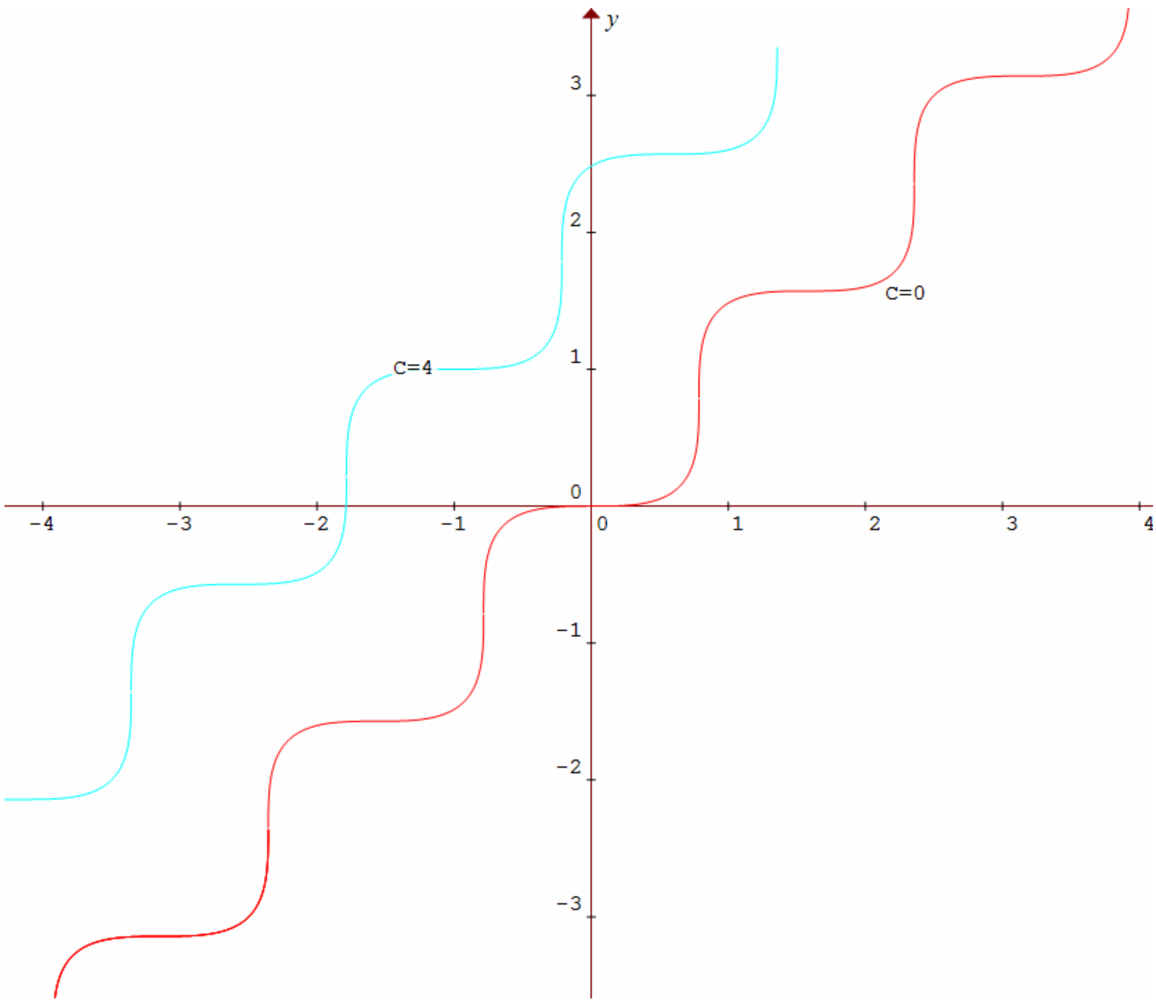
$$dy = tg^2(x+y)\,dx$$

Solución

Hacemos $z = x+y, y = z-x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \ \rightarrow \frac{dy}{dx} = tg^2 z = \frac{dz}{dx} - 1 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + tg^2 z = \sec^2 z$

$\rightarrow \frac{dz}{\sec^2 z} = dx$, de donde resulta, integrando $\frac{z}{2} + \frac{sen 2z}{4} = x + C$ o

$\frac{x+y}{2} + \frac{sen(2x+2y)}{4} = x + C' \ \rightarrow 2x + 2y + sen(2x+2y) = 4x + C$



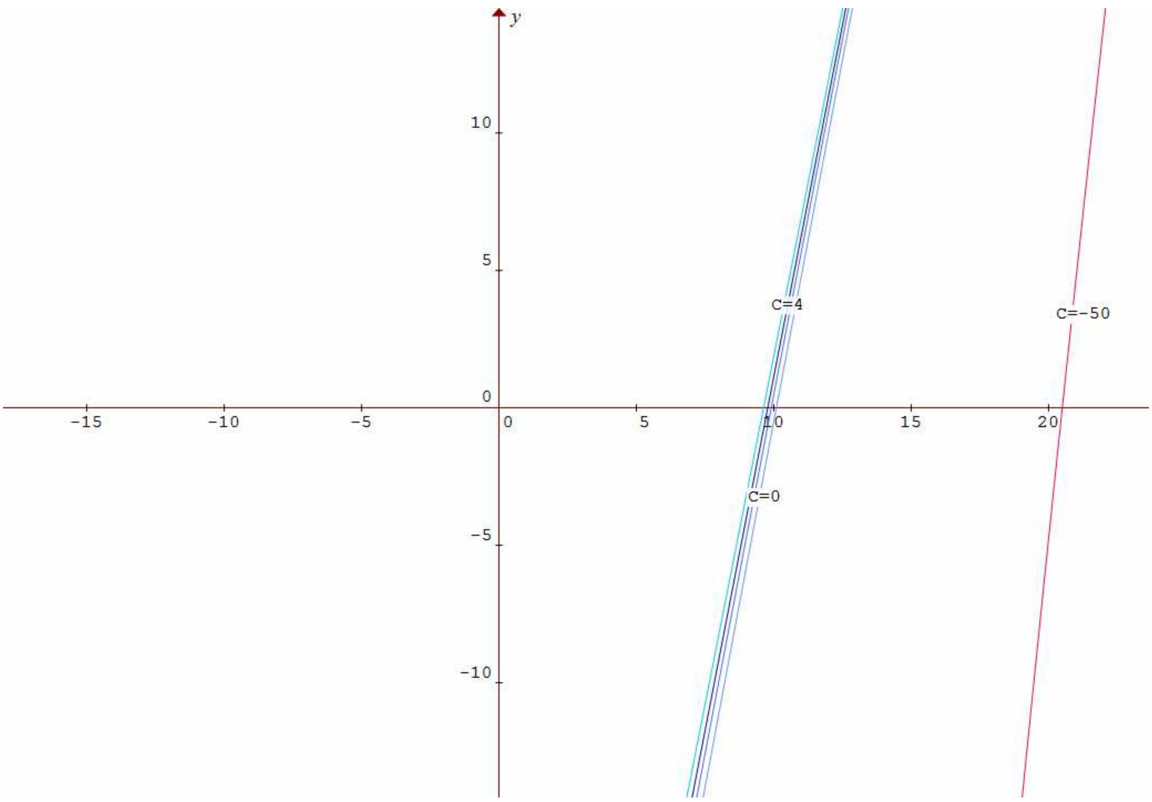
Problema 8.- Resolver

$$dy = \left(\sqrt{10x - 2y + 5} - 5\right) dx$$

Solución

$z = 10 - 2y \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5 - \dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} \rightarrow 5 - \dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{z+5} - 5 \rightarrow \dfrac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = dx$, integrando resulta, volviendo a las variables originales

$$-\sqrt{10x - 2y + 5} - 10\ln\left(\sqrt{10x - 2y + 5} - 10\right) = x + C$$



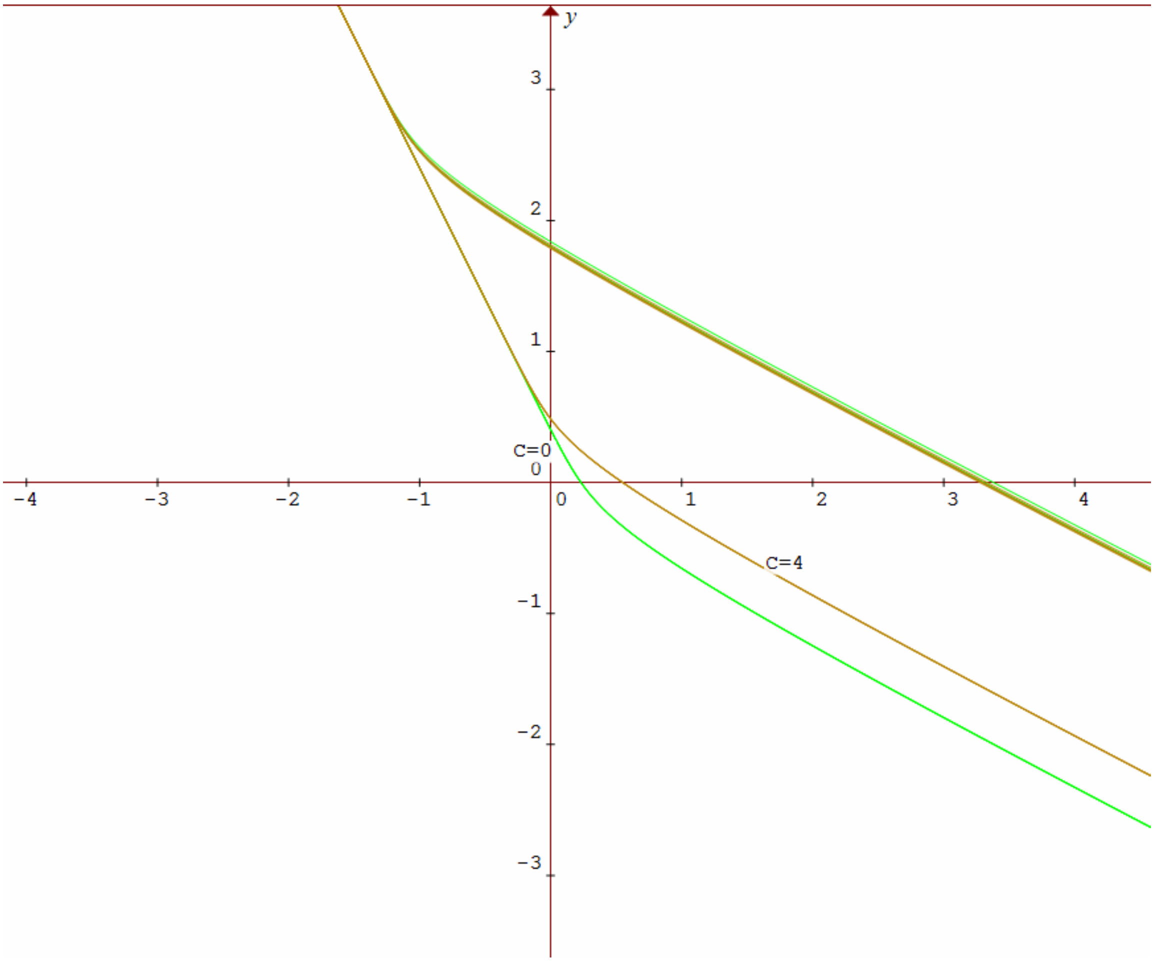
Problema 9.- Resolver

$(2x+y)\,dx-(4x+2y-1)\,dy=0$

Solución

Hacemos $z=2x+y \rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-2 \rightarrow \dfrac{dz}{dx}-2=\dfrac{z}{2z-1} \rightarrow \dfrac{2z-1}{5z-2}dz=dx$ integrando y

volviendo a las variables originales se obtiene finalmente
$5x+10y+\ln(10x+5y-2)=C$.

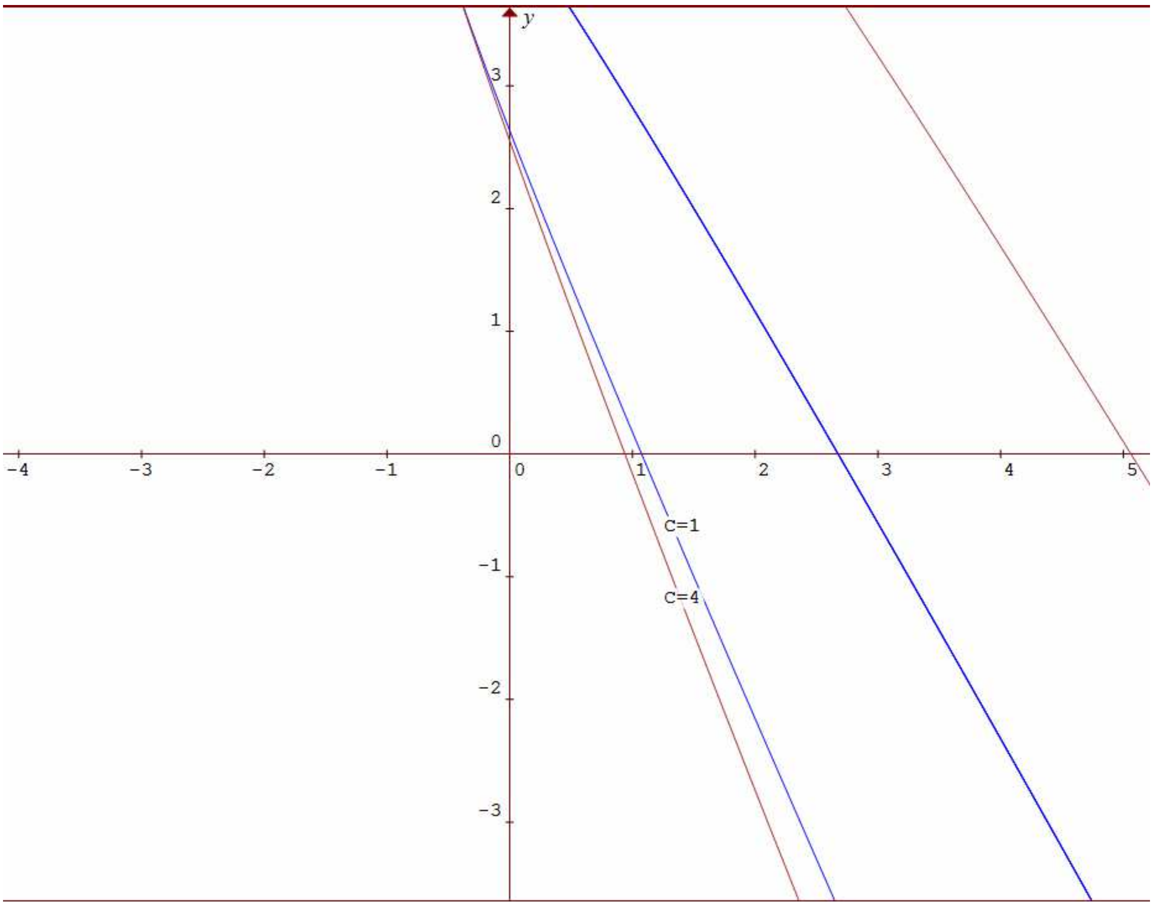


Problema 10.- Resolver

$$\left(6x+y-1\right)dx+\left(4x+y-2\right)dy=0$$

Solución

El sistema $\left.\begin{array}{l}6x+y-1=0\\ 4x+y-2=0\end{array}\right|$ tiene la solución $x=-\frac{1}{2}, y=4$. Hacemos $x=u-\frac{1}{2}, y=v+4, dx=du, dy=dv$ reemplazando nos queda $\left(6u+v\right)du+\left(4u+v\right)dv=0$ que es homogénea, cuya solución, volviendo a las variables originales resulta ser $\left(2x+y-3\right)^2 = C\left(3x+y-\frac{5}{2}\right)$.



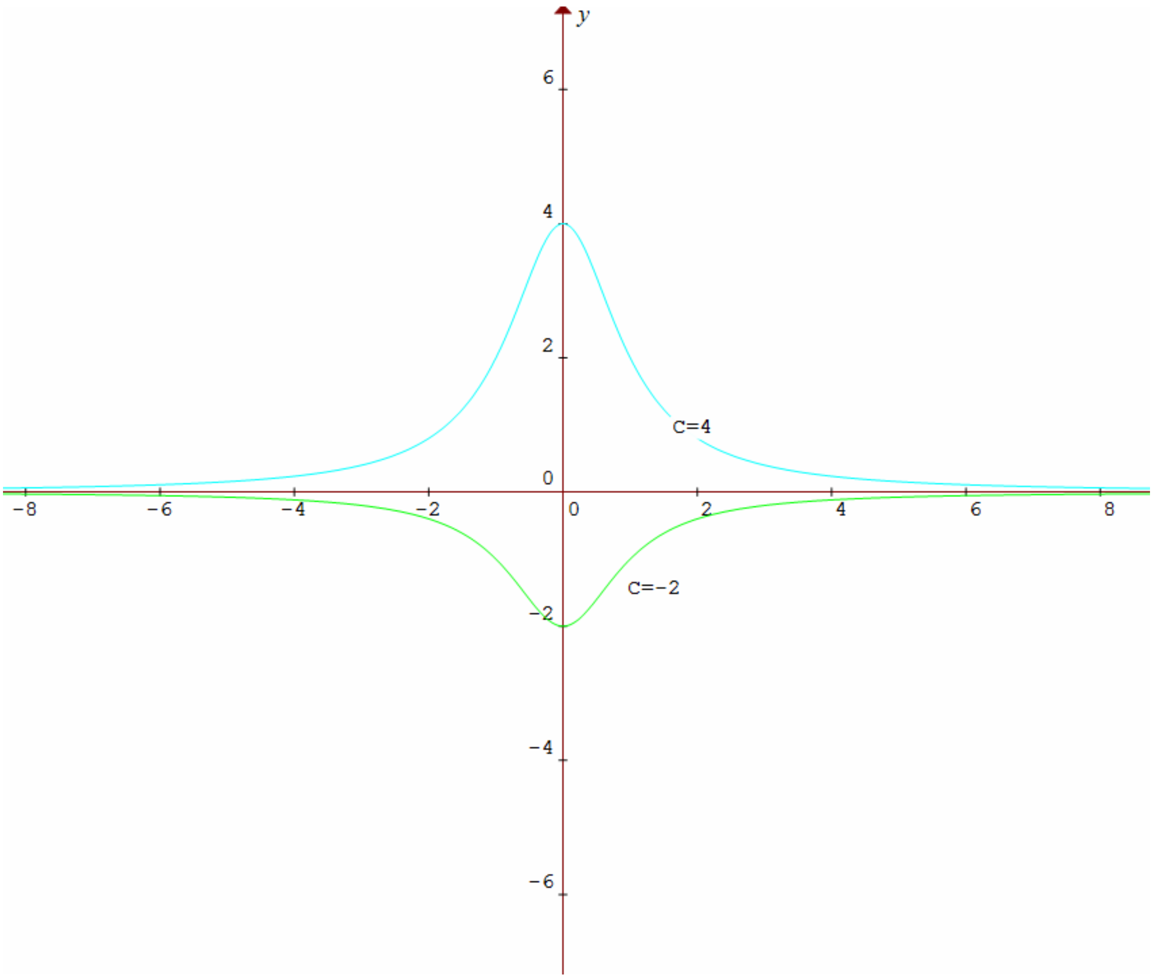
Ecuaciones Exactas

Problema 1.- Resolver

$$2xydx+\left(1+x^2\right)dy=0$$

Solución

Tenemos $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\therefore$ es exacta. Ahora $u(x,y)=\int 2xydx+\phi(y)=x^2y+\phi(y)$ $\rightarrow u_y=x^2+\phi'(y)=N(x,y)=1+x^2$ $\rightarrow\phi'(y)=1\rightarrow\phi(y)=y$. Así la solución es $x^2y+y=C$



Problema 2.- Resolver

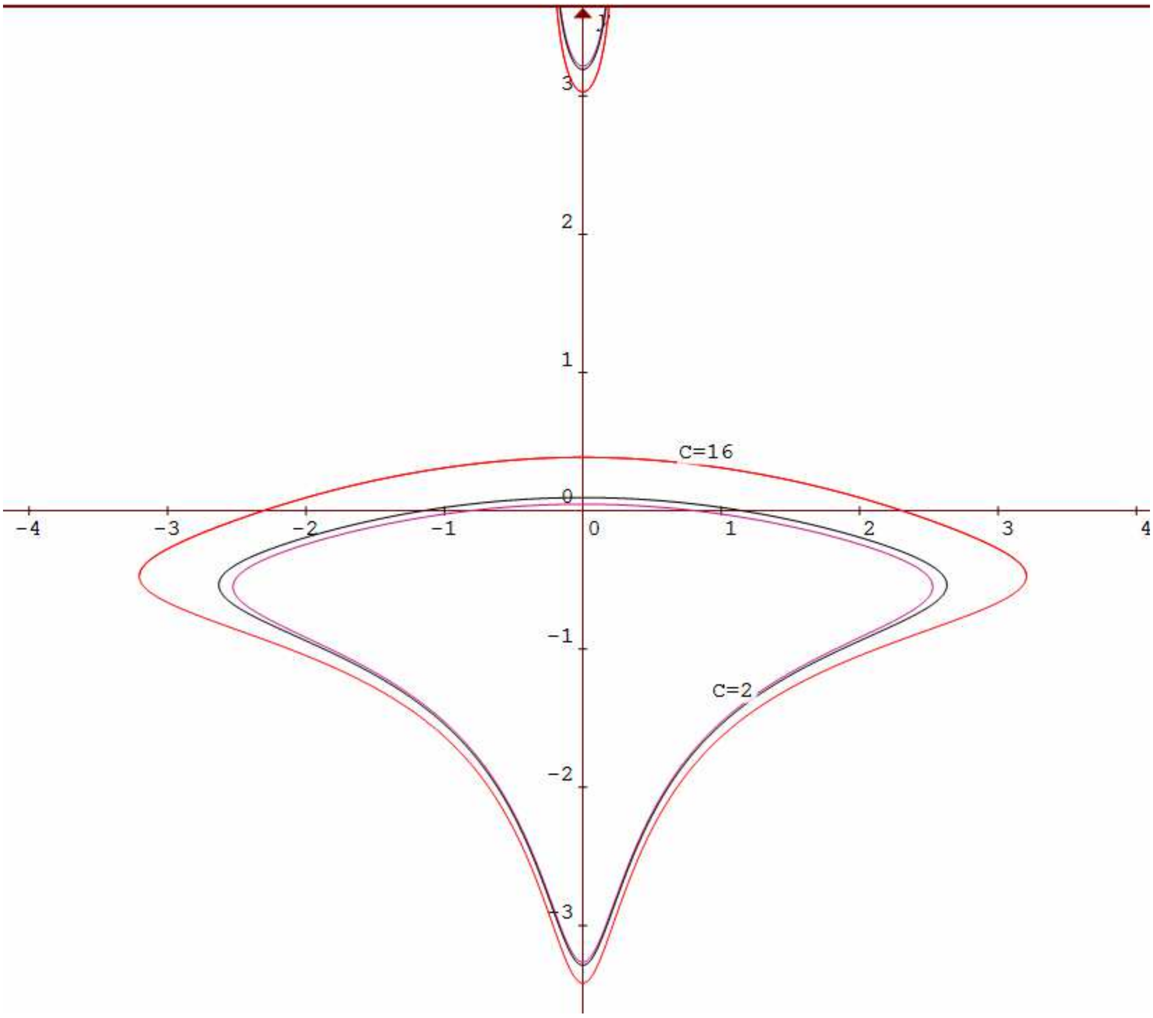
$$\left(3xy^4+x\right)dx+\left(6x^2y^3-2y^2+7\right)dy=0$$

Solución

Tenemos $\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy^3=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta.

$$u(x,y)=\int\left(3xy^4+x\right)dx+\phi(y)=\frac{3}{2}x^2y^4+\frac{x^2}{2}+\phi(y)$$

$\to u_y=6x^2y^3+\phi'(y)=6x^2y^3-2y^2+7\ \to\phi'(y)=-2y^2+7\ \to\phi(y)=-\dfrac{2}{3}y^3+7y$. Así la solución es $\dfrac{3}{2}x^2y^4+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{3}y^3+7y=C'$ o $9x^2y^4+3x^2-4y^3+42y=C$



Problema 3.- Resolver

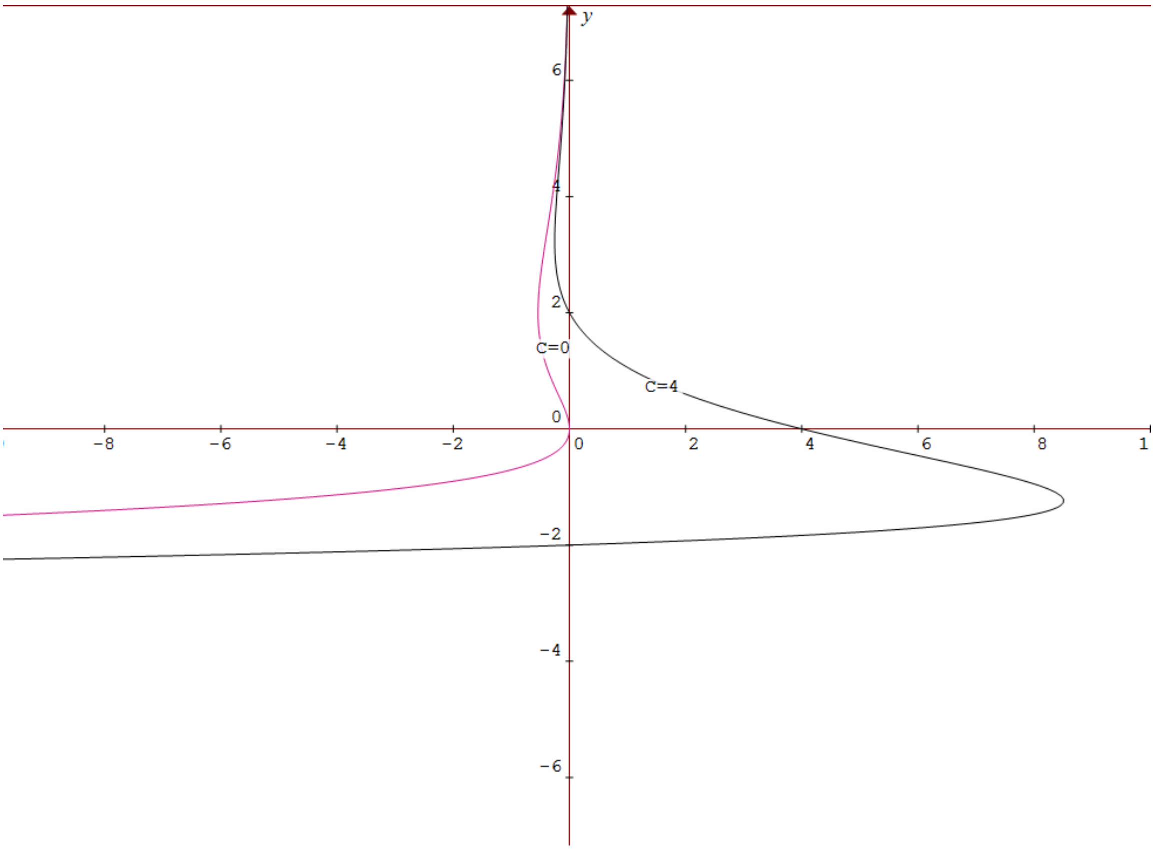
$$e^x dx + \left(xe^y + 2y\right)dy = 0$$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y = \frac{\partial N}{\partial x} \therefore$$ es exacta.

$$u(x,y) = \int e^y dx + \phi(y) = xe^y + \phi(y)$$

$u_y = xe^y + \phi'(y) = xe^y + 2y \;\rightarrow \phi'(y) = 2y \;\rightarrow \phi(y) = y^2$ Así la solución es $xe^y + y^2 = C$



problema 4. Resolver

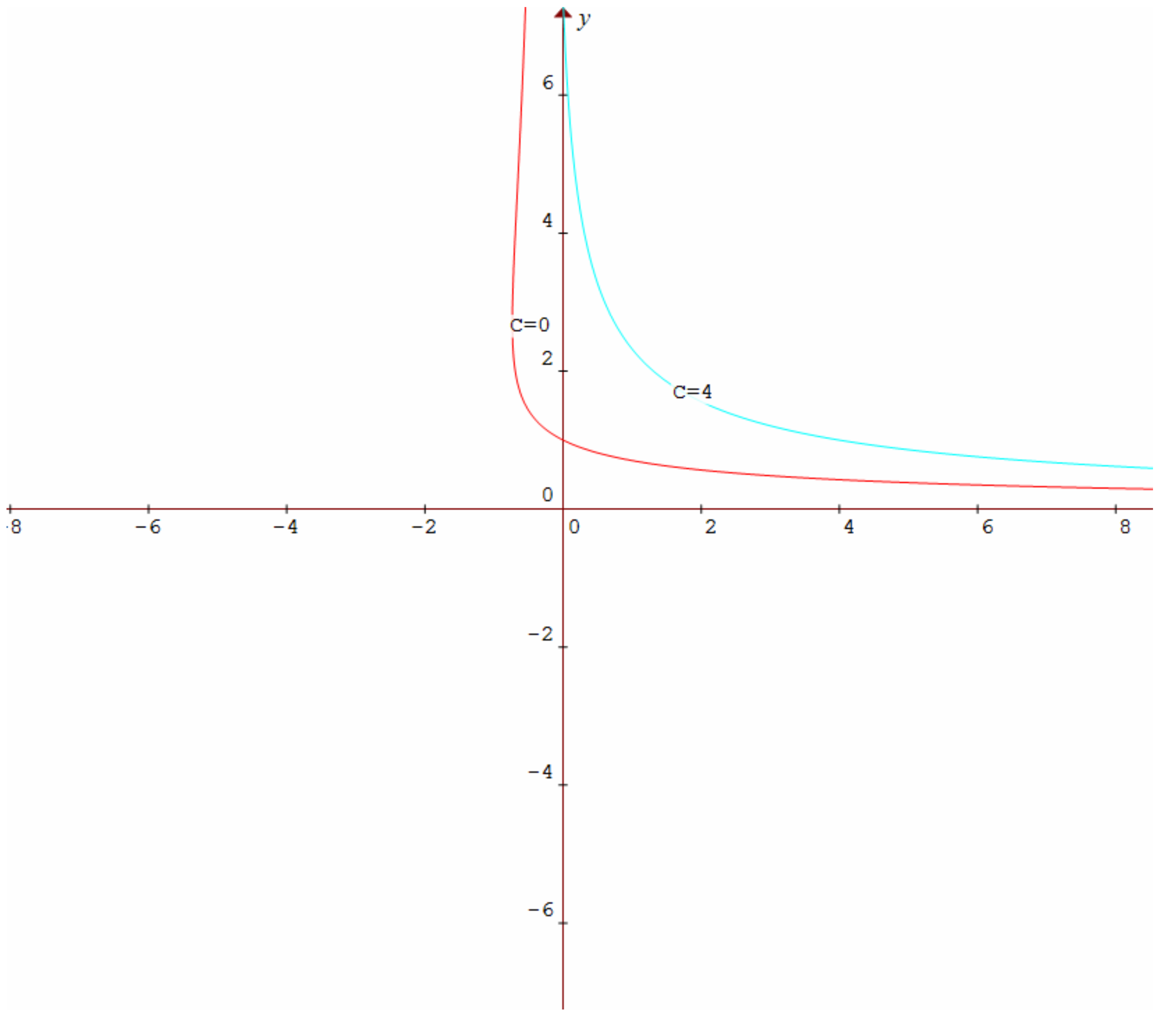
$$\left(x+\frac{2}{y}\right)dy+ydx=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=1=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta.

$$u(x,y)=\int ydx+\phi(y)=xy+\phi(y)$$

$u_y=x+\phi'(y)=x+\dfrac{2}{y}\ \rightarrow\phi'(y)=\dfrac{2}{y}\rightarrow\phi(y)=2\ln y\therefore$ la solución es $xy+2\ln y=C$



Problema 5.- Resolver

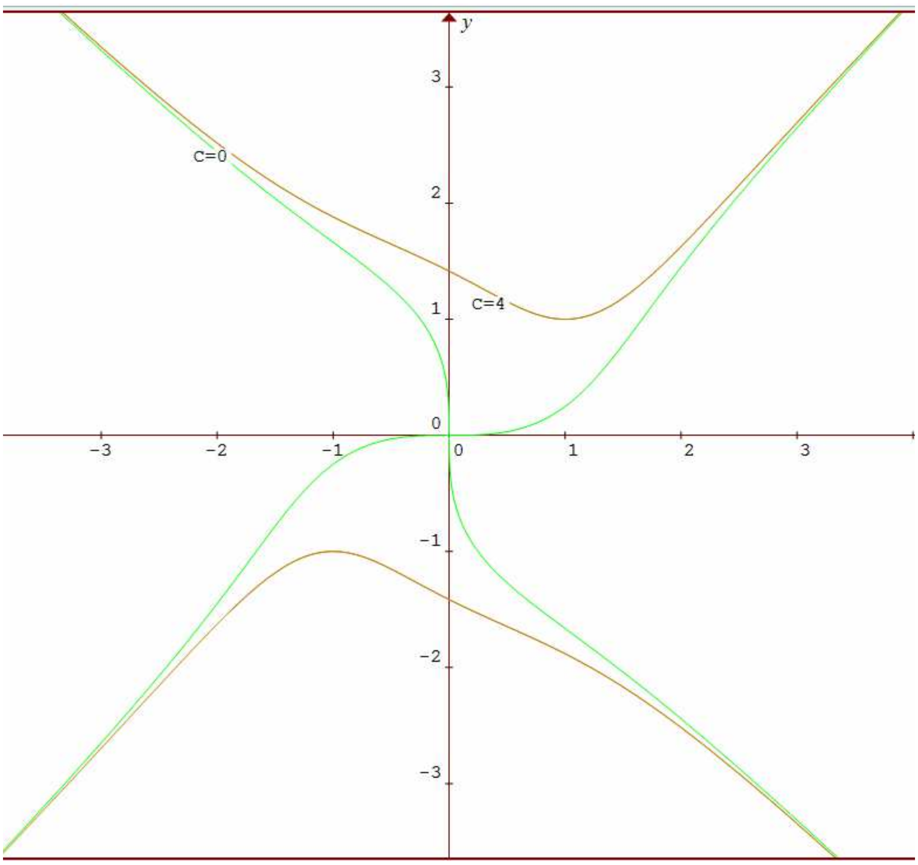
$$\left(y-x^3\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=1=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta

$$u(x,y)=\int\left(y-x^3\right)dx+\phi(y)=yx-\frac{x^4}{4}+\phi(y)$$

$u_y=x+\phi'(y)=x+y^3\ \rightarrow\phi'(y)=y^3\rightarrow\phi(y)=\dfrac{y^4}{4}$, así la solución es $xy-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^4}{4}=C'$
o $4xy-x^4+y^4=C$



Problema 6.- Resolver

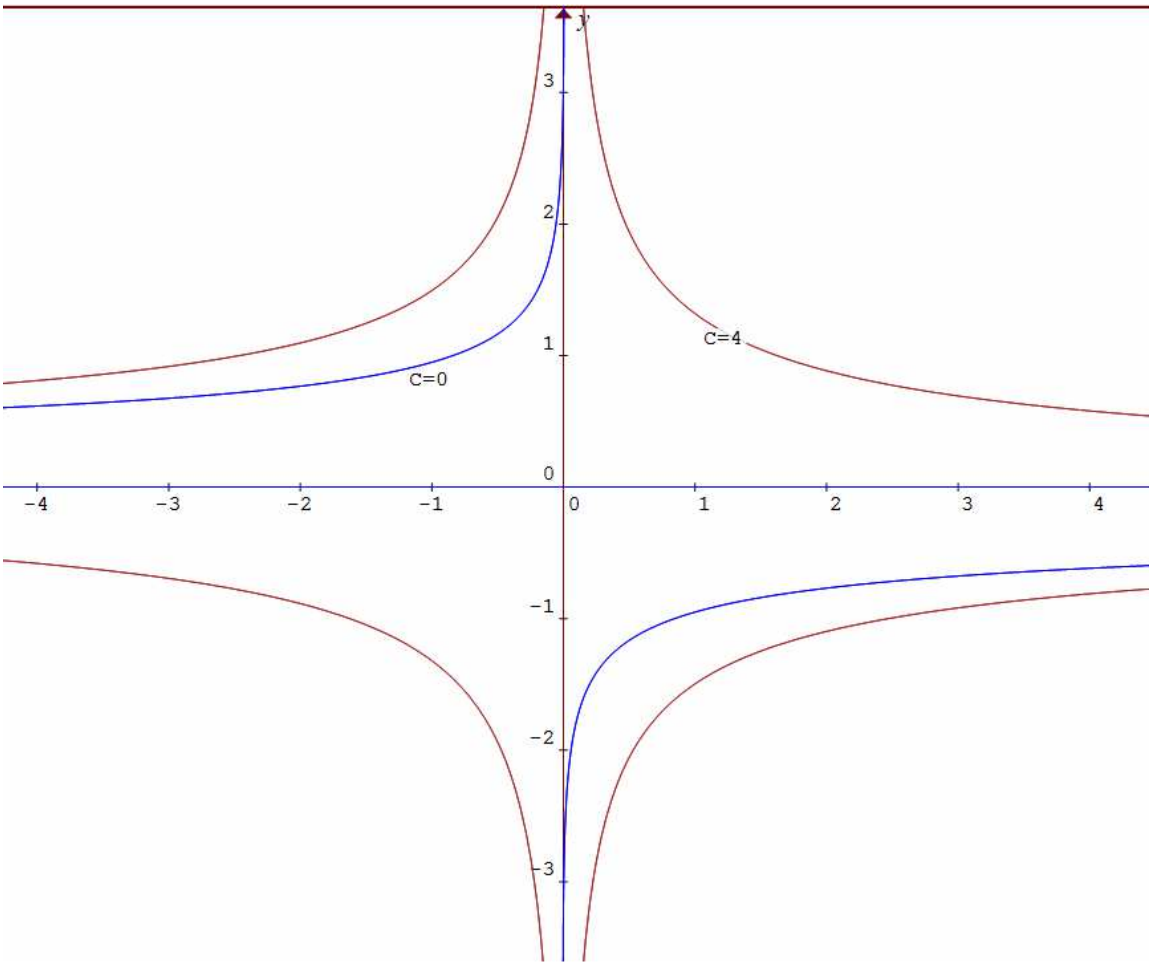
$$\left(2xy^4+seny\right)dx+\left(4x^2y^3+x\cos y\right)dy=0$$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^3+\cos y=\frac{\partial N}{\partial x}\therefore \text{ es exacta}$$

$$u_y=4x^2y^3+x\cos y+\phi'(y)=4x^2y^3+x\cos y \ \rightarrow \phi'(y)=0\rightarrow \phi(y)=cte.$$

luego la solución es $x^2y^4+xseny=C$



Problema 7.- Resolver

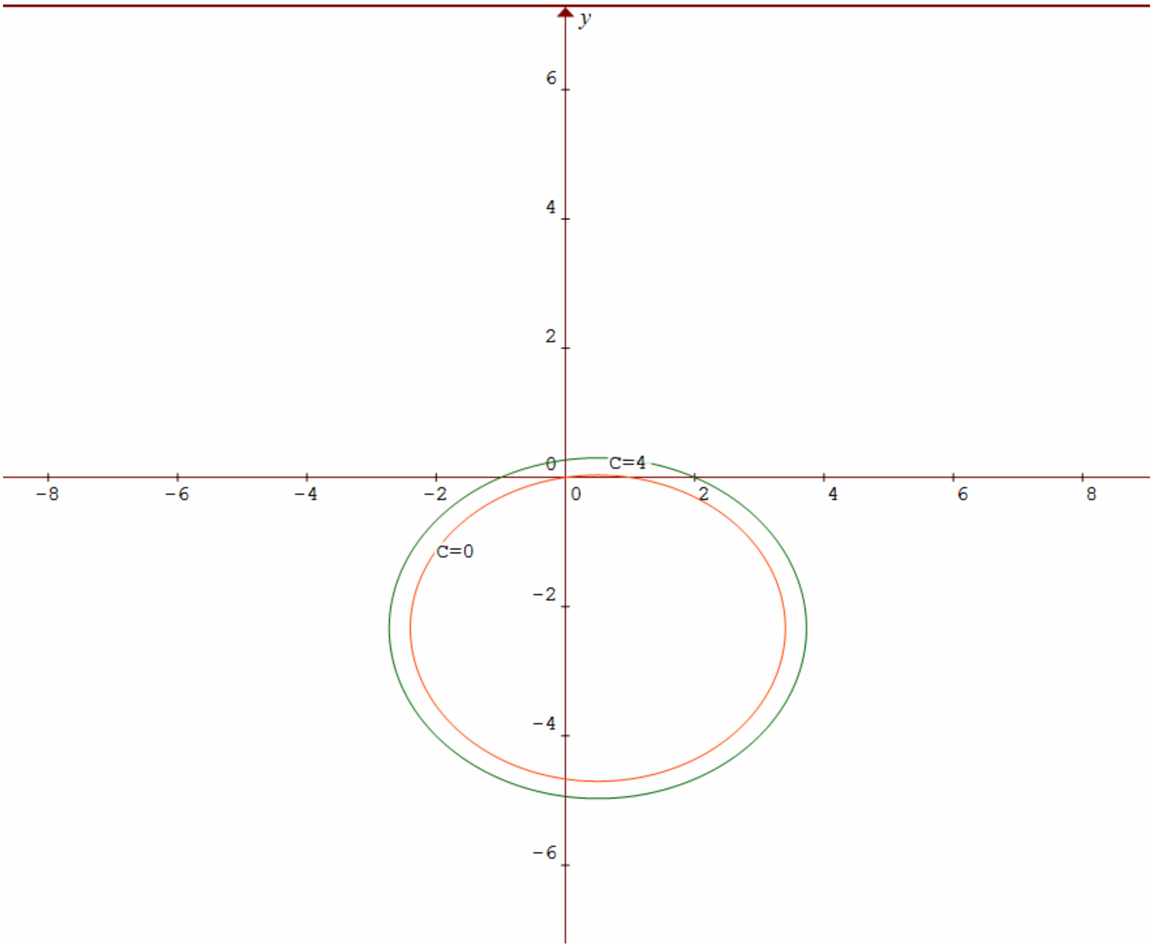
$$\left(2x-1\right)dx+\left(3y+7\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=0=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta.

$$u\left(x,y\right)=\int\left(2x-1\right)dx+\phi\left(y\right)=x^2-x+\phi\left(y\right)$$

$u_y=\phi'\left(y\right)=3y+7\ \rightarrow\phi\left(y\right)=\dfrac{3}{2}y^2+7y\therefore$ la solución es $x^2-x+\dfrac{3}{2}y^2+7y=C'$ o $2x^2-2x+3y^2+14y=C$



Problema 8.- Resolver

$$(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$$

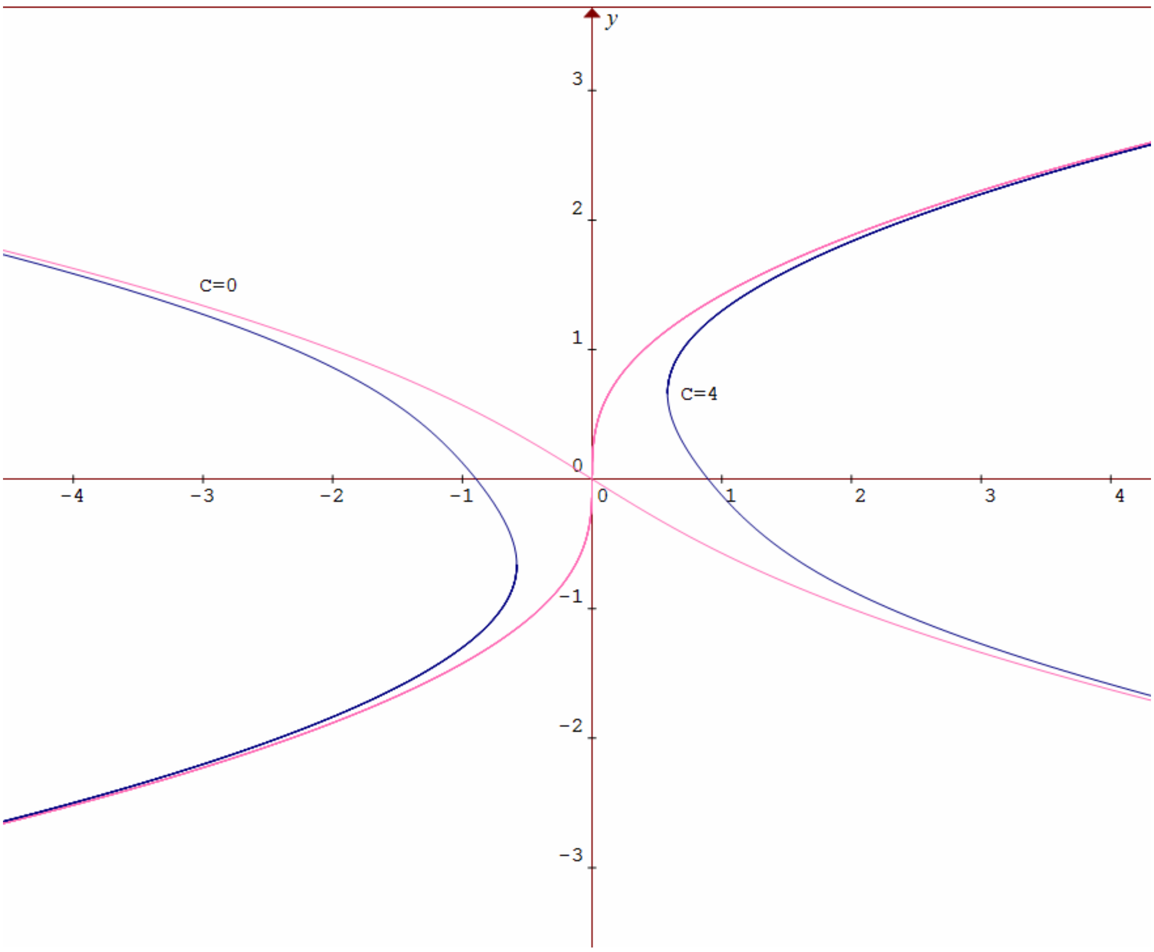
Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=4=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta

$$u(x,y)=\int(5x+4y)dx=\frac{5}{2}x^2+4xy+\phi(y)$$

$u_y=4x+\phi'(y)=4x-8y^3 \rightarrow \phi'(y)=-8y^3 \rightarrow \phi(y)=-2y^4$, así la solución es

$\dfrac{5}{2}x^2+4xy-2y^4=C'$ o $5x^2+8xy-4y^4=C$



Problema 9.- Resolver

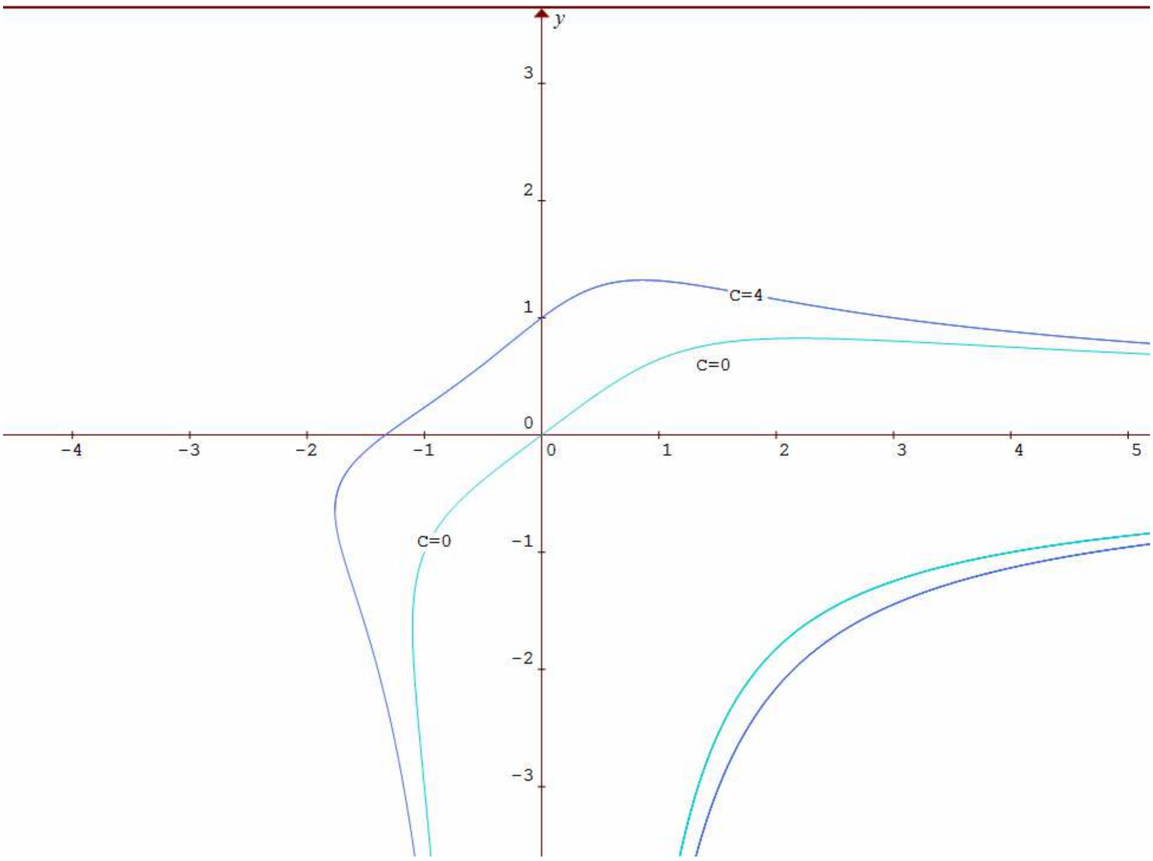
$$\left(2xy^2-3\right)dx+\left(2x^2y+4\right)dy=0$$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy=\frac{\partial N}{\partial x}$$ $\therefore$ es exacta

$$u\left(x,y\right)=\int\left(2xy^2-3\right)dx=x^2y^2-3x+\phi\left(y\right)$$

$u_y=2x^2y+\phi'\left(y\right)=2x^2y+4\ \rightarrow\phi'\left(y\right)=4\rightarrow\phi\left(y\right)=4y$. Así la solución es
$x^2y^2-3x+4y=C$



Problema 10.- Resolver

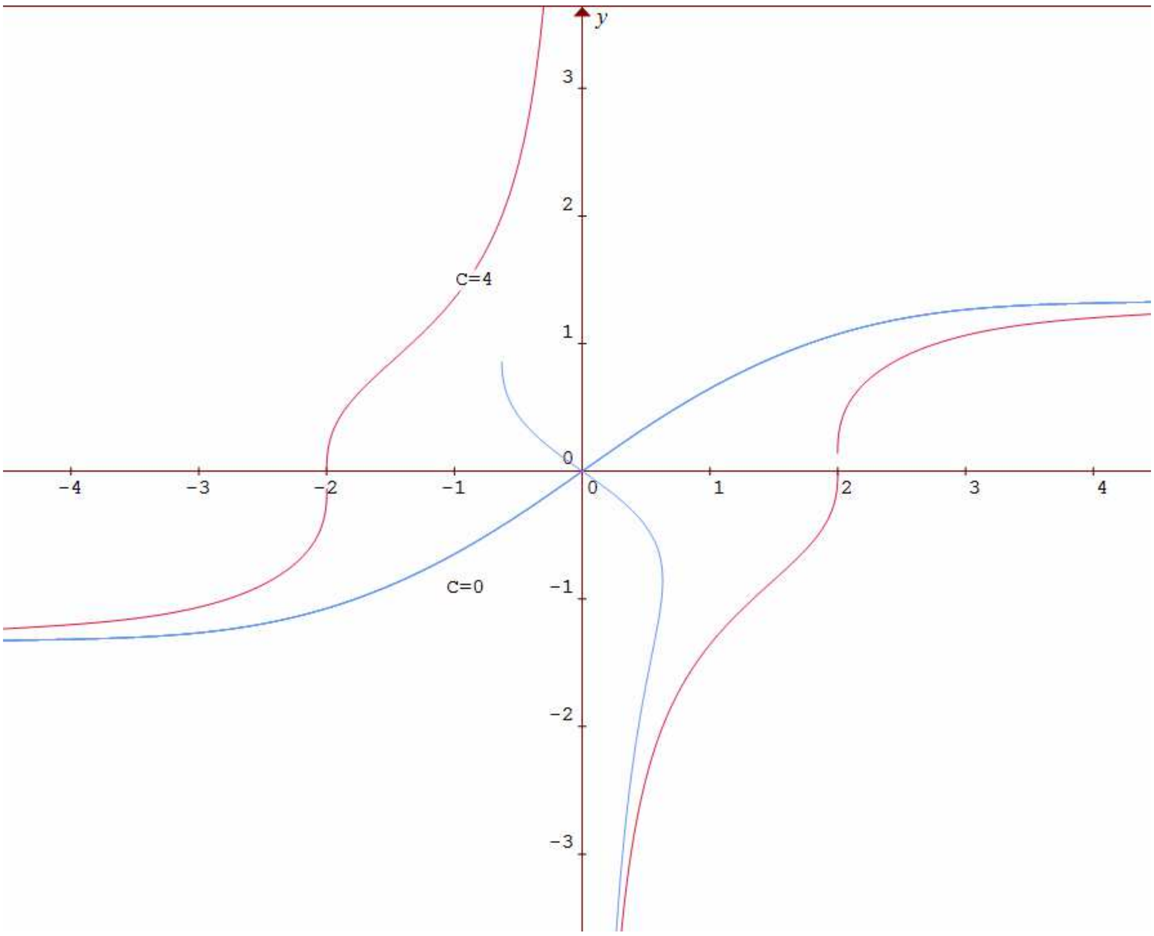
$$\left(x-y^3+y^2senx\right)dx-\left(3xy^2+2y\cos x\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-3y^2+2ysenx=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ∴ es exacta.

$$u(x,y)=\int\left(x-y^3+y^2senx\right)dx+\phi(y)=\frac{x^2}{2}-xy^3-y^2\cos x+\phi(y)$$

$u_y=-xy^2-2y\cos x+\phi'(y)=-3xy^2-2y\cos x\rightarrow\phi'(y)=0\ \rightarrow\phi(y)=cte$. Así la solución es $\dfrac{1}{2}x^2-xy^3-y^2\cos x=C'$ o $x^2-2xy^3-2y^2\cos x=C$



Problema 11.- Resolver

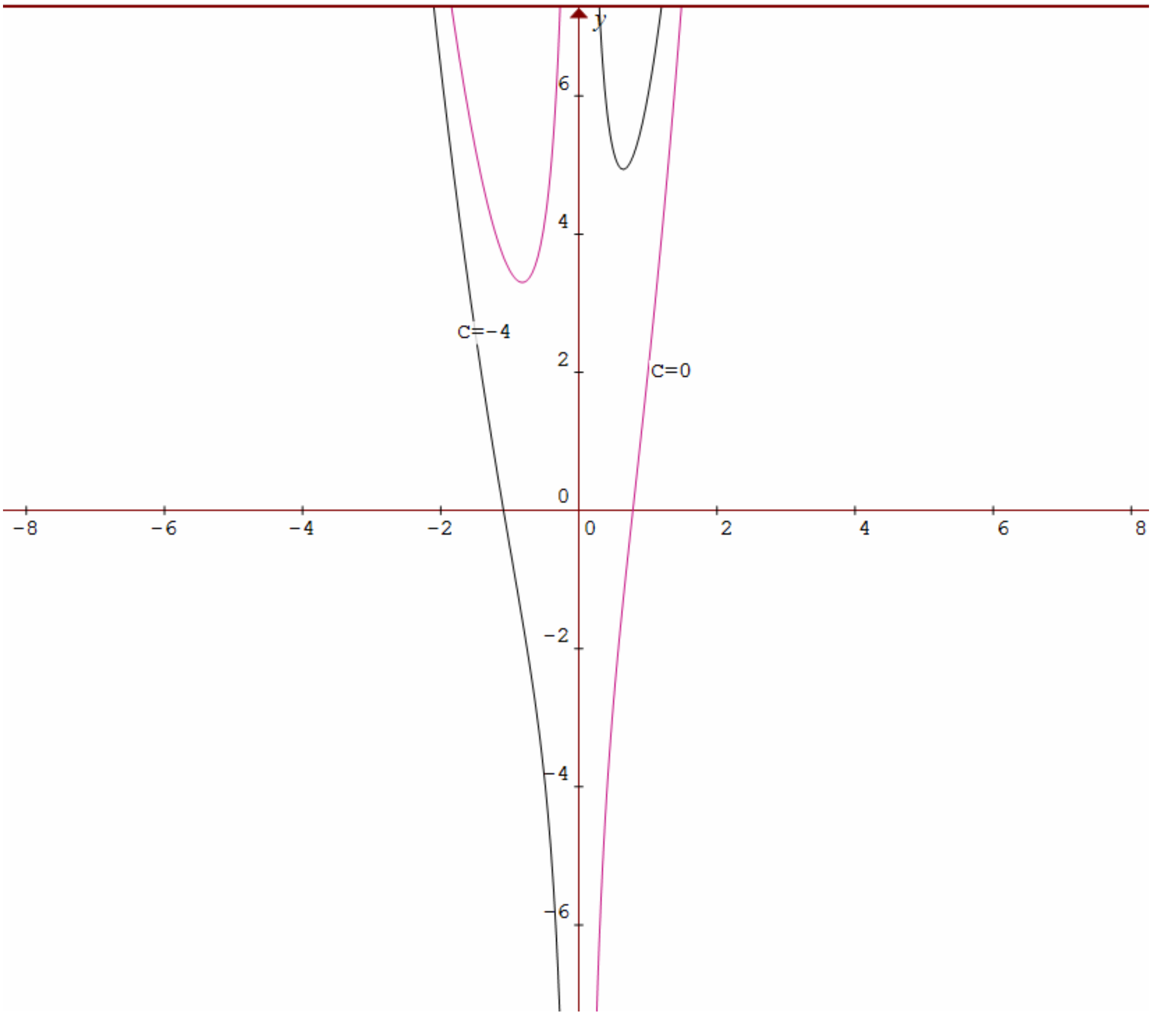
$$\left(2xe^x - y + 6x^2\right)dx - xdy = 0$$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 = \frac{\partial N}{\partial x} \therefore$$ es exacta

$$u(x,y) = \int \left(2xe^x - y + 6x^2\right)dx = 2xe^x - 2e^x - xy + 2x^3 + \phi(y)$$

$u_y = -x + \phi'(y) = -x \rightarrow \phi'(y) = 0 \rightarrow \phi(y) = cte$. Así la solución es
$2xe^x - 2e^x - xy + 2x^3 = C$



Problema 12.- Resolver

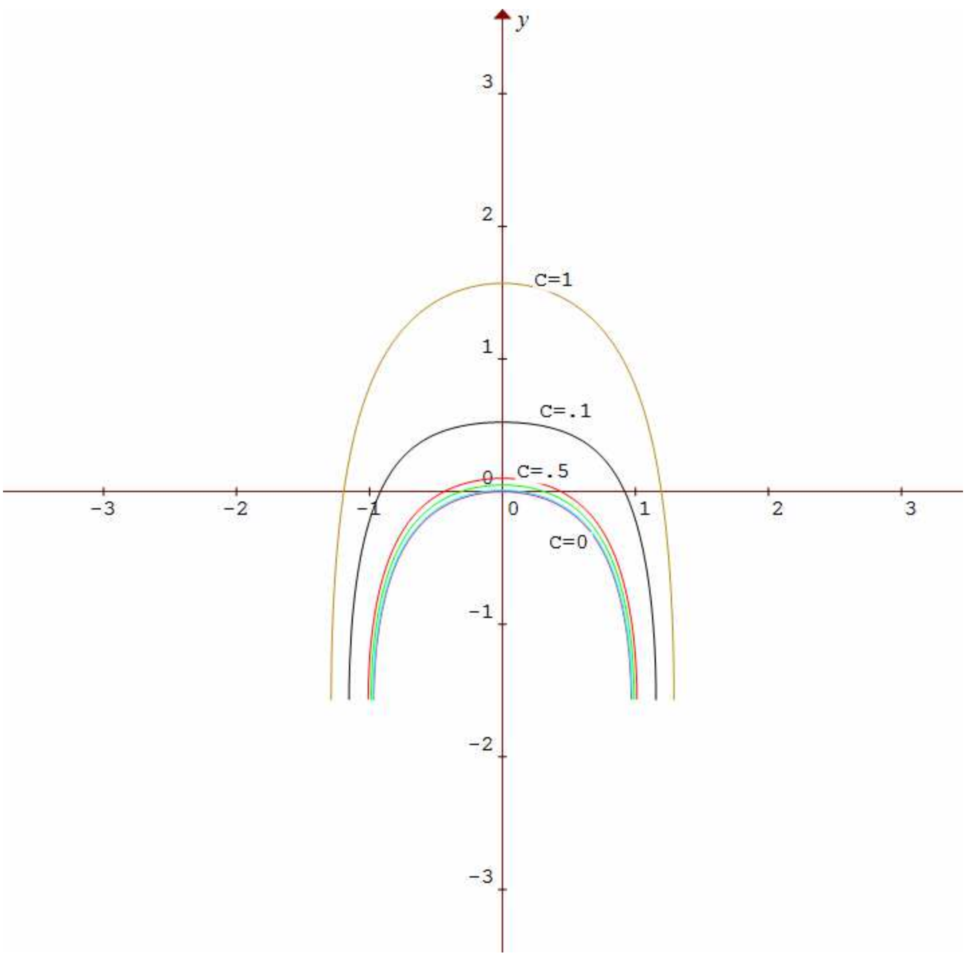
$$\left(tgx - senxseny\right)dx + \left(\cos x \cos y\right)dy = 0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = -senx\cos y = \dfrac{\partial N}{\partial x} \therefore$ es exacta.

$$u\left(x,y\right) = \int \left(tgx - senxseny\right)dx + \phi\left(y\right) = -\ln\left(\cos x\right) + \cos xseny + \phi\left(y\right)$$

$u_y = \cos x \cos y + \phi'\left(y\right) = \cos x \cos y \rightarrow \phi'\left(y\right) = 0 \rightarrow \phi\left(y\right) = C$ Luego la solución es $-\ln\cos x + cosxseny = C$



Problema 13.- Resolver

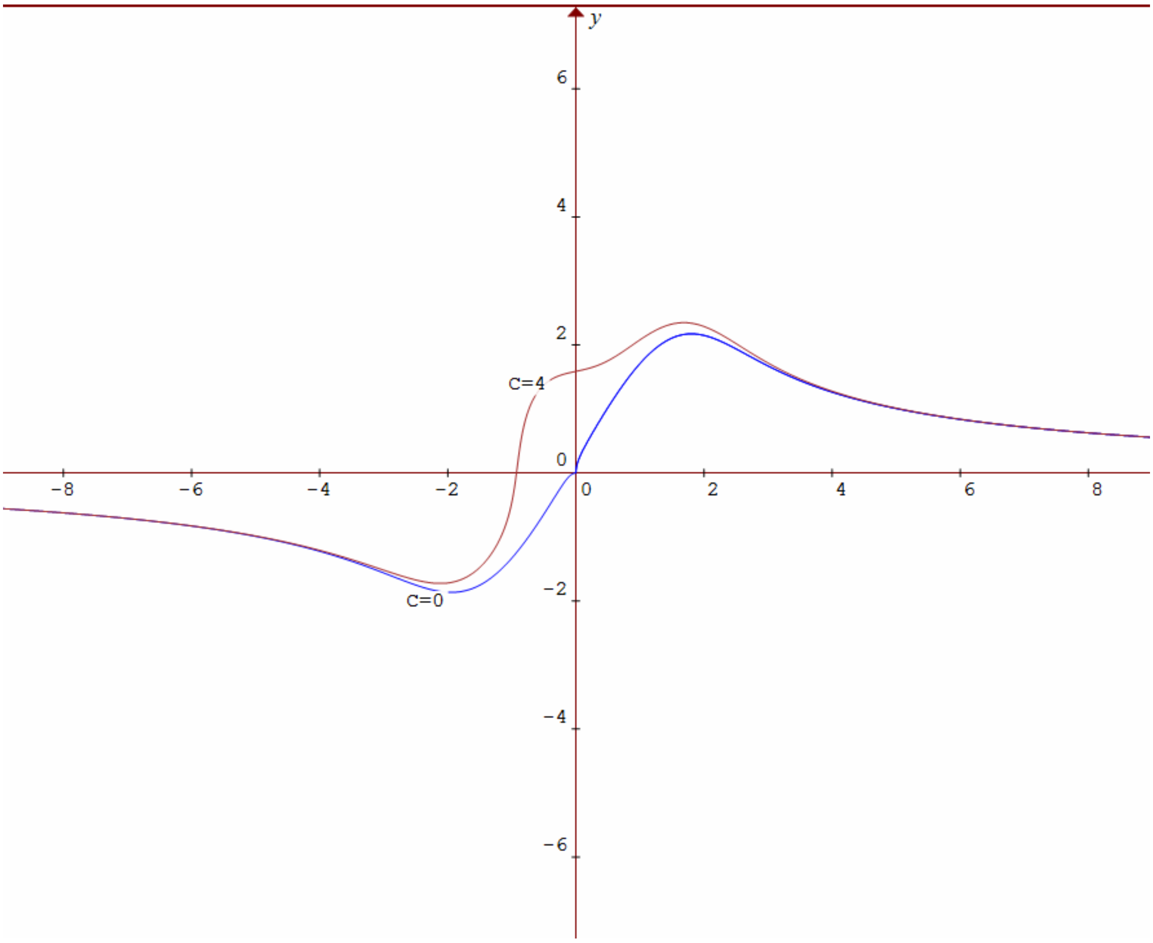
$$\left(4x^3y-15x^2-y\right)dx+\left(x^4+3y^2-x\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=4x^3-1=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta.

$$u(x,y)=\int\left(4x^3y-15^2-y\right)dx+\phi(y)=x^4y-5x^3-xy+\phi(y)$$

$u_y=x^4-x+\phi'(y)=x^4+3y^2-x\rightarrow\phi'(y)=3y^2\rightarrow\phi(y)=y^2$, así la solución es
$x^4y-5x^3-xy+y^3=C$



Problema 14.- Resolver

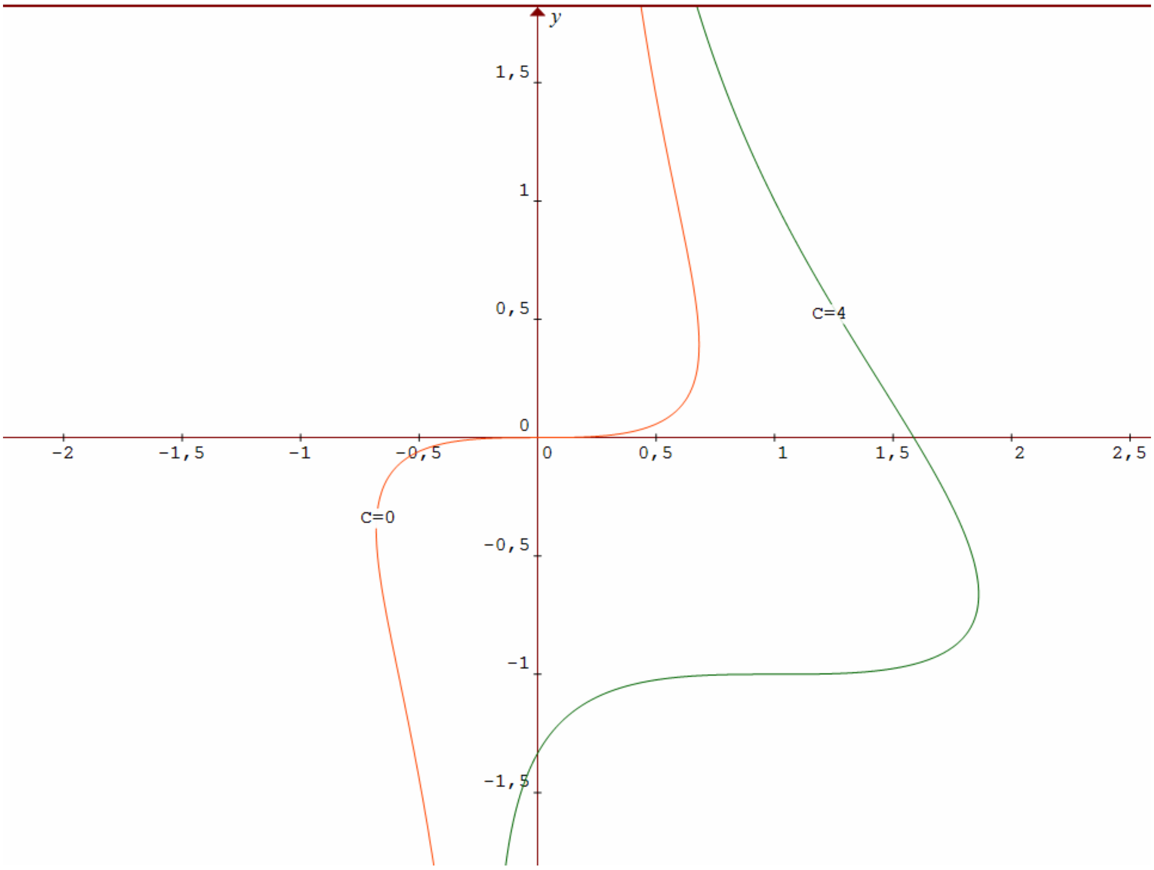
$$(x+y)^2\,dx+\left(2xy+x^2-1\right)dy=0$$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2(x+y)=\frac{\partial N}{\partial x}\therefore \text{ es exacta}$$

$$u(x,y)=\int (x+y)^2 dx+\phi(y)=\frac{(x+y)^3}{3}+\phi(y)$$

$u_y=(x+y)^2+\phi'(y)=2xy+x^2-1\rightarrow\phi'(y)=-1-y^2\rightarrow\phi(y)=-y-\frac{y^3}{3}$ así la solución es, desarrollando, $x^3+3x^2y+3xy^2-3y=C$



Problema 15.- Resolver

$$(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0$$

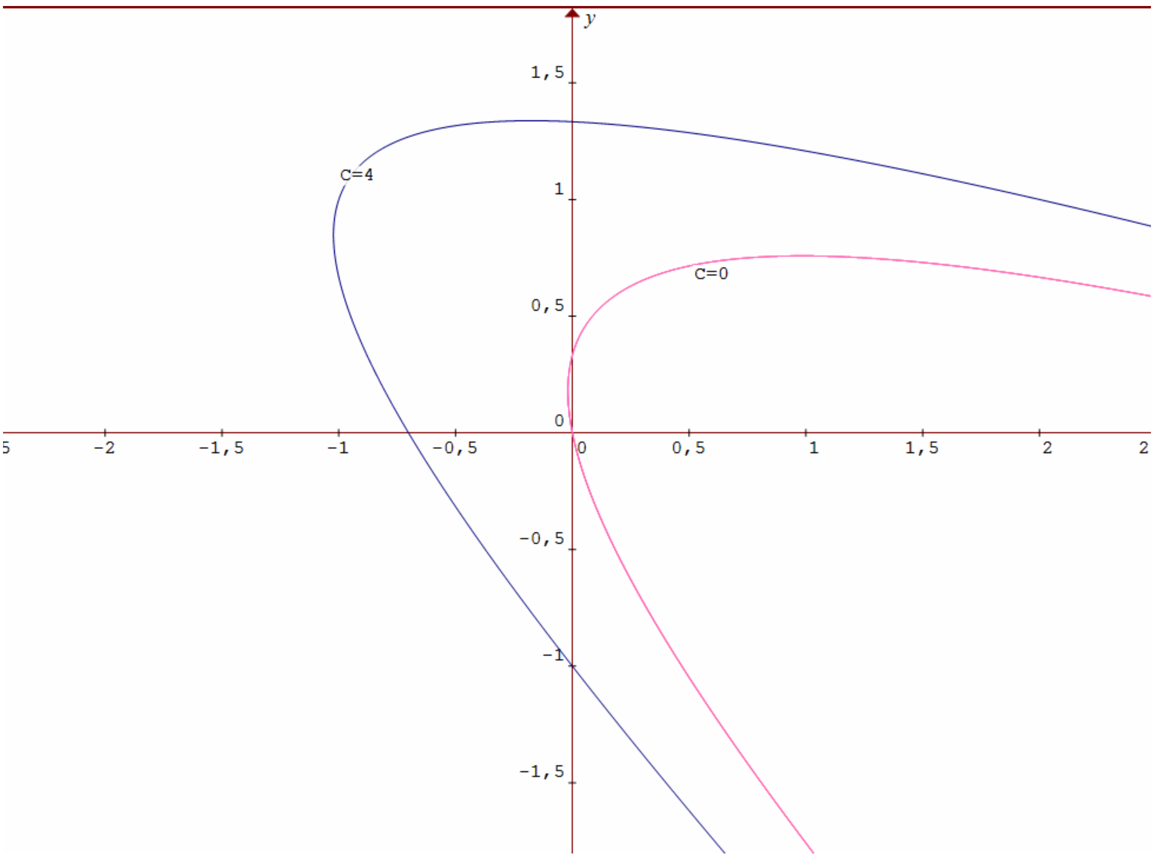
Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4=\frac{\partial N}{\partial x} \therefore \text{ es exacta}$$

$$u(x,y)\int(4y+2x-5)dx+\phi(y)=4xy+x^2-5x+\phi(y)$$

$u_y=4x+\phi'(y)=6y+4x-1 \rightarrow \phi'(y)=-1+6y \rightarrow \phi(y)=-y+3y^2$ así la solución es

$$4xy+x^2-5x-y+3y^2=C$$



Problema 16.- Resolver

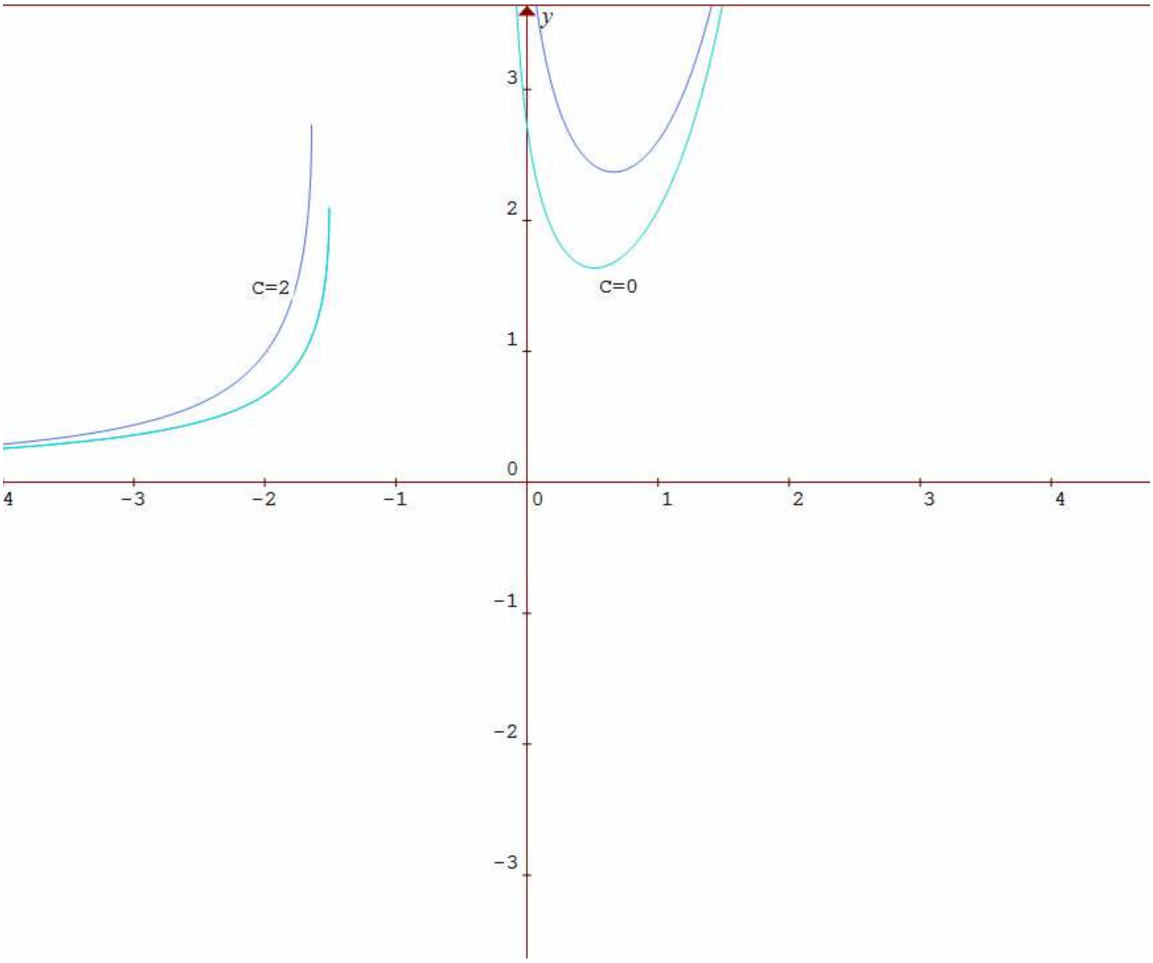
$$\left(y^2\cos x-3x^2y-2x\right)dx+\left(2ysenx-x^3+\ln y\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y\cos x-3x^2=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\therefore$ es exacta

$$u(x,y)=\int\left(y^2\cos x-3x^2y-2x\right)dx+\phi(y)=y^2senx-x^3y-x^2+\phi(y)$$

$u_y=2ysenx-x^2+\phi'(y)=2ysenx-x^3+\ln y\ \ \rightarrow\phi'(y)=\ln y\rightarrow\phi(y)=y\ln y-y$ así la solución es $y^2senx-x^3y-x^2+y\ln y-y=C$



Problema 17.- Resolver

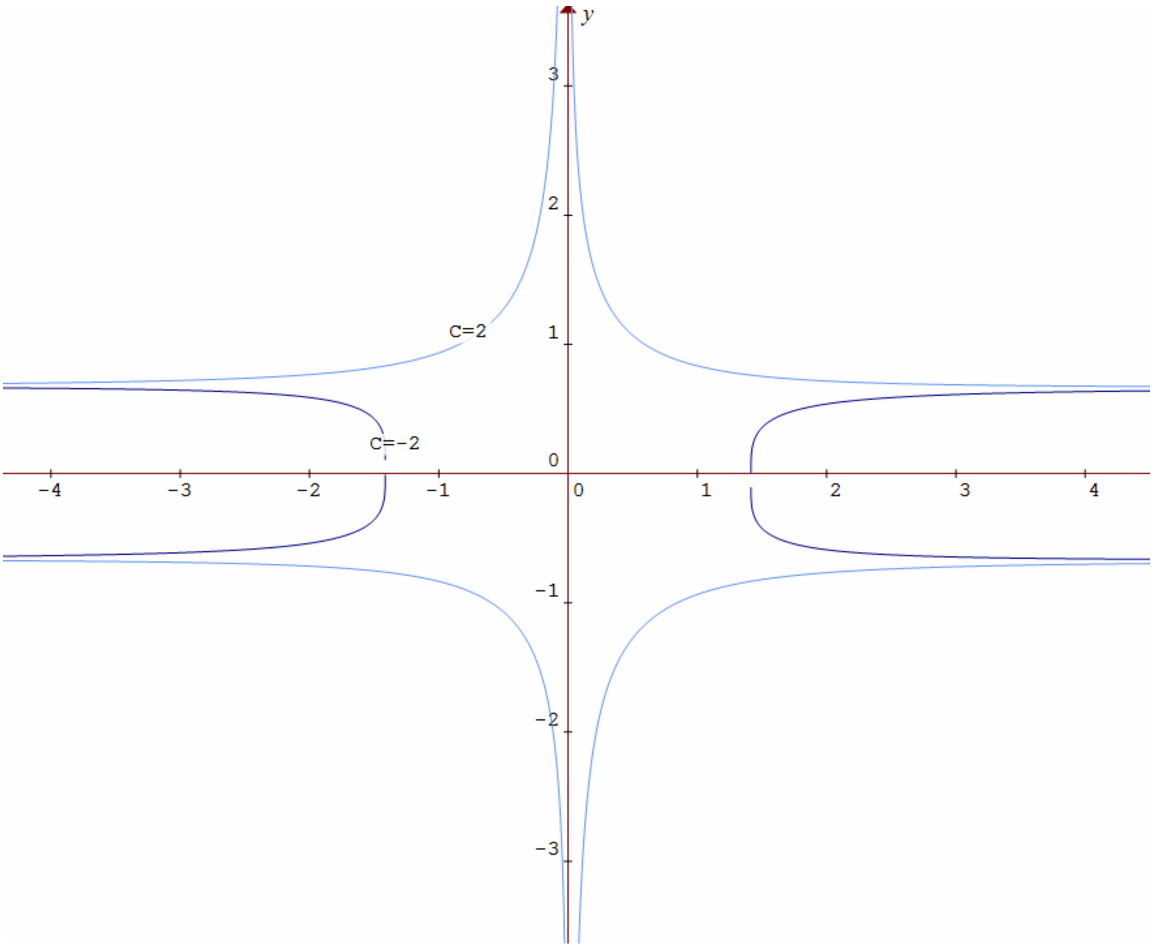
$$\left(y^3+10xy^4-2x\right)dx+\left(3xy^2+20x^2y^3\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=3y^2+40xy^3=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\therefore$ es exacta

$$u(x,y)=\int\left(y^3+10xy^4-2x\right)dx+\phi(y)=xy^3+5x^2y^4-x^2+\phi(y)$$

$u_y=3xy^2+20x^2y^3+\phi'(y)=3xy^2+20x^2y^3\rightarrow\phi'(y)=0\rightarrow\phi(y)=cte$, así la solución es $xy^3+5x^2y^4-x^2=C$



Problema 18.- Resolver

$$\left(-x^2y^2 senx + 2xy^2 \cos x\right)dx + \left(2x^2 y \cos x\right)dy = 0$$

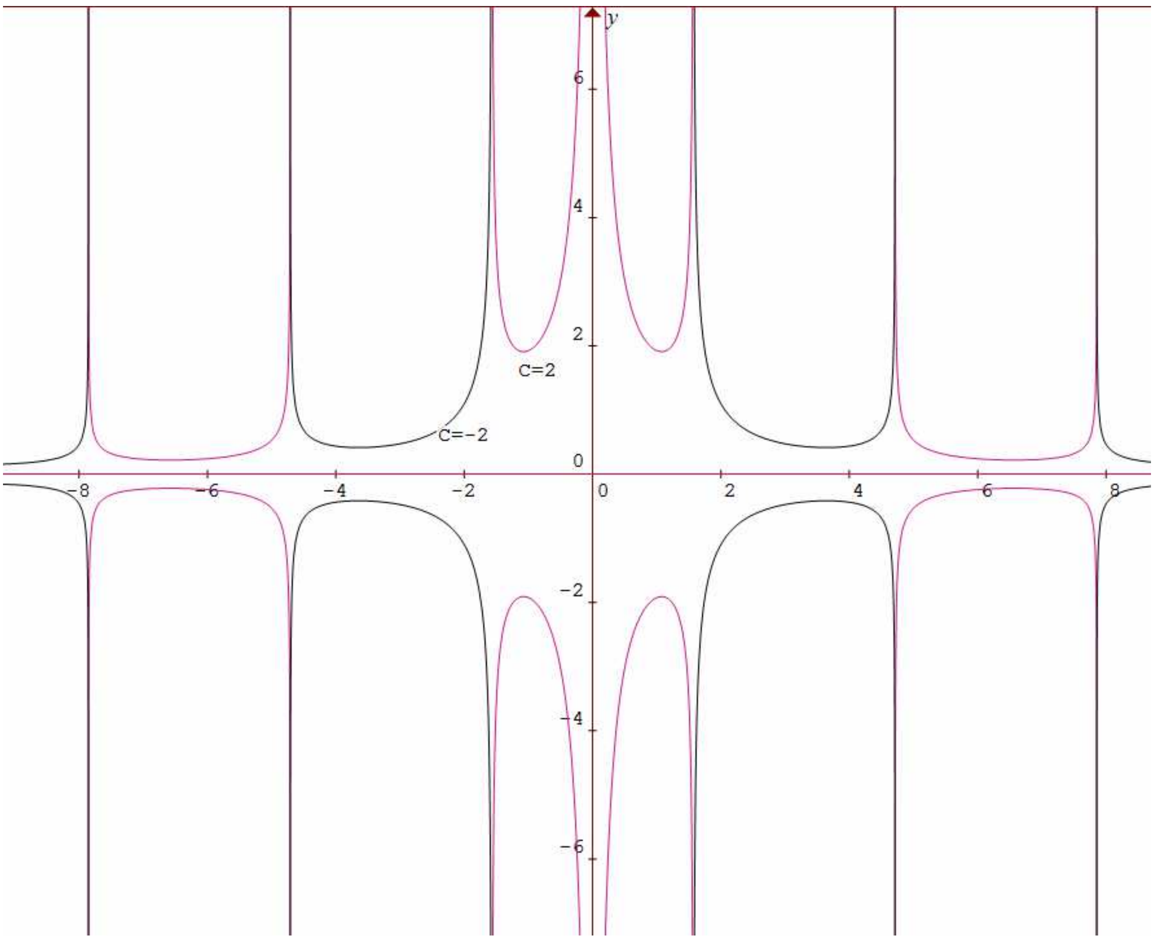
Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x^2 ysenx + 4xy\cos x = \frac{\partial N}{\partial x} \therefore \text{ es exacta}$$

$$u(x,y) = \int 2x^2 y \cos x dy + \phi(x) = x^2y^2 \cos x + \phi(x)$$

$$u_x = -x^2y^2senx + 2xy^2 \cos x + \phi'(x) = -x^2y^2senx + 2xy^2 \cos x \rightarrow \phi'(x) = 0 \rightarrow \phi(x) = cte.$$

Así la solución es $x^2y^2 \cos x = C$



Problema 19.- Resolver

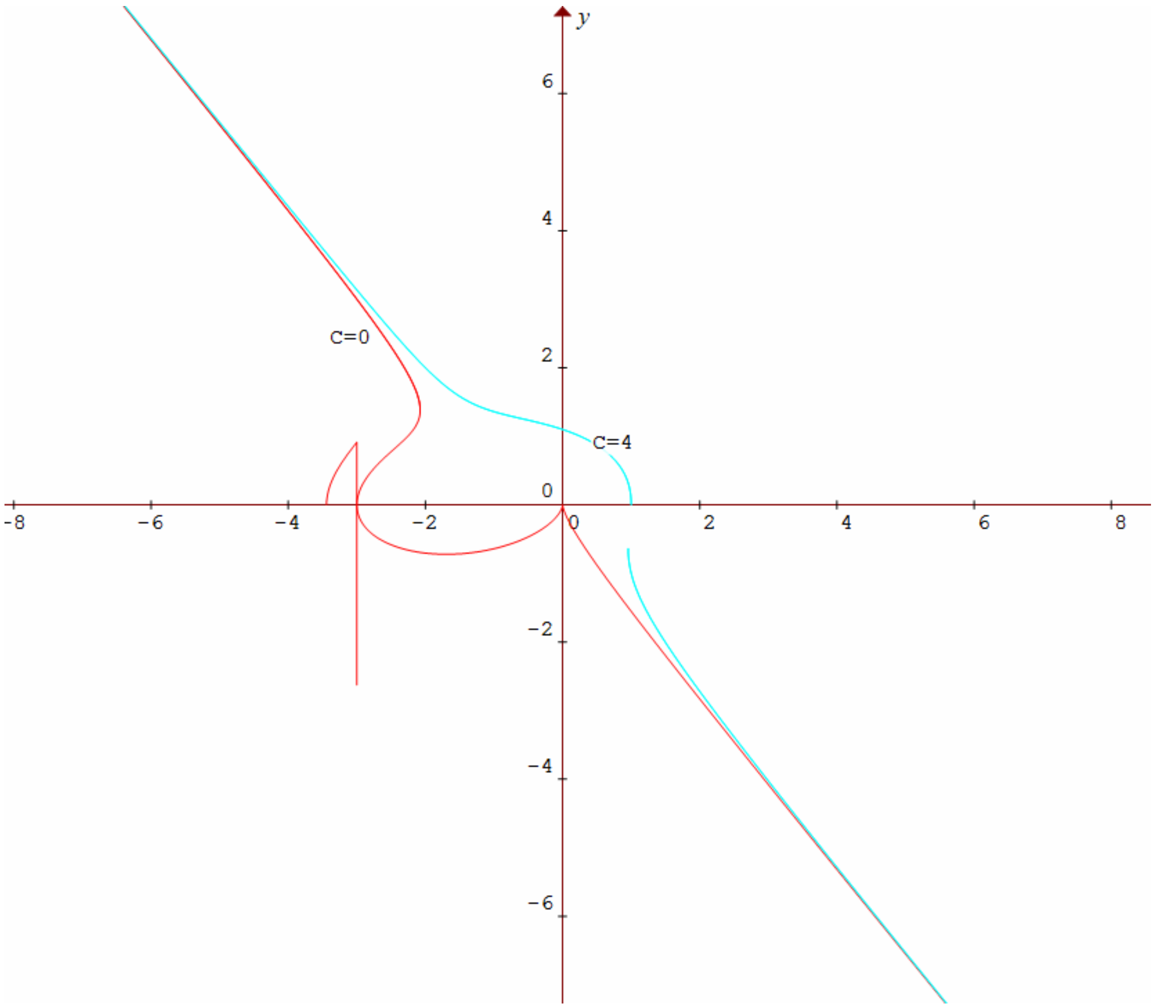
$$\left(x^2+y^2+2x\right)dx+\left(2xy+3y^2\right)dy=0$$

Solución

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y=\dfrac{\partial N}{\partial x}\therefore$ es exacta

$$u(x,y)=\int\left(x^2+y^2+2x\right)dx+\phi(y)=\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2+\phi(y)$$

$u_y=2xy+\phi'(y)=2xy+3y^2\rightarrow\phi'(y)=3y^2\rightarrow\phi(y)=y^3$ luego la solución es
$x^3+3xy^2+3x^2+3y^3=C$



Problema 20.- Resolver

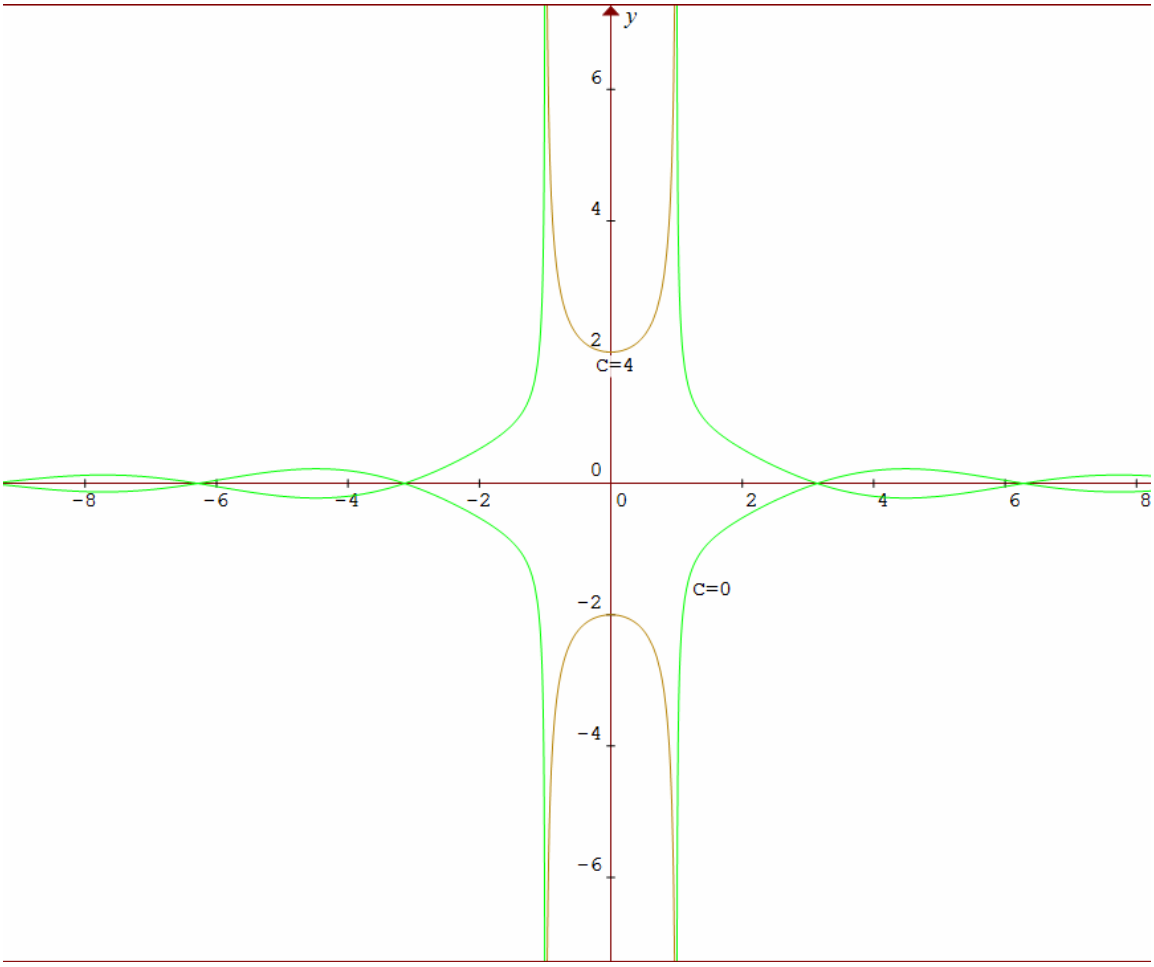
$$\left(\cos x \, sen x - xy^2\right)dx + y\left(1-x^2\right)dy = 0$$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x} \therefore$$ es exacta

$$u(x,y) = \int y\left(1-x^2\right)dy + \phi(x) = \frac{\left(1-x^2\right)y^2}{2} + \phi(x)$$

$u_x = -xy^2 + \phi'(x) = \cos x \, sen x - xy^2 \to \phi'(x) = \cos x \, sen x \to \phi(x) = \dfrac{sen^2 x}{2}$ así la solución es $\left(1-x^2\right)y^2 + sen^2 x = C$



Ecuaciones Lineales de Primer Orden

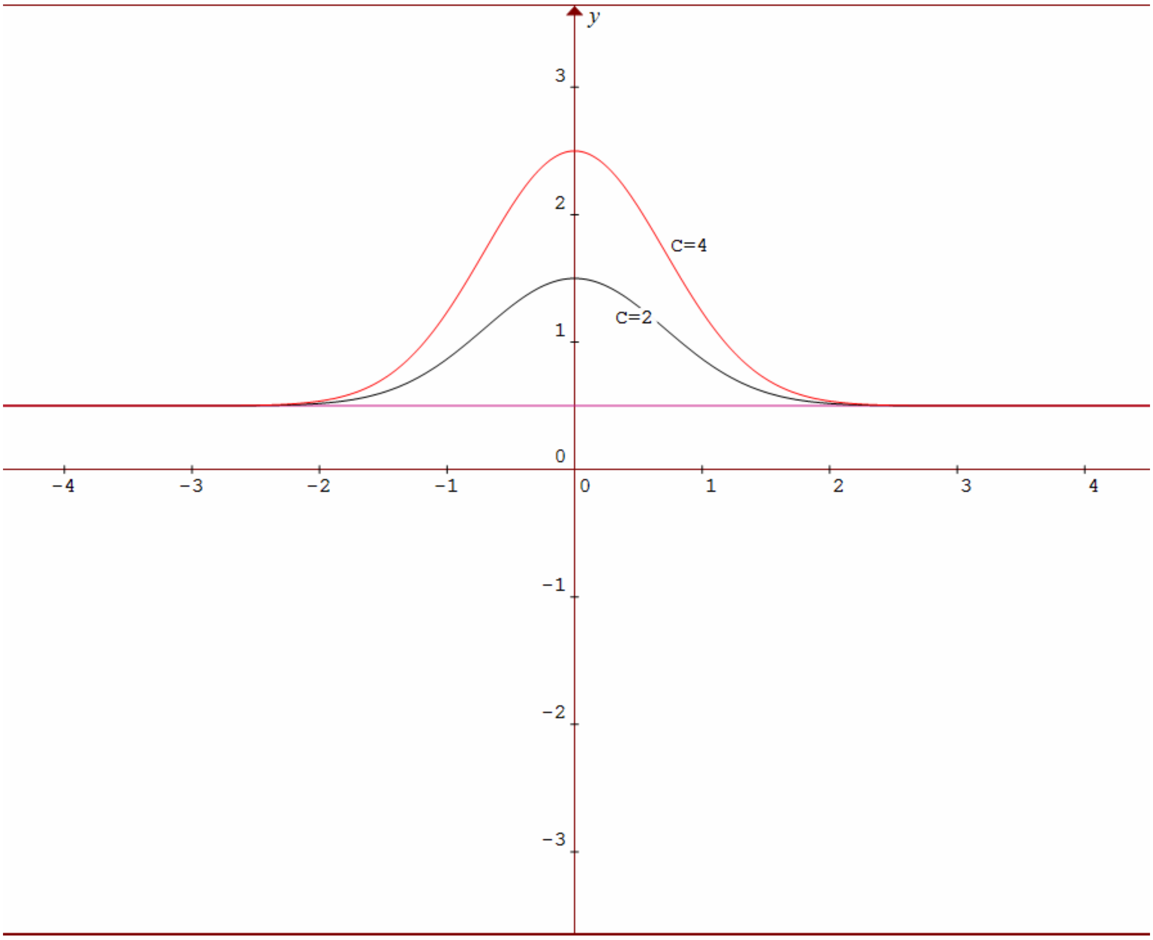
Problema 1.- Resolver

$y' + 2xy = x$

Solución

Podemos resolver esta ecuación multiplicándola por el factor integrante $u(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$. Obtenemos $e^{x^2}(dy + 2xydx) = xe^{x^2}dx$, el lado izquierdo es una diferencial exacta, o sea

$d\left(ye^{x^2}\right) = xe^{x^2}dx \rightarrow ye^{x^2} = \int xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C' \rightarrow e^{x^2}(2y-1) = C$

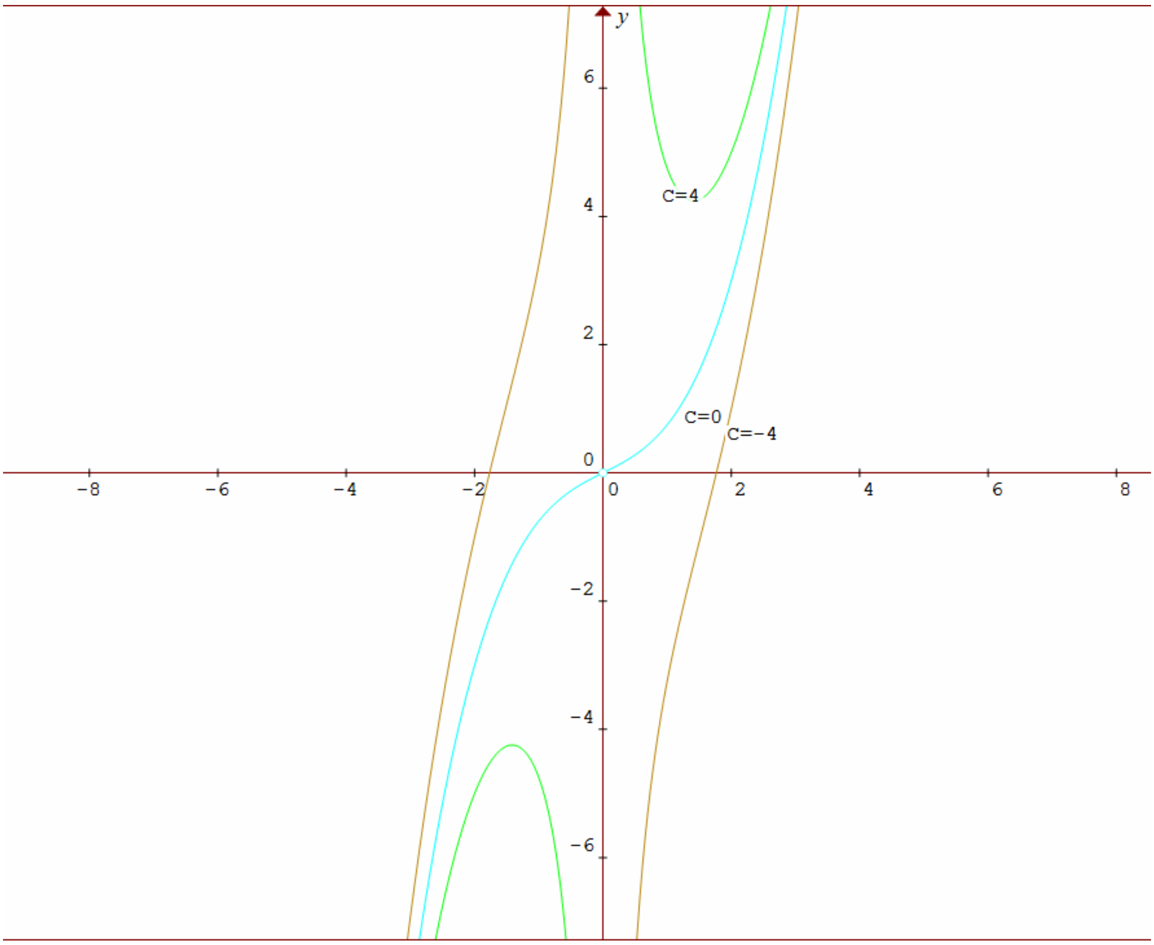


Problema 2.- Resolver

$x^2 y' + xy = x^4 + x^2$

Solución

Escribimos $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1$, ahora el factor integrante es $e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$. Entonces llegamos a $d(yx) = (x^3 + x)dx$ e integrando $yx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

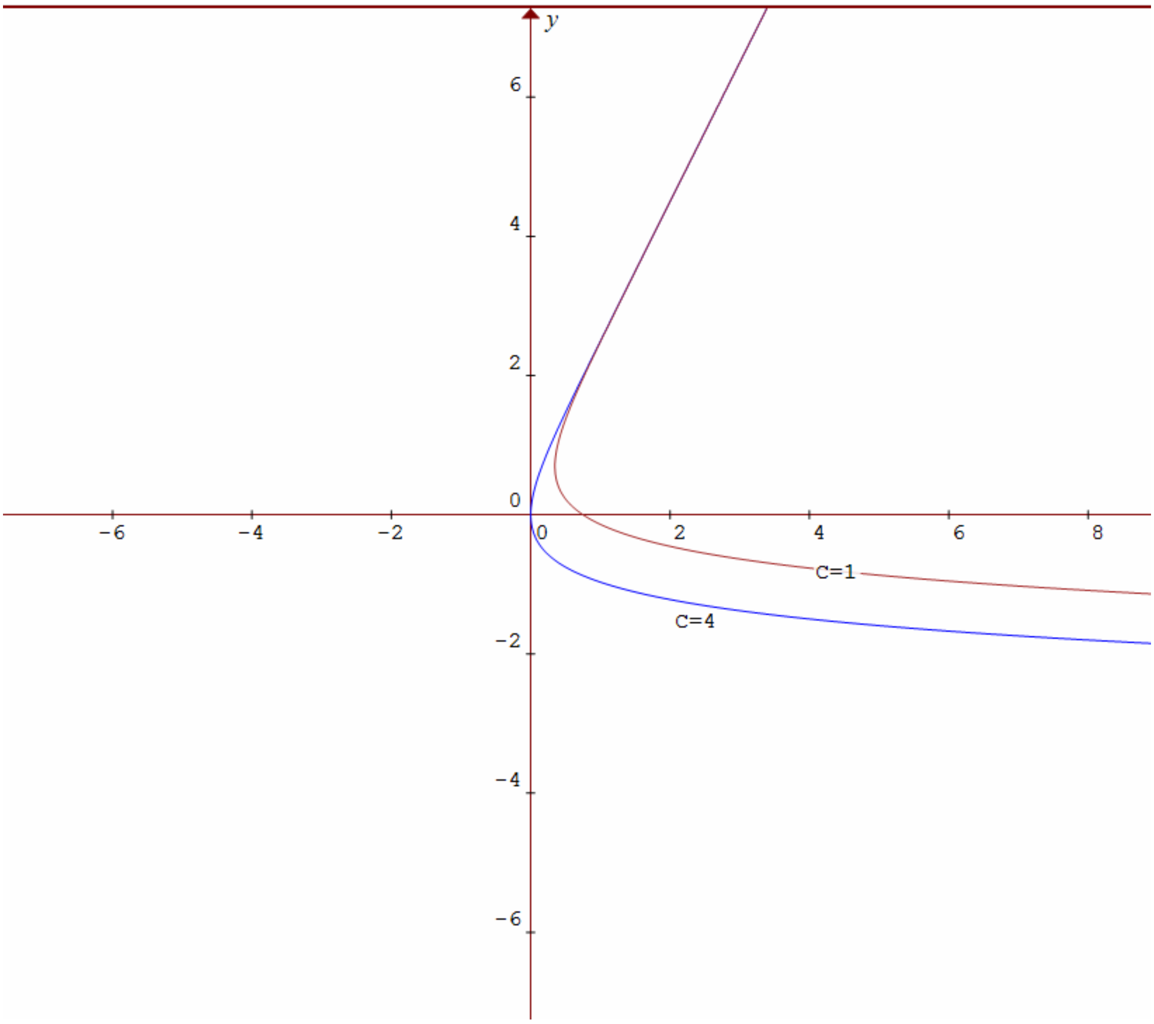


Problema 3.- Resolver

$dx + 2xdy = ydy$

Solución

Escribimos $\dfrac{dx}{dy} + 2x = y$ y un factor integrante es $e^{\int 2dy} = e^{2y}$ de donde llegamos a $d\left(xe^{2y}\right) = ye^{2y}dy$ e integrando llegamos a $xe^{2y} = \dfrac{1}{4}e^{2y}\left(2y-1\right) + C'$ o $4x = 2y - 1 + Ce^{-2y}$

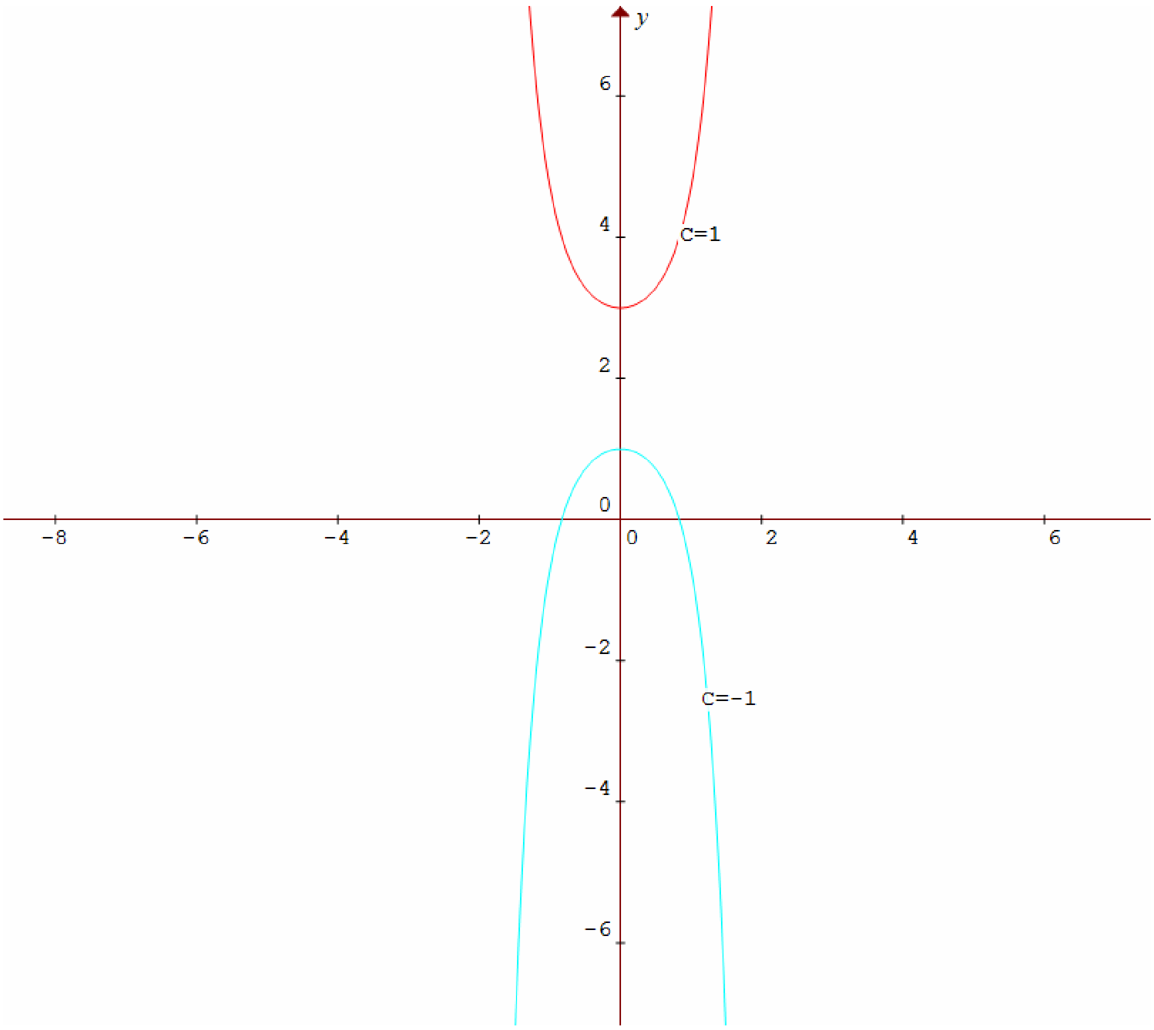


Problema 4.- Resolver

$$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$$

Solución

Hagamos $y=uv$ y reemplacemos, nos queda $u\left(\frac{dv}{du}+2xv\right)+v\frac{du}{dx}=4x$. Hacemos cero el paréntesis $\frac{dv}{dx}+2xv=0$ y resolvemos para v resulta $v=e^{-x^2}$ y reemplazamos en la ecuación $e^{-x^2}\frac{du}{dx}=4x$ y resolvemos para u de donde resulta $u=2e^{x^2}+C$ entonces $y=uv=\left(2e^{x^2}+C\right)e^{-x^2}=2+Ce^{-x^2}$



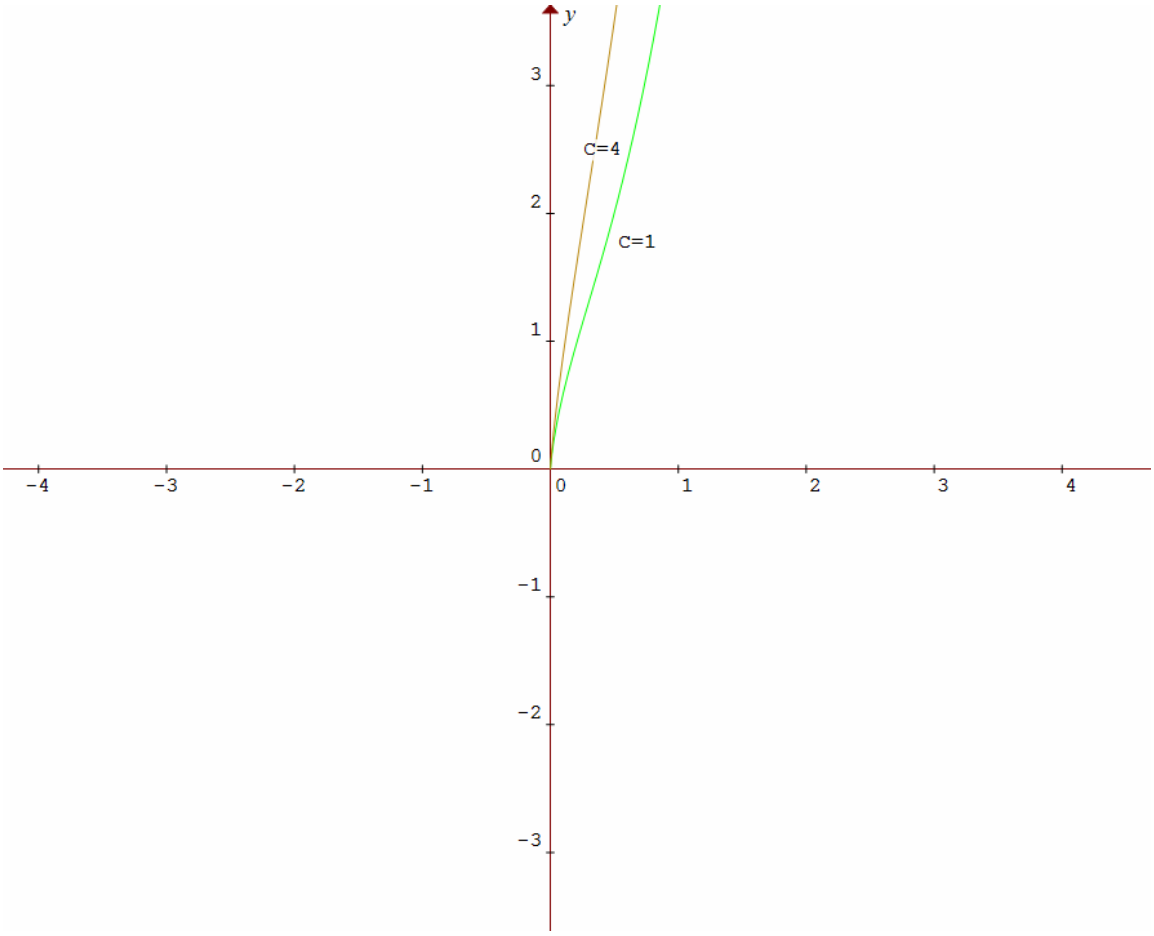
Problema 5.- Resolver

$$x\frac{dy}{dx}=y+x^3+3x^2-2x$$

Solución

Escribimos $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2+3x-2$. Siguiendo el método anterior con $y=uv$ se tiene $\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=0$ de donde resulta $v=x$ y análogamente determinamos $u=\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C$ de donde $y=uv=\left(\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right)x$

$$\rightarrow y=\frac{x^3}{2}+3x^2-2x\ln x+Cx$$

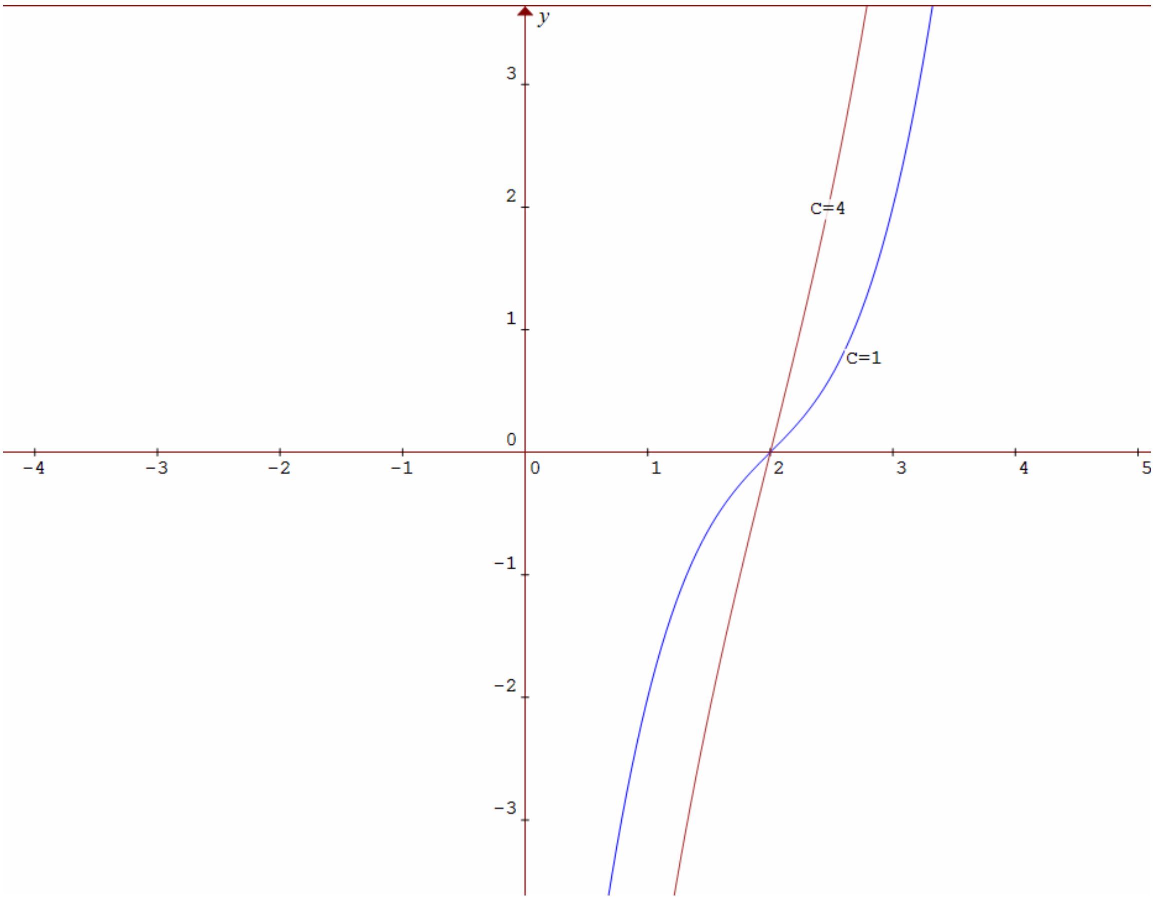


Problema 6.- Resolver

$$(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$$

Solución

Escribimos $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x-2}=2(x-2)^2$ haciendo $y=uv$ llegamos a la ecuación $\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x-2}=0$ de donde $v=x-2$ y reemplazando obtenemos $u=(x-2)^2+C$ de donde $y=uv=\left((x-2)^2+C\right)(x-2)\rightarrow y=(x-2)^3+C(x-2)$

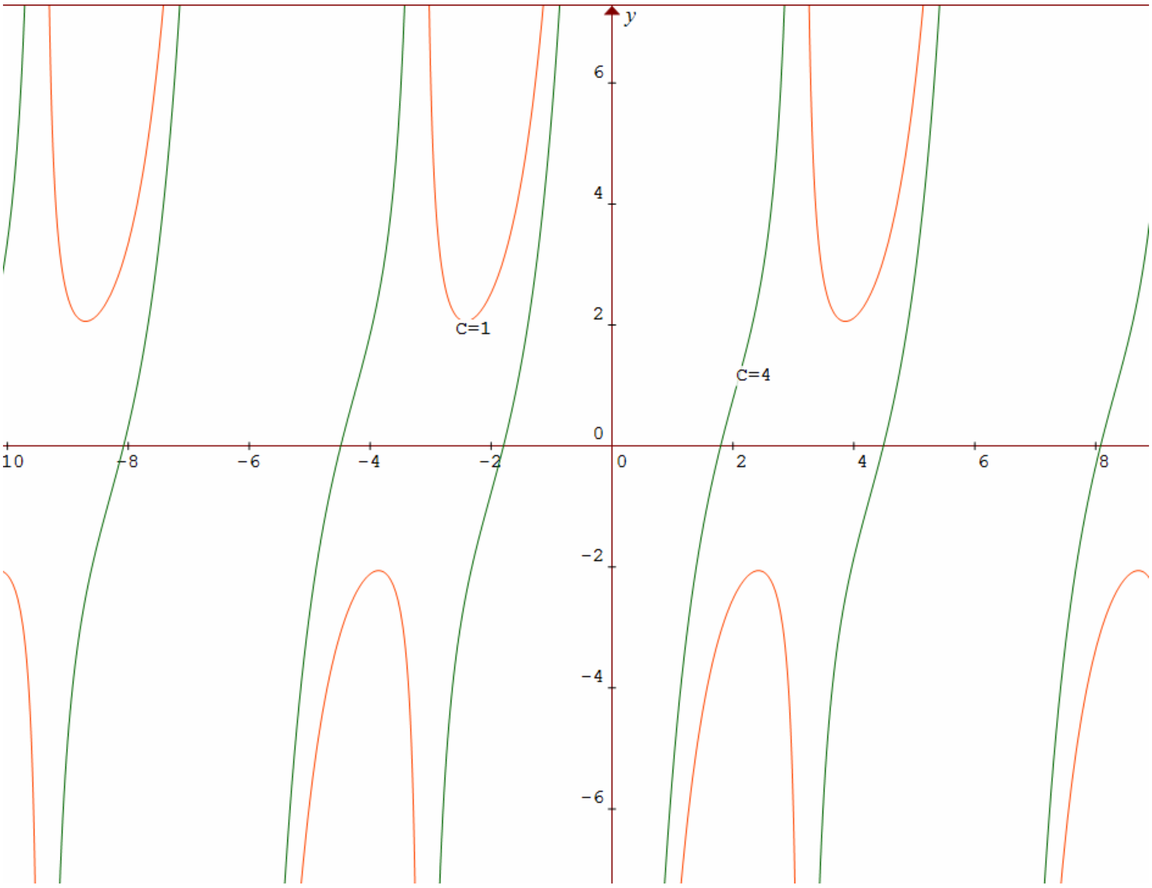


Problema 7.- Resolver

$$\frac{dy}{dx} + yctgx = 5e^{\cos x}$$

Solución

Haciendo $y = uv$ y siguiendo el método anterior llegamos a la ecuación $\frac{dv}{dx} + vctgx = 0$ de donde se obtiene $v = \frac{1}{senx}$ y reemplazando se obtiene $u = -5e^{\cos x} + C$, así $y = uv = \left(-5e^{\cos x} + C\right)\frac{1}{senx} = -\frac{5}{senx}e^{\cos x} + \frac{C}{senx}$

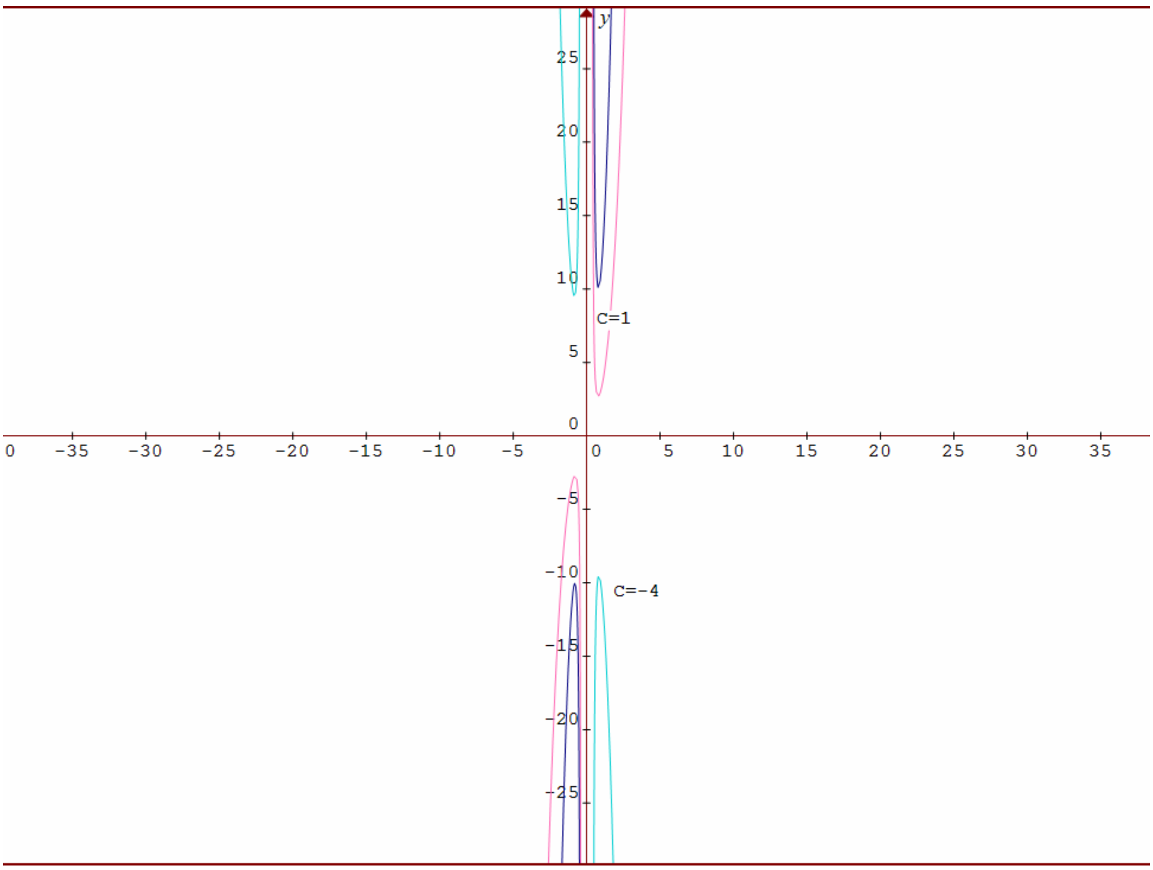


Problema 8.- Resolver

$$x^3 \frac{dy}{dx} + \left(2 - 3x^2\right) y = x^3$$

Solución

Escribimos $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2-3x^2}{x^3}\right) y = 1$ hacemos $y = uv$ reemplazamos y resolvemos la ecuación $\frac{dv}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3} v = 0$ de donde resulta $v = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$ remplazamos y obtenemos $u = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C$ de donde resulta $y = uv = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C\right) x^3 e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} x^3 + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

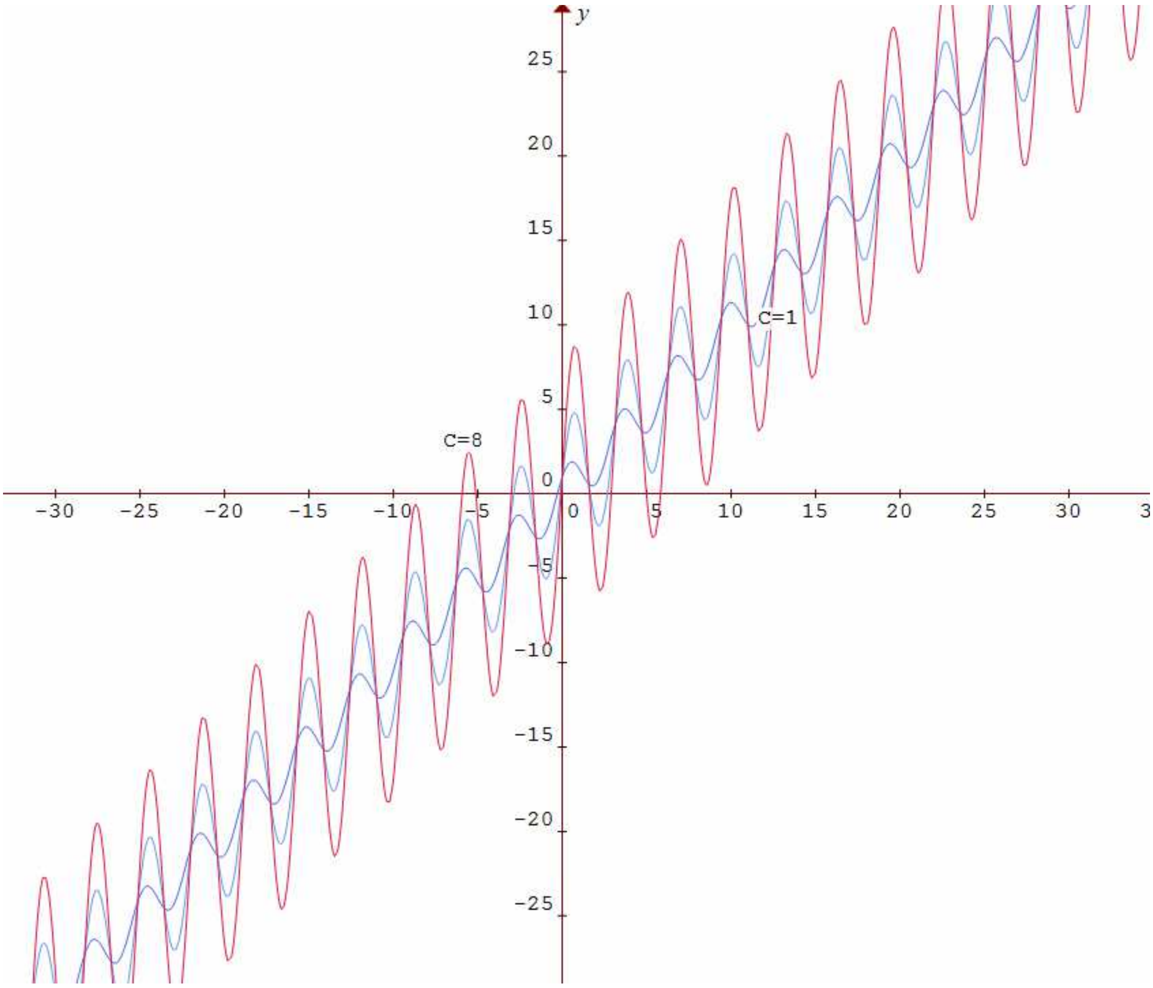


Problema 9.- Resolver

$$\frac{dy}{dx}-2yctg2x=1-2xctg2x-2\cos ec2x$$

Solución

Hacemos $y=uv$ y resolvemos la ecuación $\frac{dv}{dx}-2vctg2x=0$ e donde resulta $v=sen2x$ reemplazando v resolviendo para u tenemos $u=x\cos ec2x+ctg2x+C$ así $y=uv=\left(x\cos ec2x+ctg2x+C\right)sen2x\rightarrow y=x+\cos 2x+Csen2x$



Problema 10.- Resolver

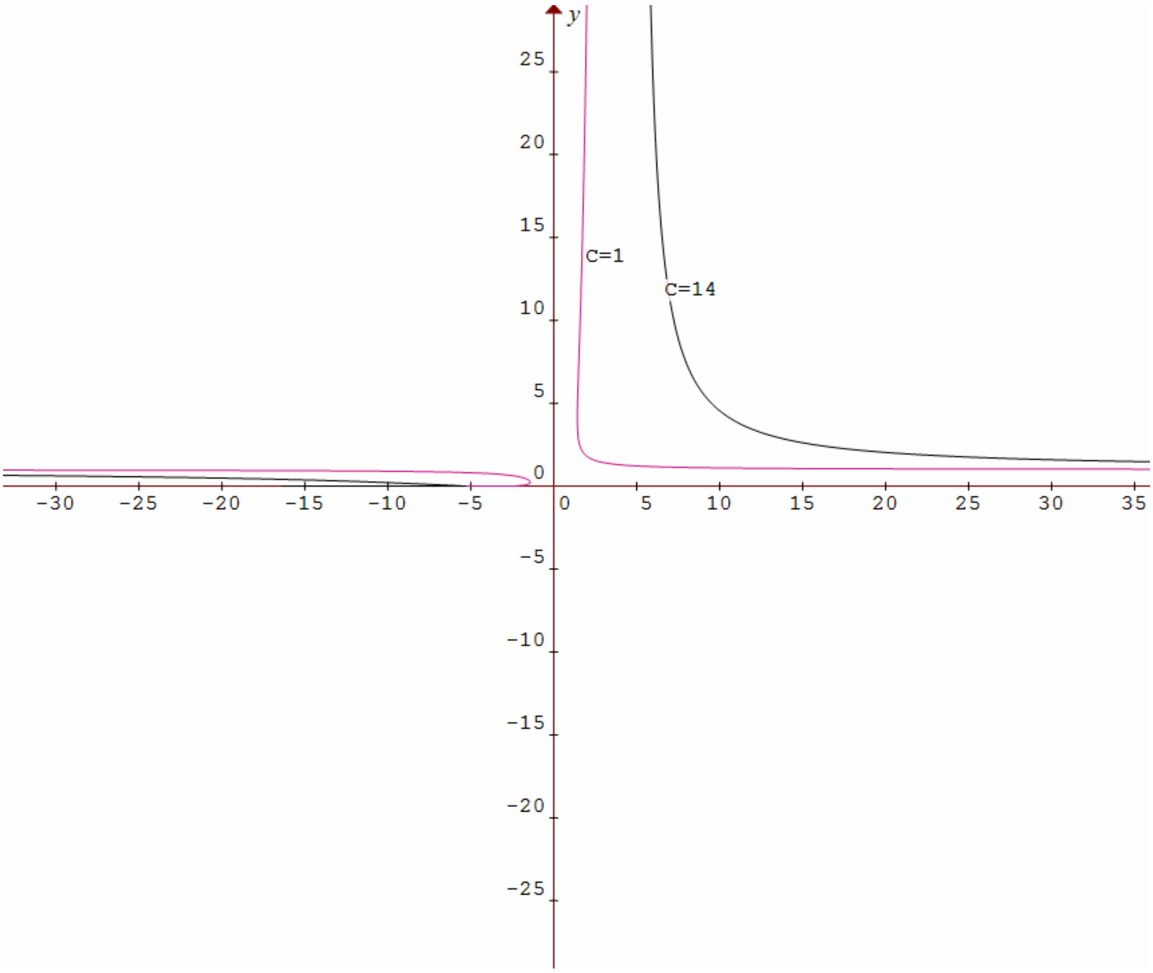
$$y\ln y dx + \left(x - \ln y\right) dy = 0$$

Solución

Escribimos $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1}{y\ln y}x = \dfrac{1}{y}$ hacemos $x = uv$ reemplazamos y resolvemos para v

$\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{v}{y\ln y} = 0 \rightarrow v = \dfrac{1}{\ln y}$ y reemplazando v obtenemos $u = \dfrac{1}{2}\ln^2 y + C$ así

$$x = uv = \left(\frac{1}{2}\ln^2 y + C\right)\frac{1}{\ln y} = \frac{1}{2}\ln y + \frac{C}{\ln y}$$

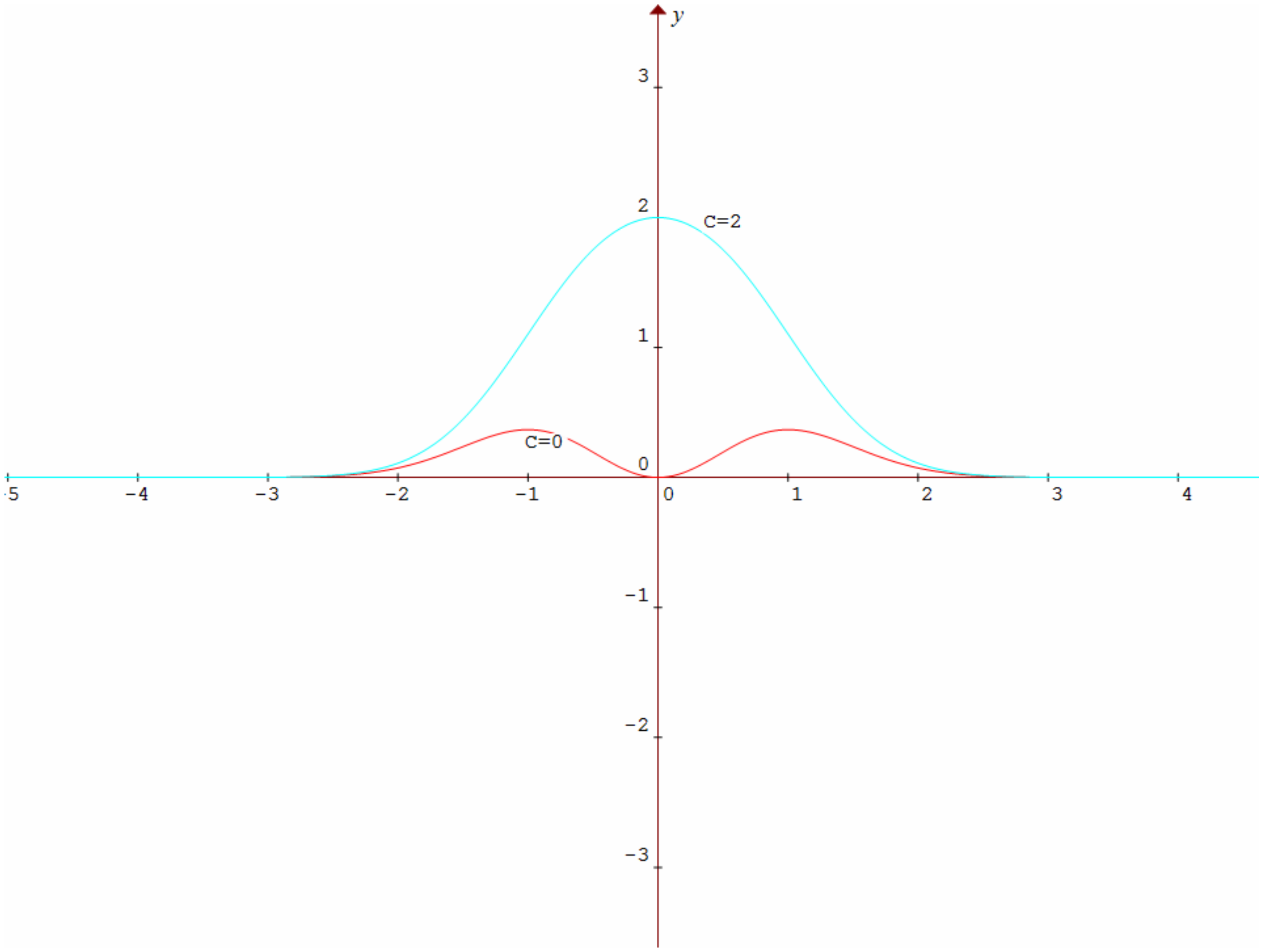


Problema 11.- Resolver

$y'+2xy=2xe^{-x^2}$

Solución

Un factor integrante es $u(x)=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$ así $d(ye^{x^2})=e^{x^2}2xe^{-x^2}dx=2xdx$ entonces $ye^{x^2}=x^2+C \rightarrow y=e^{-x^2}(x^2+C)$



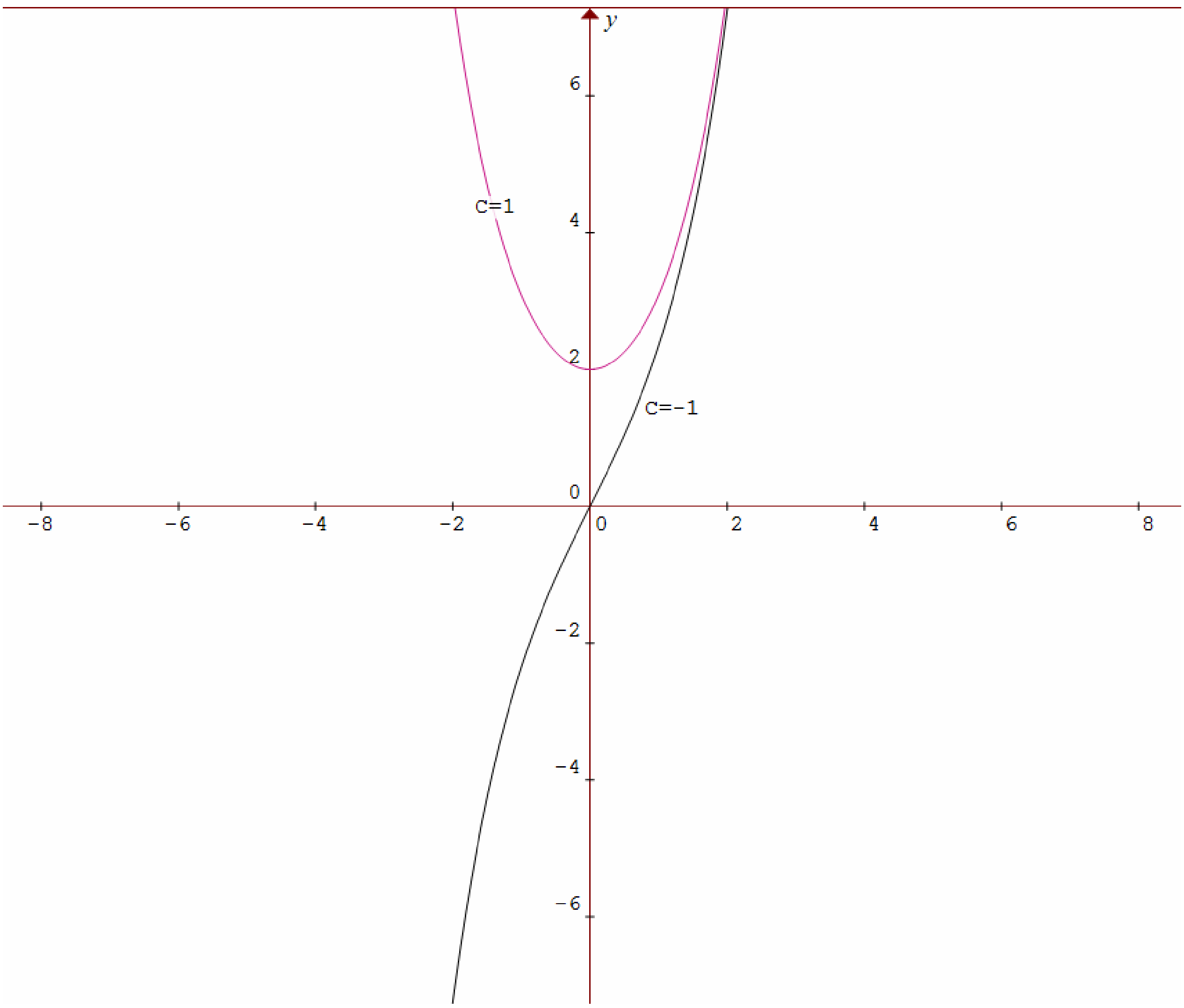
Problema 12.- Resolver

$y' + 2y = 3e^{x}$

Solución

Un factor integrante es $u(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$, Entonces

$d(ye^{2x}) = e^{x}3e^{x} = 3e^{3x} \rightarrow e^{2x}y = e^{3x} + C \rightarrow y = e^{x} + Ce^{-2x}$



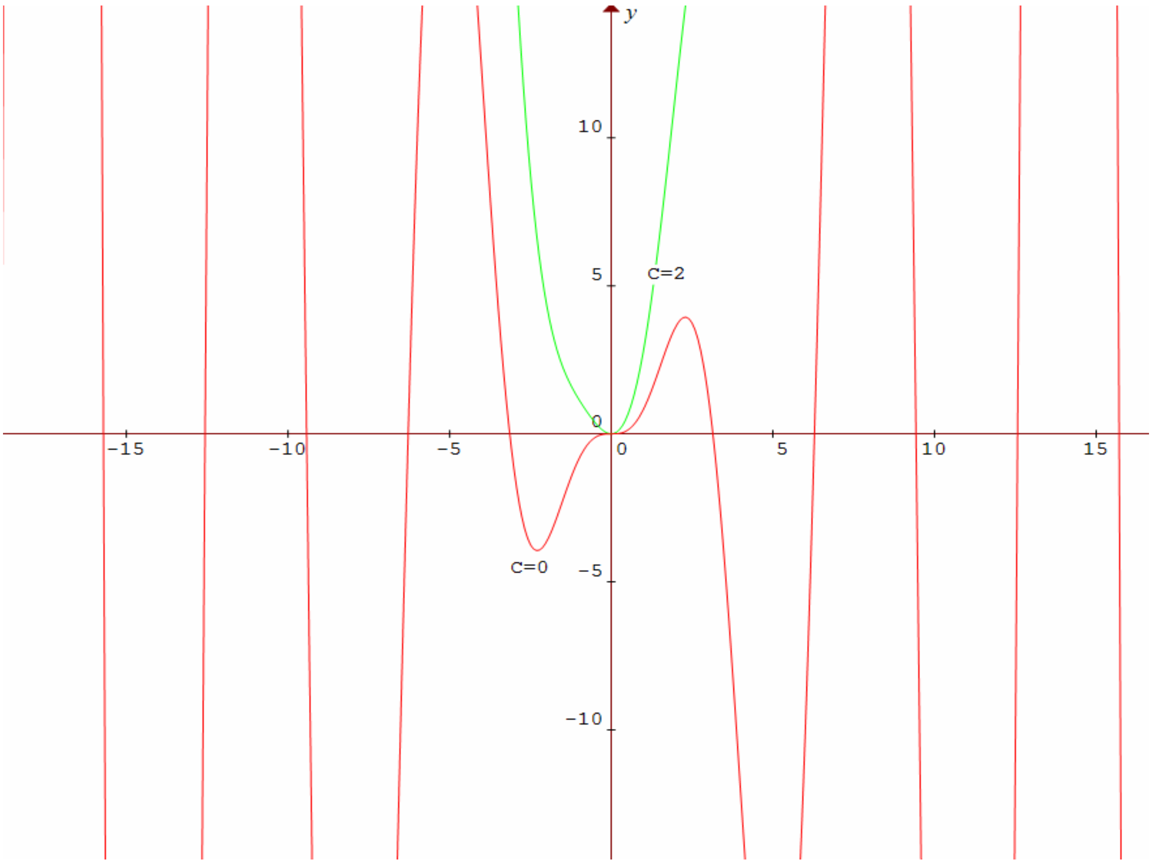
Problema 13.- Resolver

$$\frac{1}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=x\cos x$$

Solución

Escribimos $y'-\frac{2}{x}y=x^2\cos x$ un factor integrante es $u(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=x^{-2}$ así

$$d(yx^{-2})=x^{-2}x^2\cos xdx=\cos xdx \rightarrow x^{-2}y=senx+C \rightarrow y=x^2(senx+C)$$



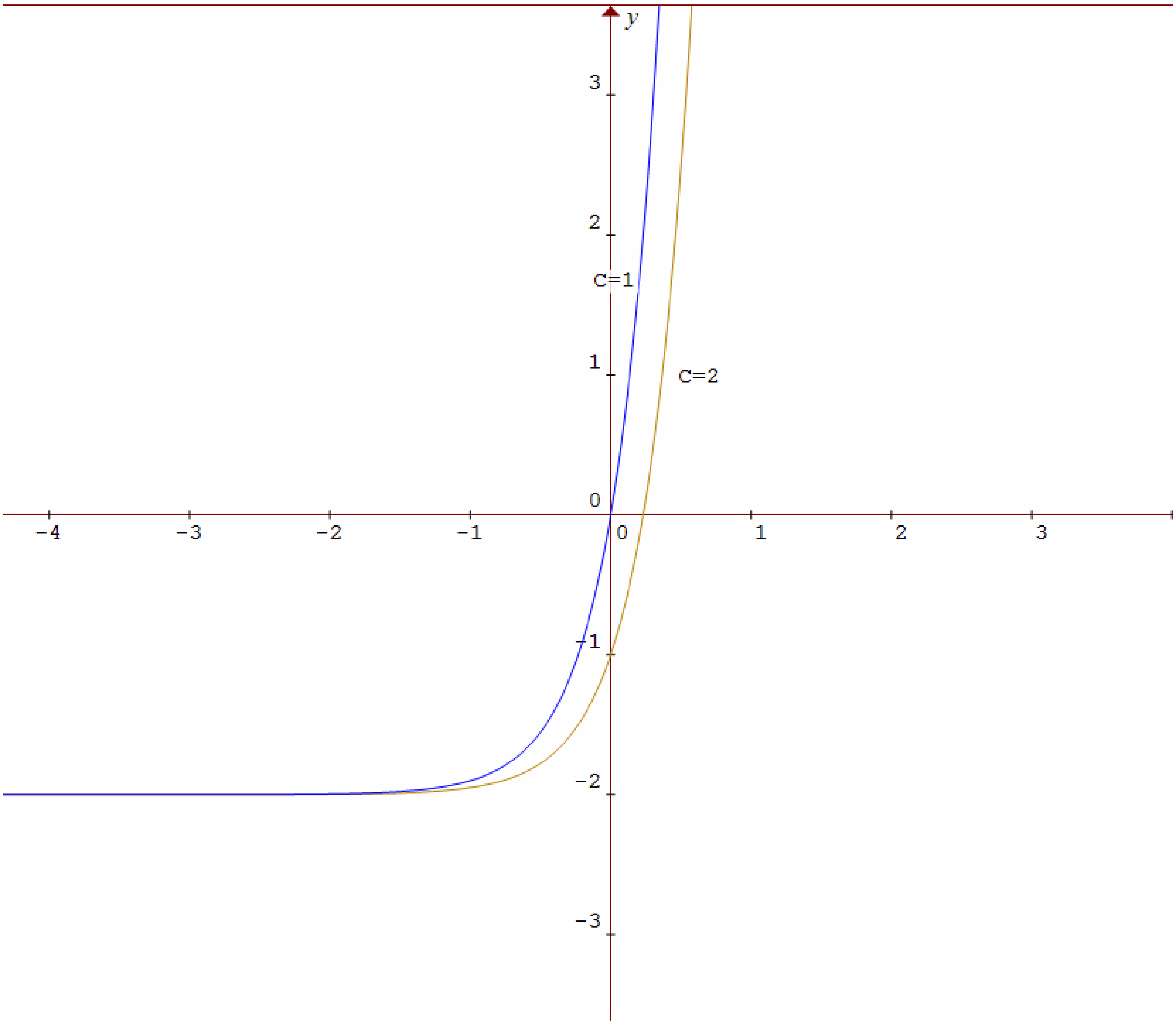
Problema 14.- Resolver

$$y' - 3y = 6$$

Solución

Un factor integrante es

$$u(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x} \Rightarrow d(ye^{-3x}) = 6e^{-3x}dx \Rightarrow ye^{-3x} = -2xe^{-3x} + C \Rightarrow y = -2 + Ce^{3x}$$



Problema 15.- Resolver

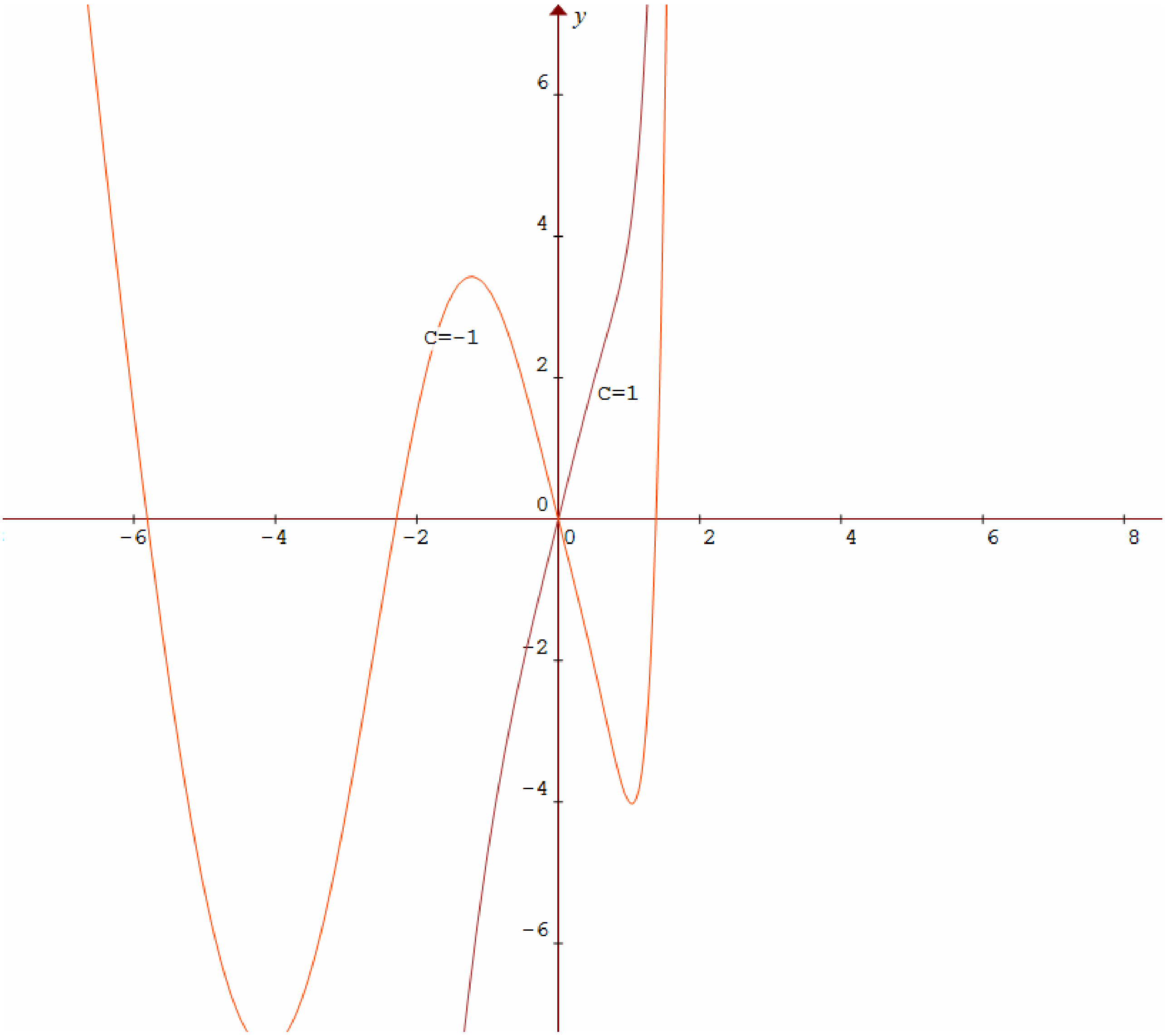
$$x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$$

Solución

Escribimos $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x$, un factor integrante es $u(x)=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$

Así , $d(yx^{-4})=x^{-4}x^5e^xdx=xe^xdx$ Integrando se tiene $yx^{-4}=xe^x-e^x+C$ o

$y=x^5e^x-x^4e^x+Cx^4$



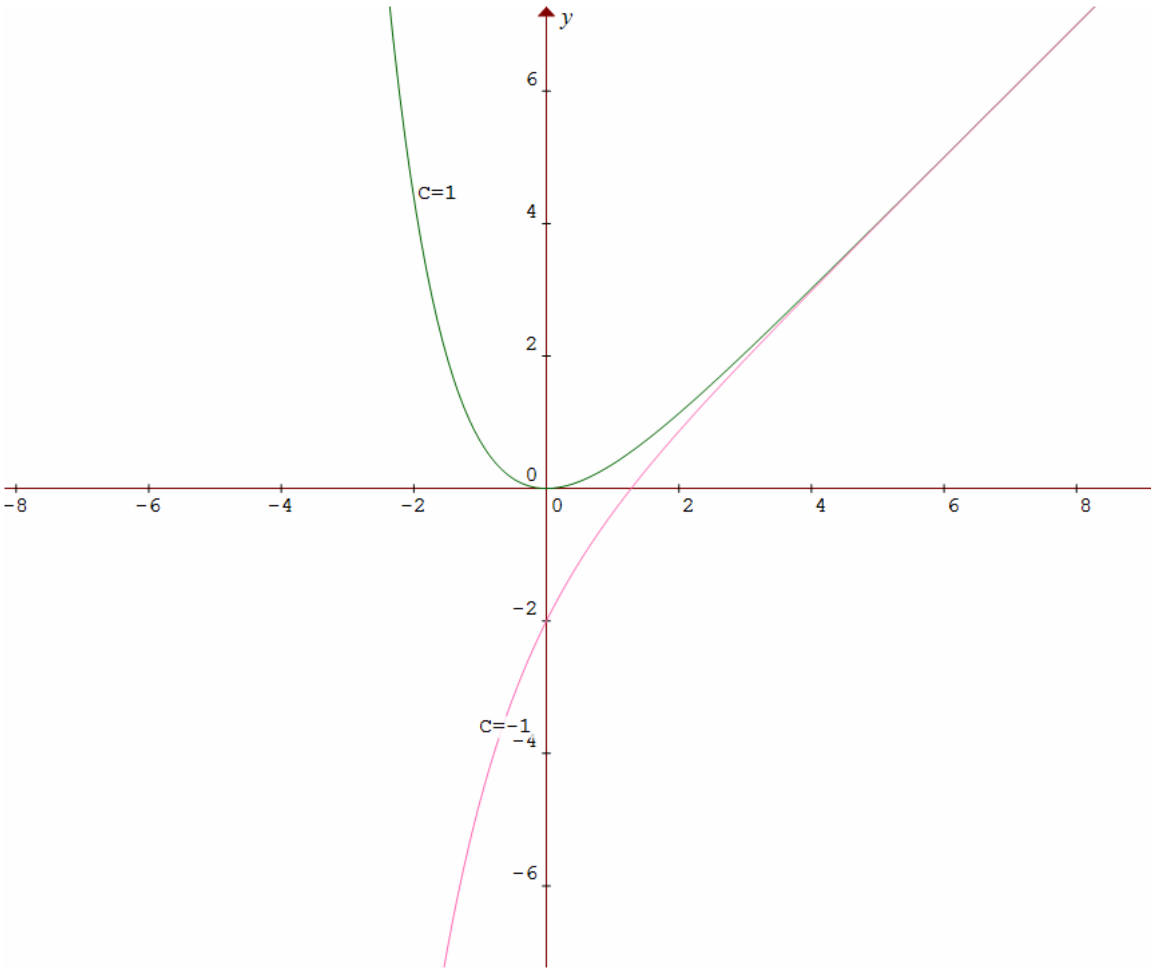
Problema 16.- Resolver

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

Solución

Un factor integrante es $u(x) = e^{\int dx} = e^x$ Así

$$\mathrm{d}(ye^x) = xe^x dx \Rightarrow ye^x = xe^x - e^x + C \Rightarrow y = x - 1 + Ce^{-x}$$



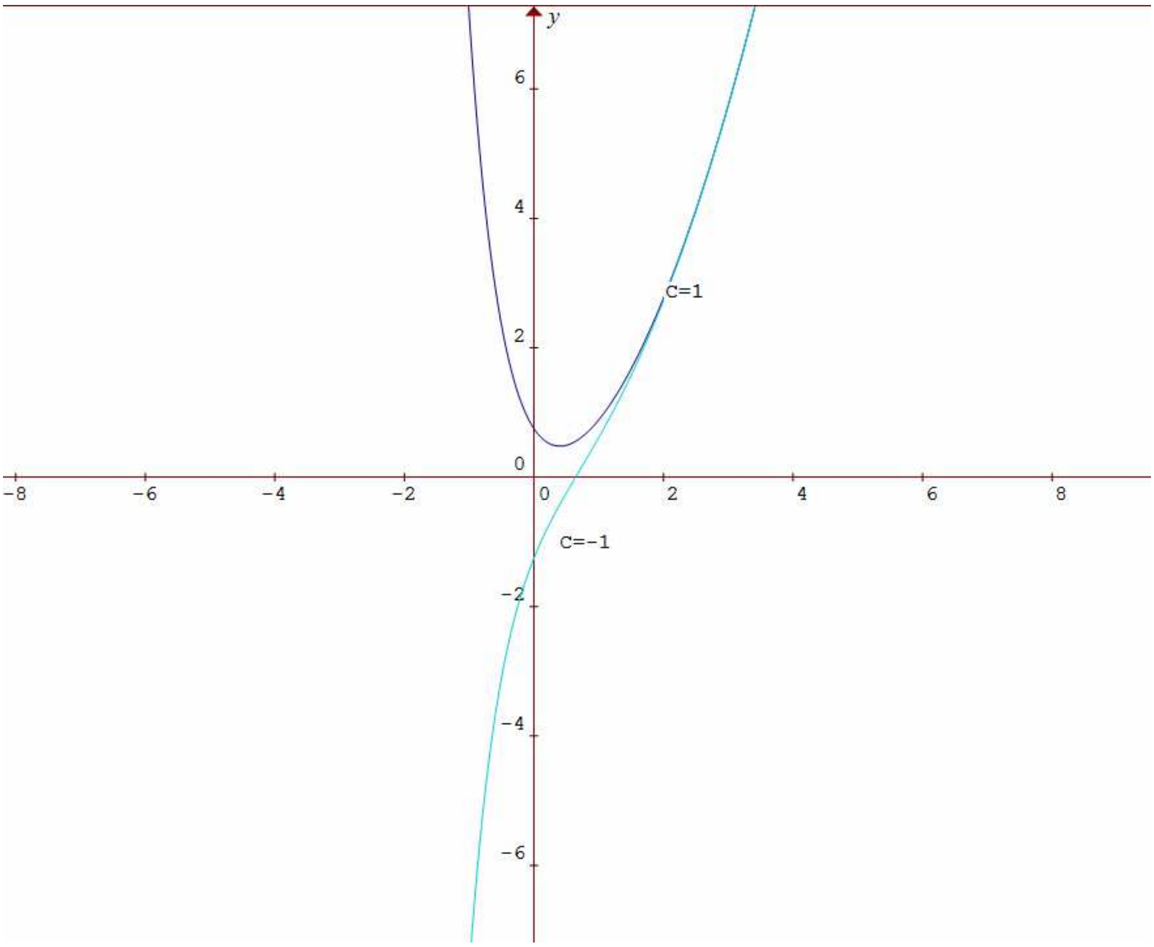
Problema 17.- Resolver

$$\frac{dy}{dx}+2y=x^2+2x$$

Solución

Un factor integrante es $u(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x}$,así $d(ye^{2x})=(x^2+2x)e^{x}dx$
Integrando y despajando y se tiene

$$y=\frac{2x^2+2x-1}{4}+Ce^{-2x}$$



Problema 18.- Resolver

$$x\ln x\frac{dy}{dx}-y=x^3(3\ln x-1)$$

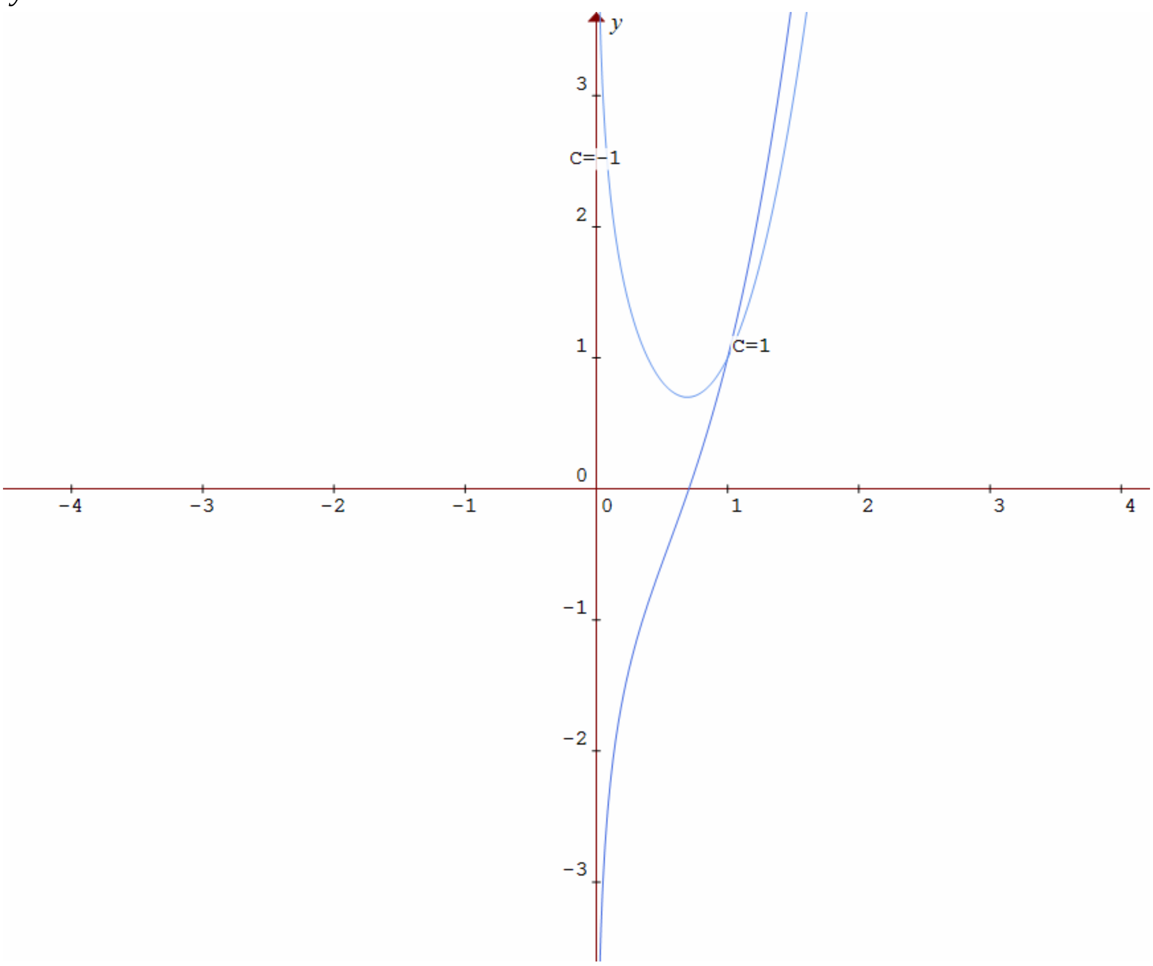
Solución

Escribimos $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x\ln x}y=\frac{x^2(3\ln x-1)}{\ln x}$. Un factor integrante es

$$u(x)=e^{\int-\frac{dx}{x\ln x}}=e^{-\ln\ln x}=\frac{1}{\ln x}$$

Así, $d(y\frac{1}{\ln x})=\frac{x^2(3\ln x-1)}{\ln^2 x}dx$. Integrando y despejando se tiene

$$y=x^3+C\ln x$$



Problema 19.- Resolver

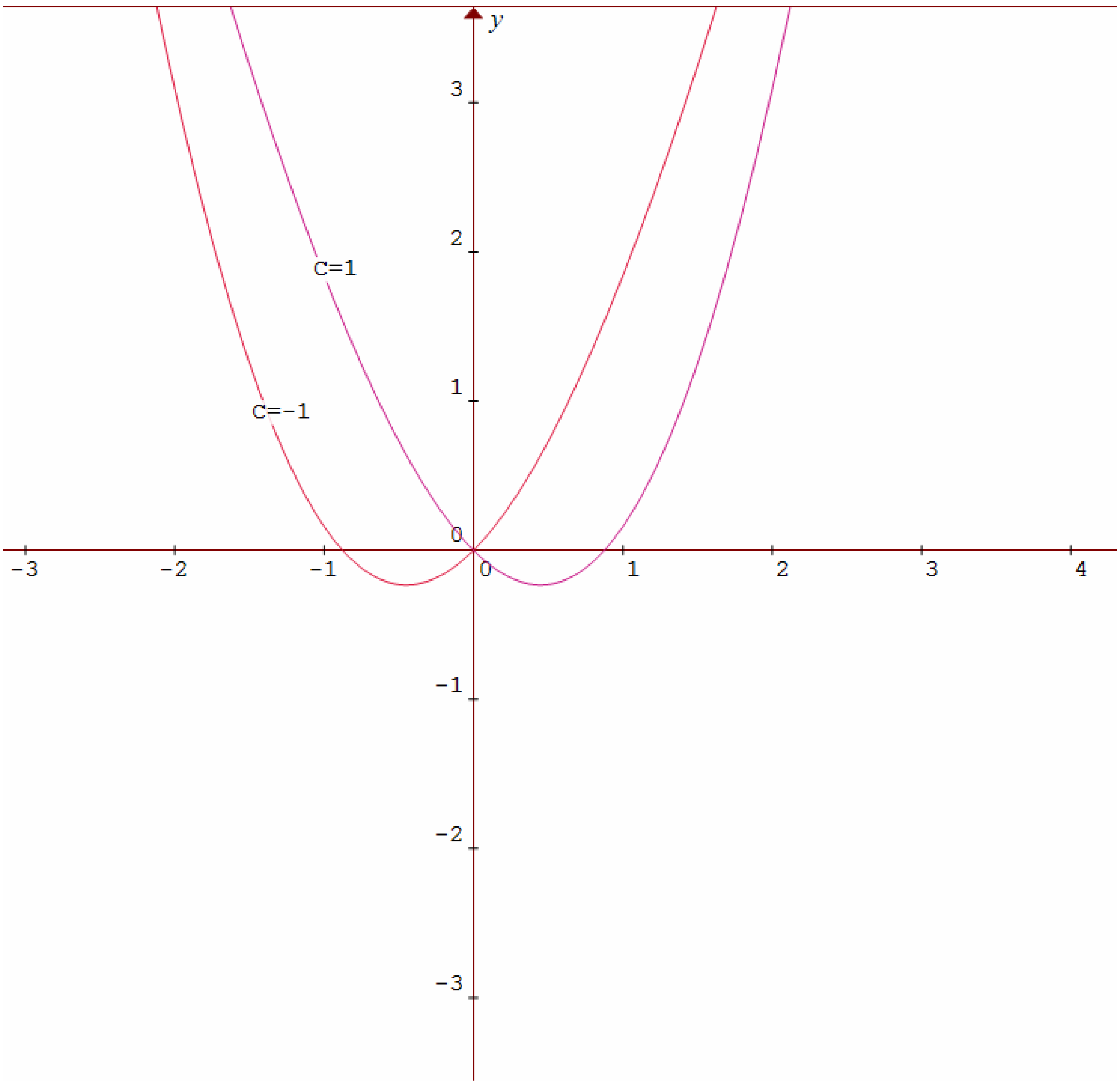
$$\frac{dy}{dx} - yctgx = 2x - x^2 ctgx$$

Solución

Un factor integrante es $u(x) = e^{\int -ctgxdx} = e^{-\ln senx} = \dfrac{1}{senx}$. Así ,

$d(\dfrac{y}{senx}) = \dfrac{2x - x^2 ctgx}{senx} dx$, integrando y despejando se tiene

$$y = x^2 + Csenx$$



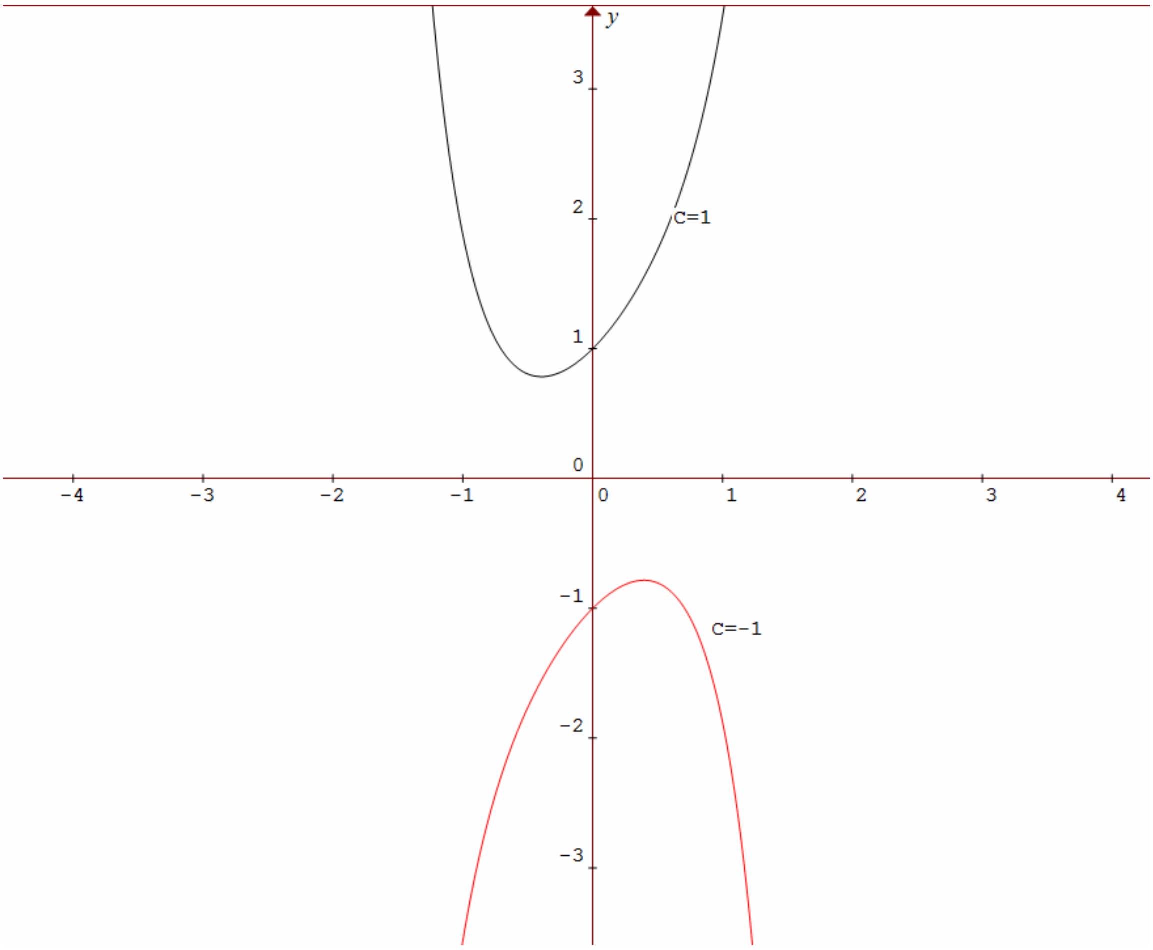
Problema 20.- Resolver

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2xsenx$$

Solución

Un factor integrante es $u(x) = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2}$,así $d(ye^{-x^2}) = (\cos x - 2xsenx)e^{-x^2}dx$

Integrando y despejando se tiene $y = senx + Ce^{x^2}$



Ecuaciones De Bernoulli

Problema 1.- Resolver

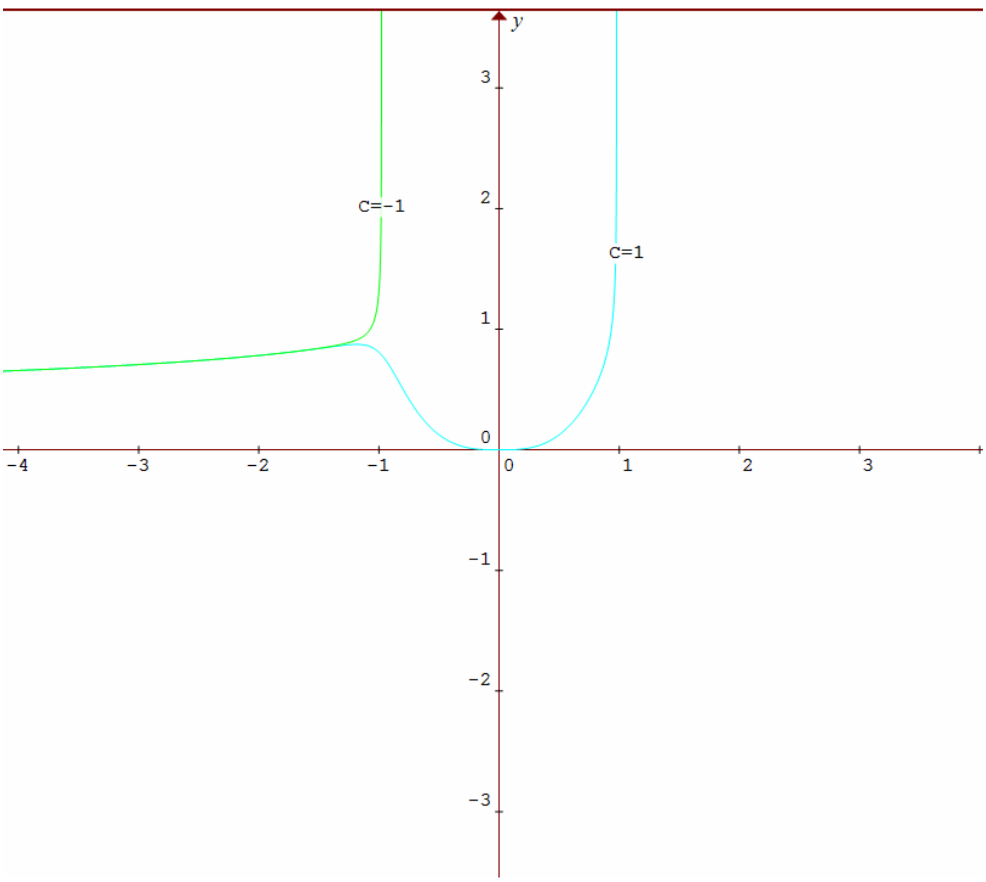
$$y' - \frac{3}{x}y = y^5$$

Solución

Hacemos $v = y^{-4}$, reemplazamos para obtener la ecuación lineal $v' + \frac{12}{x}v = -4$

cuyo factor integrante es $e^{\int \frac{12}{x}dx} = x^{12}$, así $d(vx^{12}) = -4x^{12}dx$

integrando resulta $v = y^{-4} = -\frac{4}{3}x + Cx^{-12}$

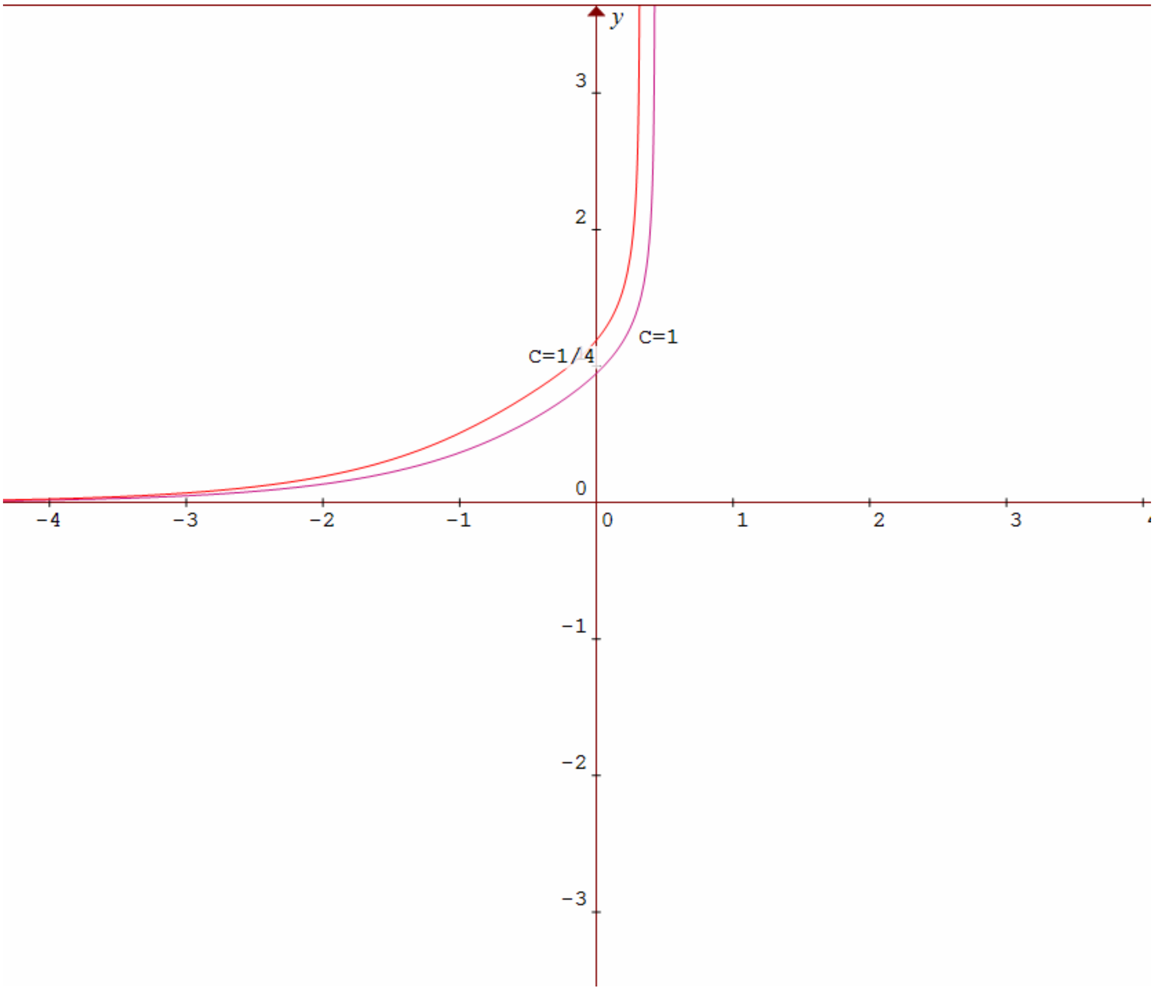


Problema 2.- Resolver

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5$$

Solución

Procediendo como en el problema anterior con $v = y^{-4}$ reemplazamos y la ecuación se convierte en $v' + 4v = -4x$ que es una ecuación lineal cuya solución es $v = y^{-4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$

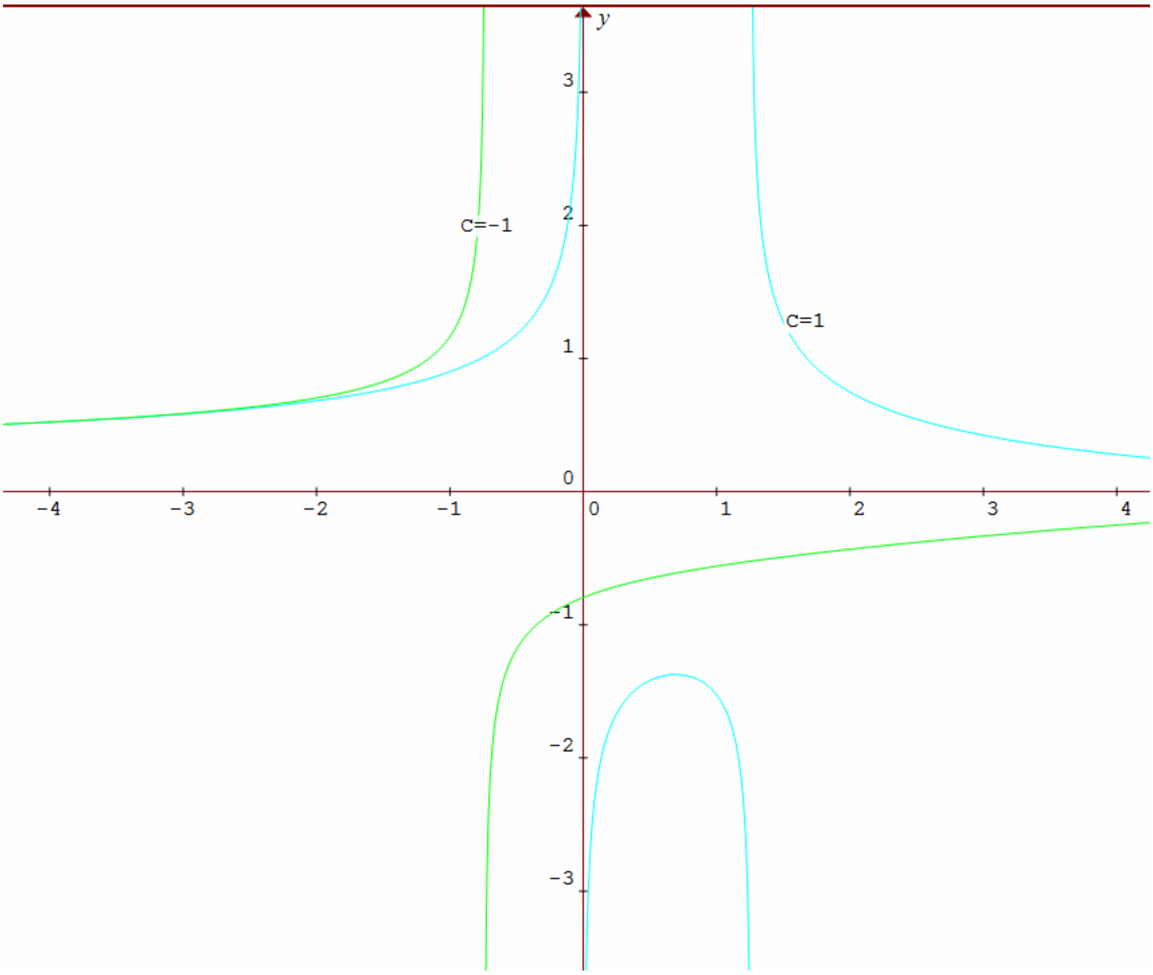


Problema 3.- Resolver

$$y' + \frac{y}{3} = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$$

Solución

Hacemos $v = y^{-3}$ reemplazamos y obtenemos la ecuación lineal $v' - v = 2x - 1$ cuya solución es $v = y^{-3} = -2x - 1 + Ce^x$

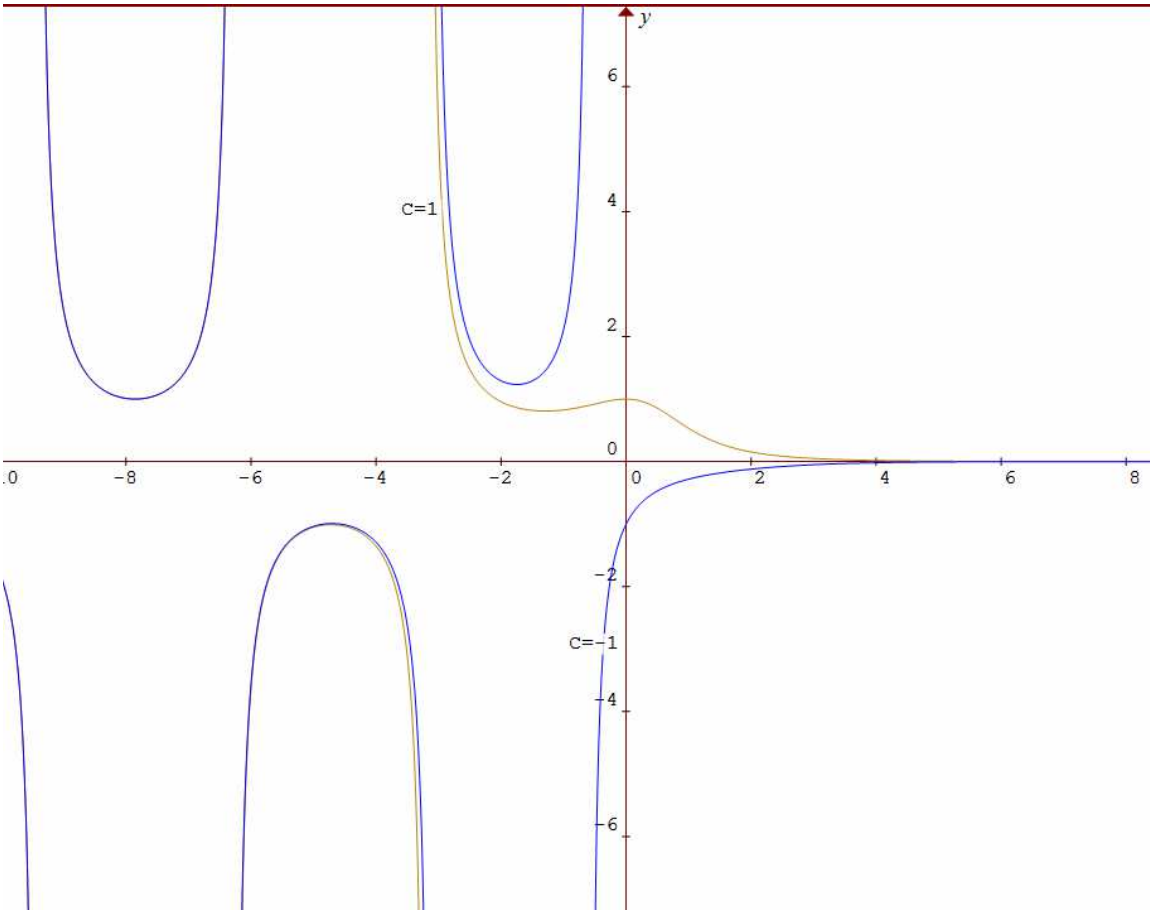


Problema 4.- Resolver

$y'+y=y^2(\cos x-senx)$

Solución

Hacemos $v=y^{-1}$,reemplazamos obteniendo la ecuación lineal $v'-v=senx-\cos x$ cuya solución es $v=y^{-1}=-senx+Ce^{x}$



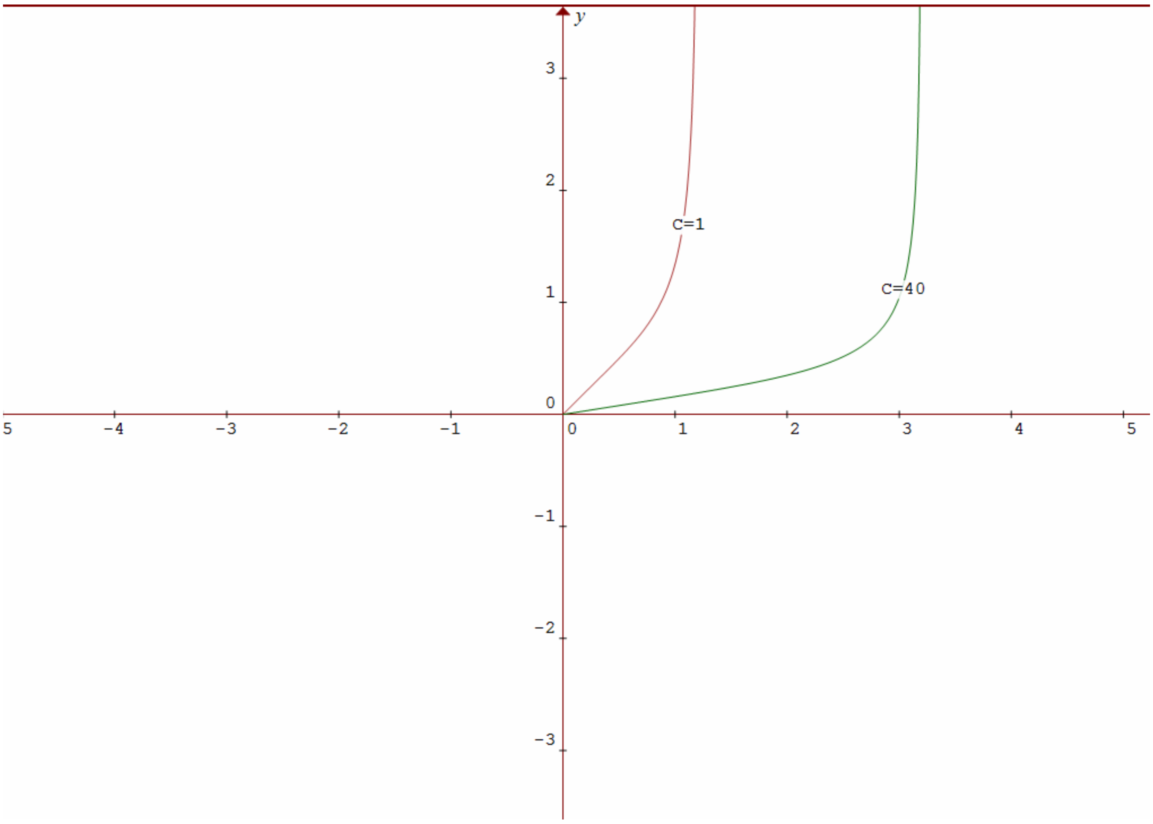
Problema 5.- Resolver

$$xdy-(y+xy^3(1+\ln x))dx=0$$

Solución

Escribimos $y'-\dfrac{y}{x}=(1+\ln x)y^3$. Hacemos $v=y^{-2}$, reemplazamos obteniendo la ecuación lineal $v'+\dfrac{2v}{x}=-2(1+\ln x)$, cuya solución es

$$v=y^{-2}=-\frac{4x}{9}-\frac{2}{3}x\ln x+Cx^{-2}$$

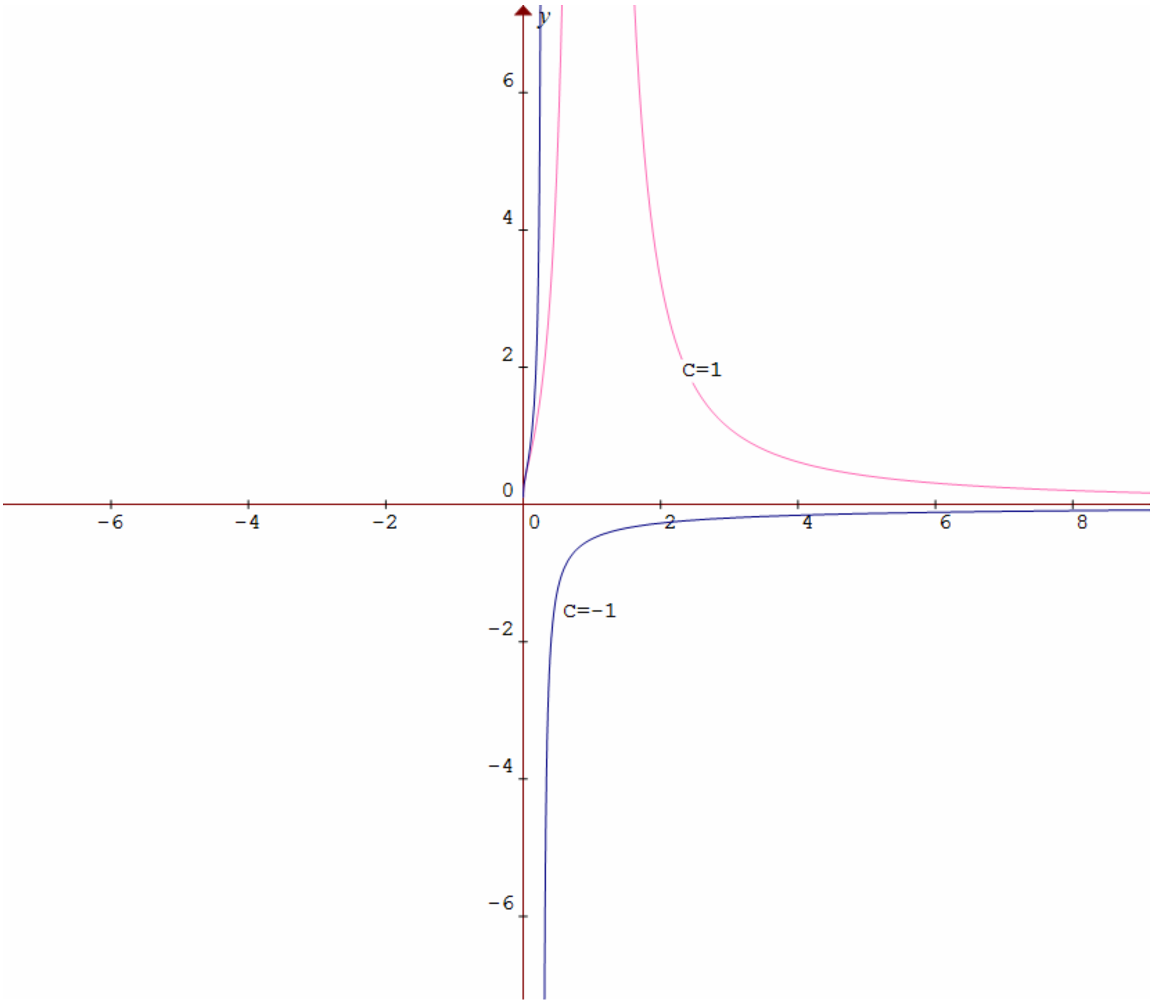


Problema 6.- Resolver

$xy' + y = y^2 \ln x$

Solución

Escribimos $y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$, hacemos $v = y^{-1}$, reemplazamos obteniendo la ecuación lineal $v' - \frac{v}{x} = \frac{\ln x}{x}$, cuya solución es $v = y^{-1} = -\ln x - 1 + Cx$



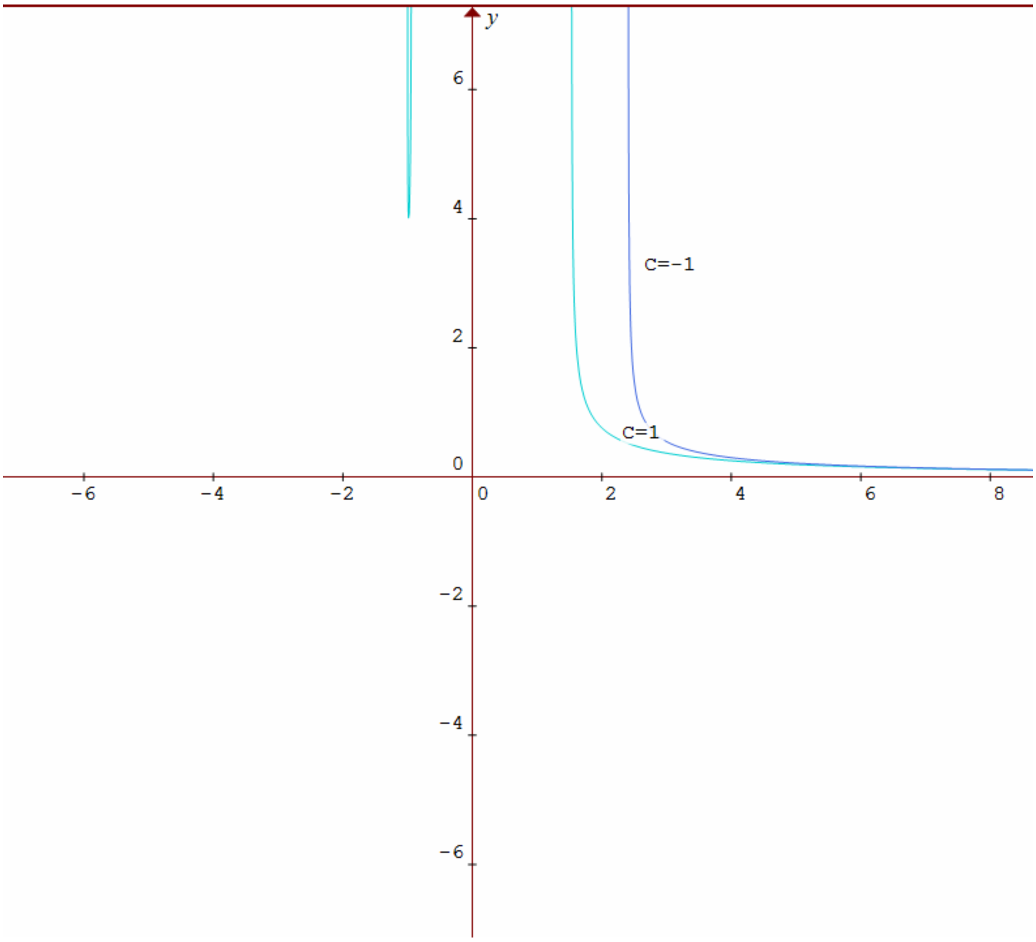
Problema 7.- Resolver

$$4(1+x)dy + y(1+4xy^2(1+x))dx = 0$$

Solución

Escribimos $y' + \dfrac{y}{4(1+x)} = -xy^3$, hacemos $v = y^{-2}$,reemplazamos y obtenemos la ecuación lineal $v' - \dfrac{2v}{4(1+x)} = 2x$, cuya solución es

$$v = y^{-2} = \frac{4(1+x)^2}{3} - 4(1+x) + C\sqrt{1+x}$$



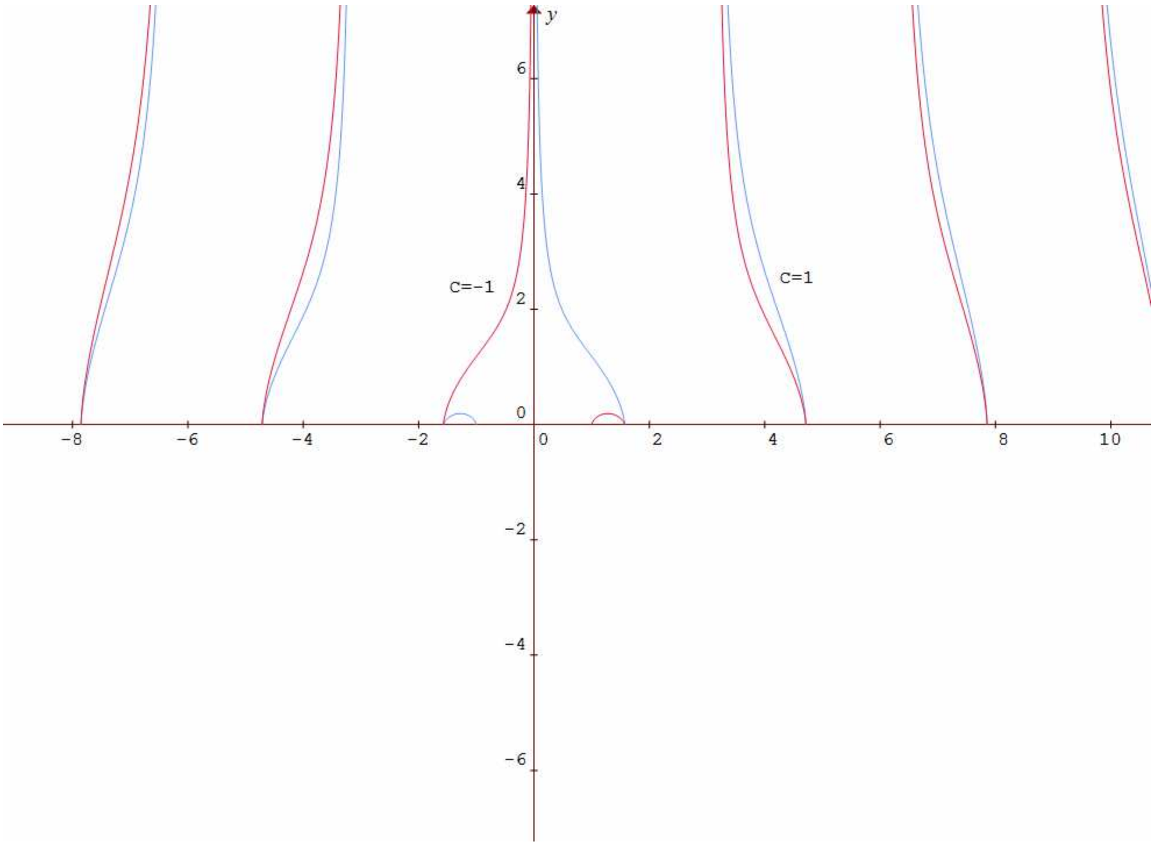
Problema 8.- Resolver

$$3y'+4\cos ec(2x)y = 2y^{\frac{-1}{2}}ctgx$$

Solución

Escribimos $y'+\frac{4}{3}\cos ec(2x)y = \frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}ctgx$, hacemos $v = y^{\frac{3}{2}}$, reemplazamos llegando a la ecuación $v'+2\cos ecc(2x)v = ctgx$ cuya solución es

$$v = y^{\frac{3}{2}} = xctgx + Cctgx$$

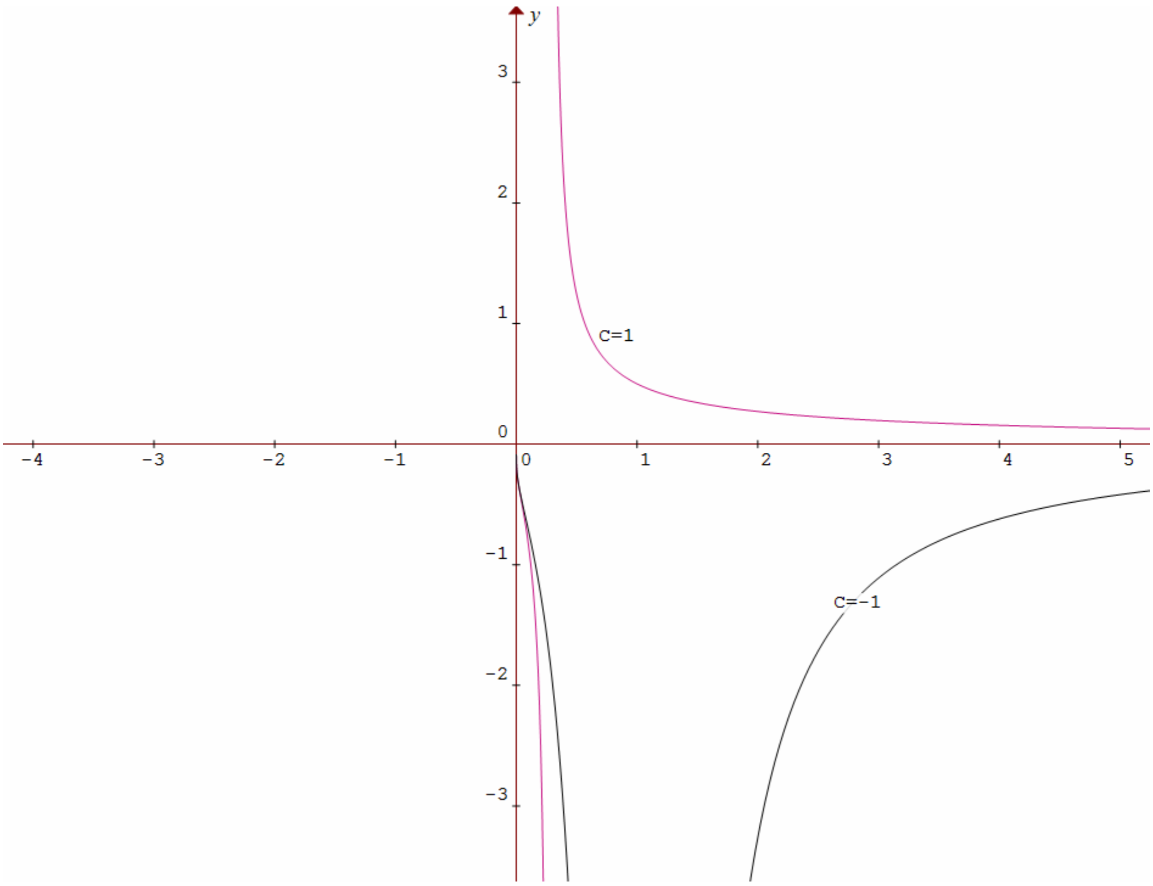


Problema 9.- Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

Solución

Escribimos $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\ln x}{x} y^2$, hacemos $v = y^{-1}$, reemplazamos y obtenemos la ecuación $v' - \dfrac{v}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}$, cuya solución es $v = y^{-1} = \ln x + 1 + Cx$



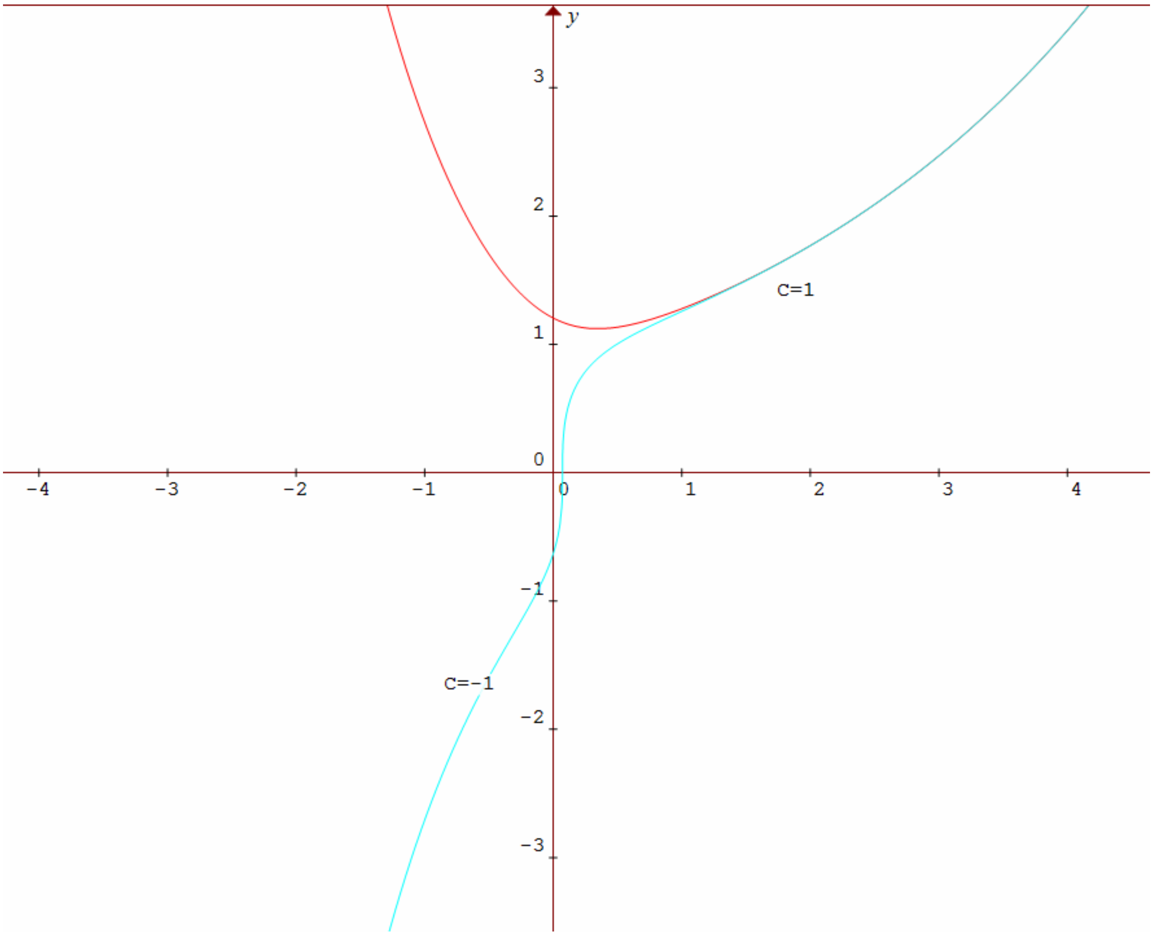
Problema 10.- Resolver

$$y' + y = e^x y^{-2}$$

Solución

Hacemos $v = y^3$, reemplazamos obteniendo la ecuación $v' + 3v = 3e^x$ cuya solución es

$$v = y^3 = \frac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}$$

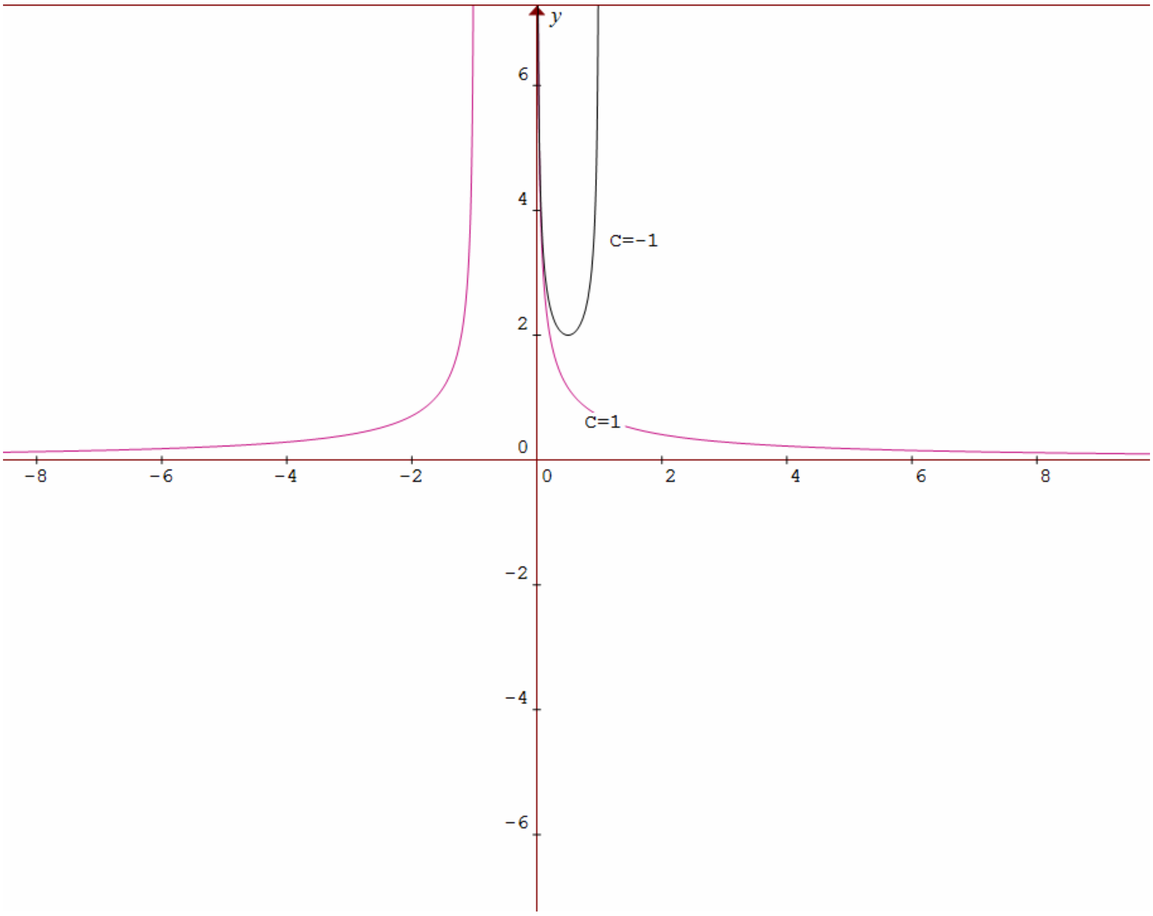


Problema 11.- Resolver

$$2xy' + 2y = xy^3$$

Solución

Escribimos $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^3}{2}$, hacemos $v = y^{-2}$, reemplazamos y obtenemos $v' - \frac{2v}{x} = -1$, cuya solución es $v = y^{-2} = x + Cx^2$



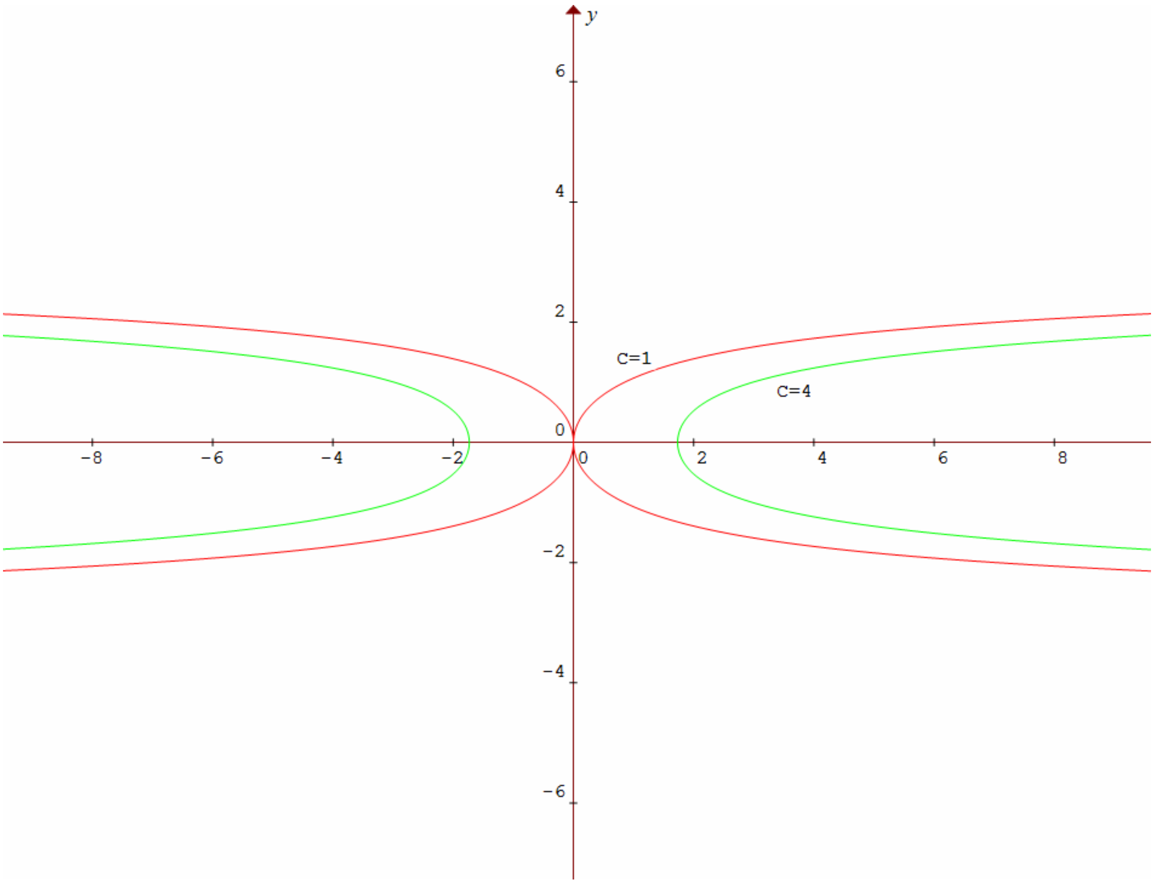
Problema 12.- Resolver

$$y' = \frac{x}{x^2 y + y^3}$$

Solución

La escribimos como $x' - xy = y^3 x^{-1}$, hacemos $v = x^2$ reemplazamos y obtenemos $v' - 2yv = 2y^3$ cuya solución es

$v = x^2 = -y^2 - 1 + Ce^{y^2}$

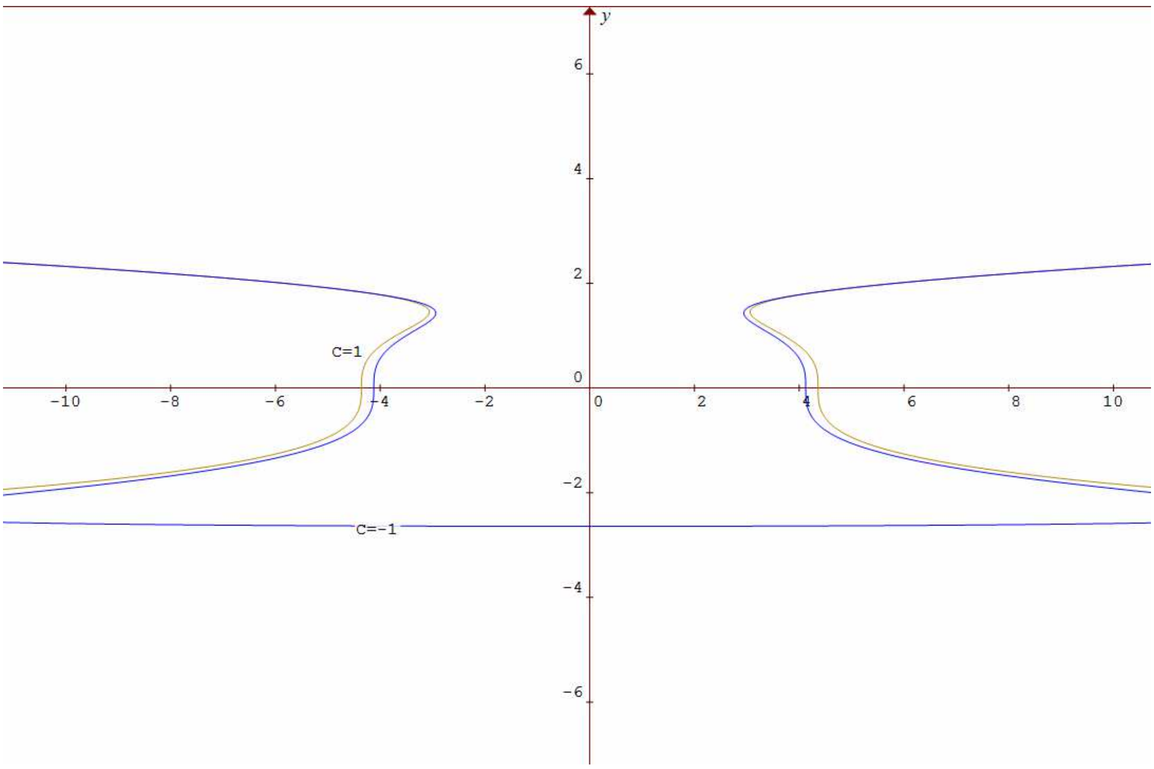


Problema 13.- Resolver

$$y^2(y^6 - x^2)y' = 2x$$

Solución

La escribimos como $x' + \frac{y^2}{2}x = \frac{y^8}{2}x^{-1}$, hacemos $v = x^2$ reemplazamos y obtenemos $v' + y^2 v = y^8$,cuya solución es $v = x^2 = y^6 - 6y^3 + 18 + Ce^{-\frac{y^3}{3}}$



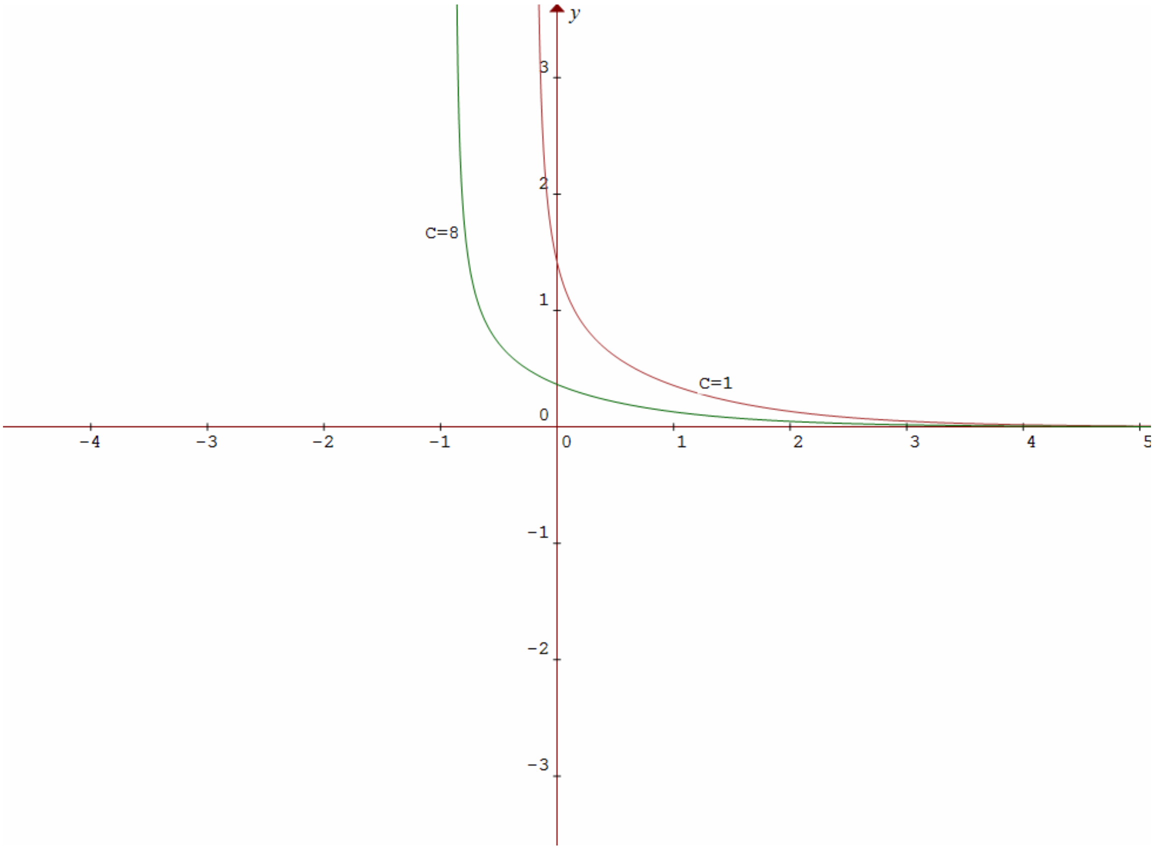
Problema 14.- Resolver

$y' + y = xy^3$

Solución

Hacemos $v = y^{-2}$,reemplazamos y obtenemos $v' - 2v = -2x$ cuya solución es

$v = y^{-2} = x - \dfrac{1}{2} + Ce^{2x}$

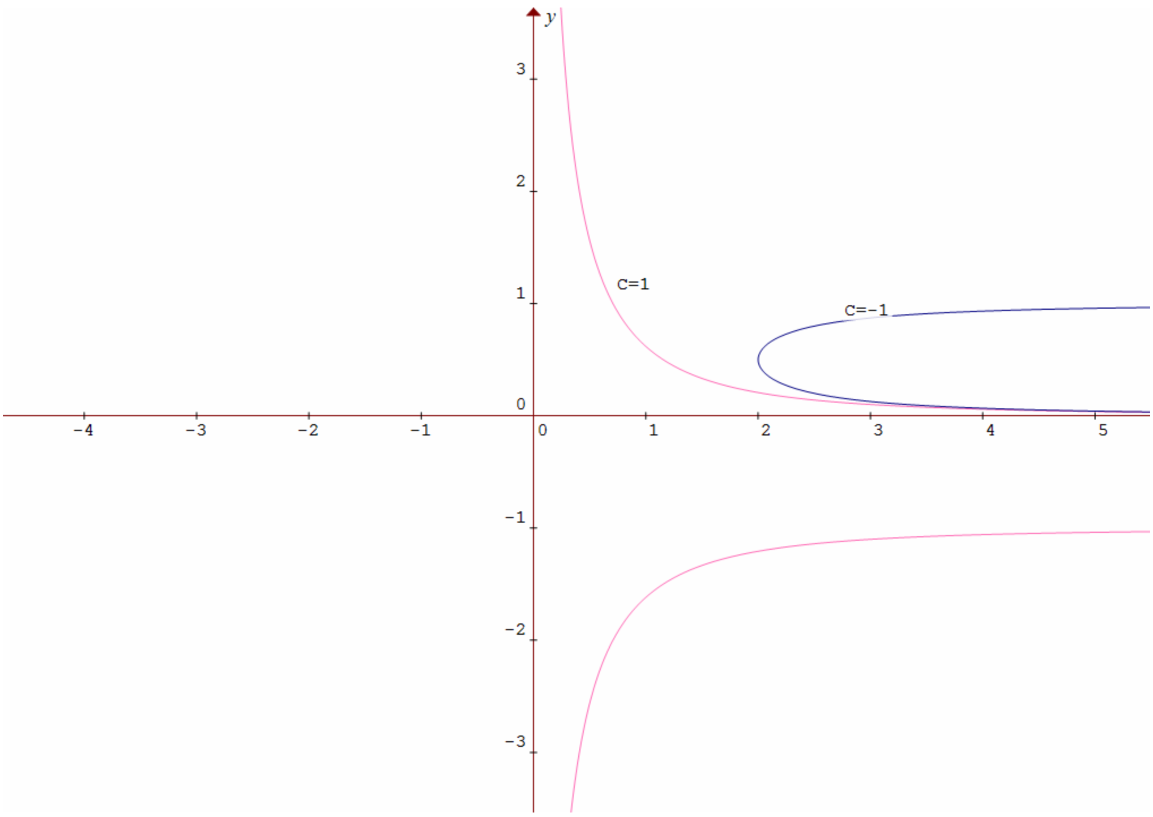


Problema 15.- Resolver

$$ydx + (x - \frac{x^3 y}{2})dy = 0$$

Solución

La escribimos como $y' + \frac{x}{y} = \frac{x^3}{2}$, hacemos $v = x^{-2}$, reemplazamos y obtenemos $v' - \frac{2v}{y} = -1$,cuya solución es $v = x^{-2} = y + Cy^2$

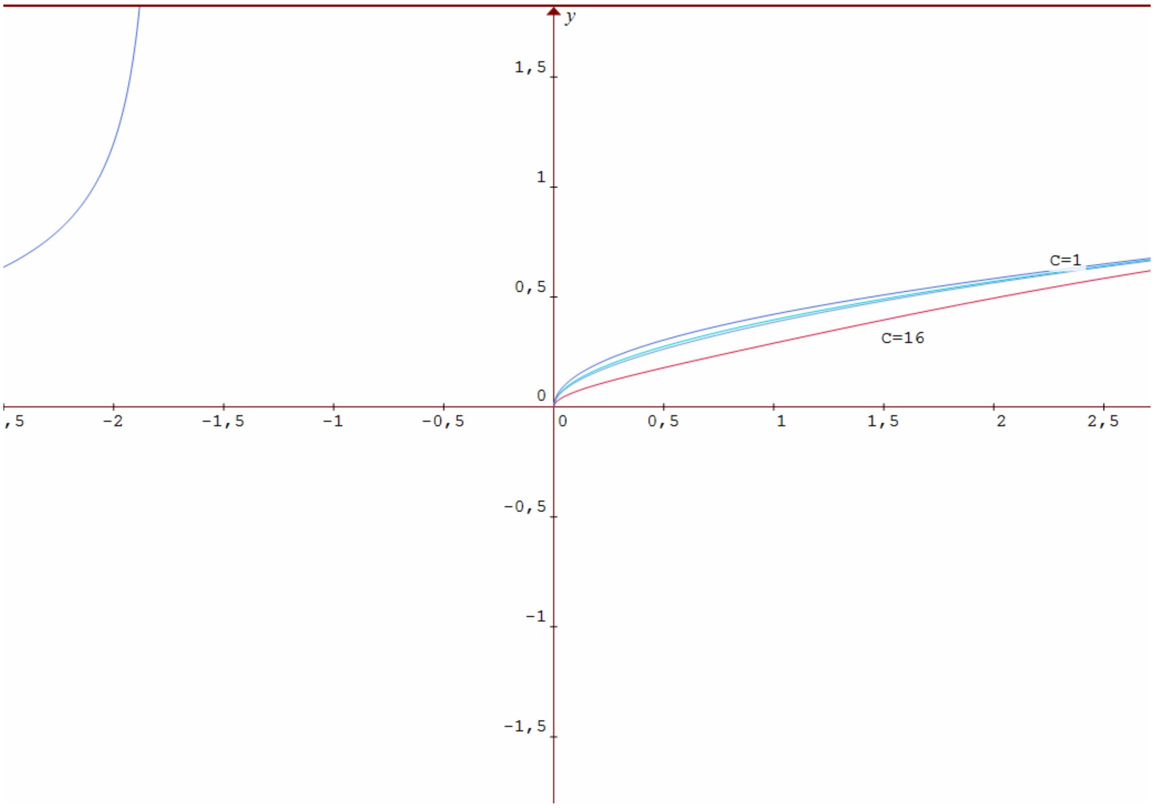


Problema 16.- Resolver

$$y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0$$

Solución

La escribimos como $y' - \frac{y(x+1)}{2x} = -\frac{3y^3}{2x}$, hacemos $v = y^{-2}$, reemplazamos y obtenemos $v' + (1 + x^{-1})v = 6x^{-1}$ cuya solución es $v = y^{-2} = \frac{6}{x} + C\frac{e^{-x}}{x}$

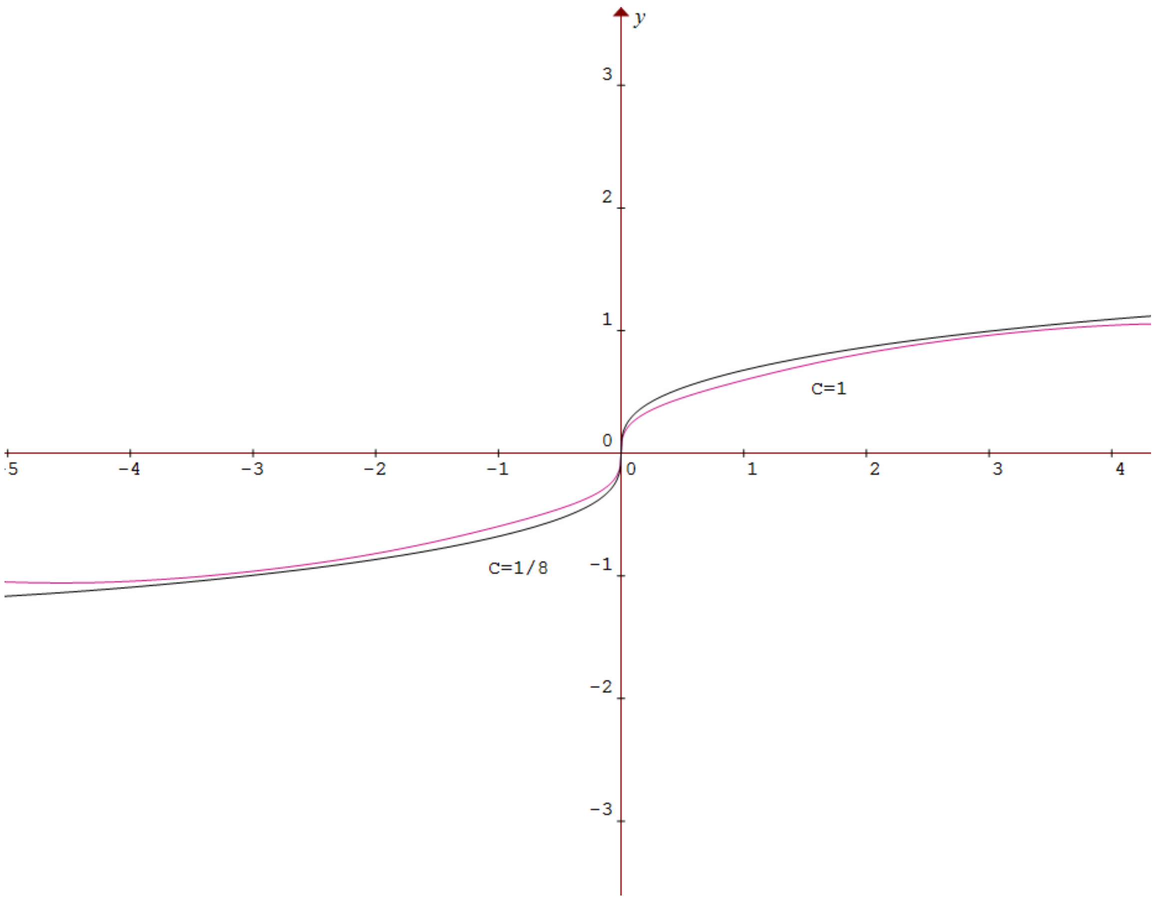


Problema 17.- Resolver

$$3xdy = y(1 + xsenx - 3y^3 senx)dx$$

Solución

La escribimos como $y' - \frac{1 + xsenx}{3x} y = -\frac{senx}{x} y^4$, hacemos $v = y^{-3}$ reemplazamos y obtenemos $v' + \frac{1 + xsenx}{x} v = \frac{3senx}{x}$ cuya solución es $v = y^{-3} = \frac{3}{x} + C \frac{e^{\cos x}}{x}$



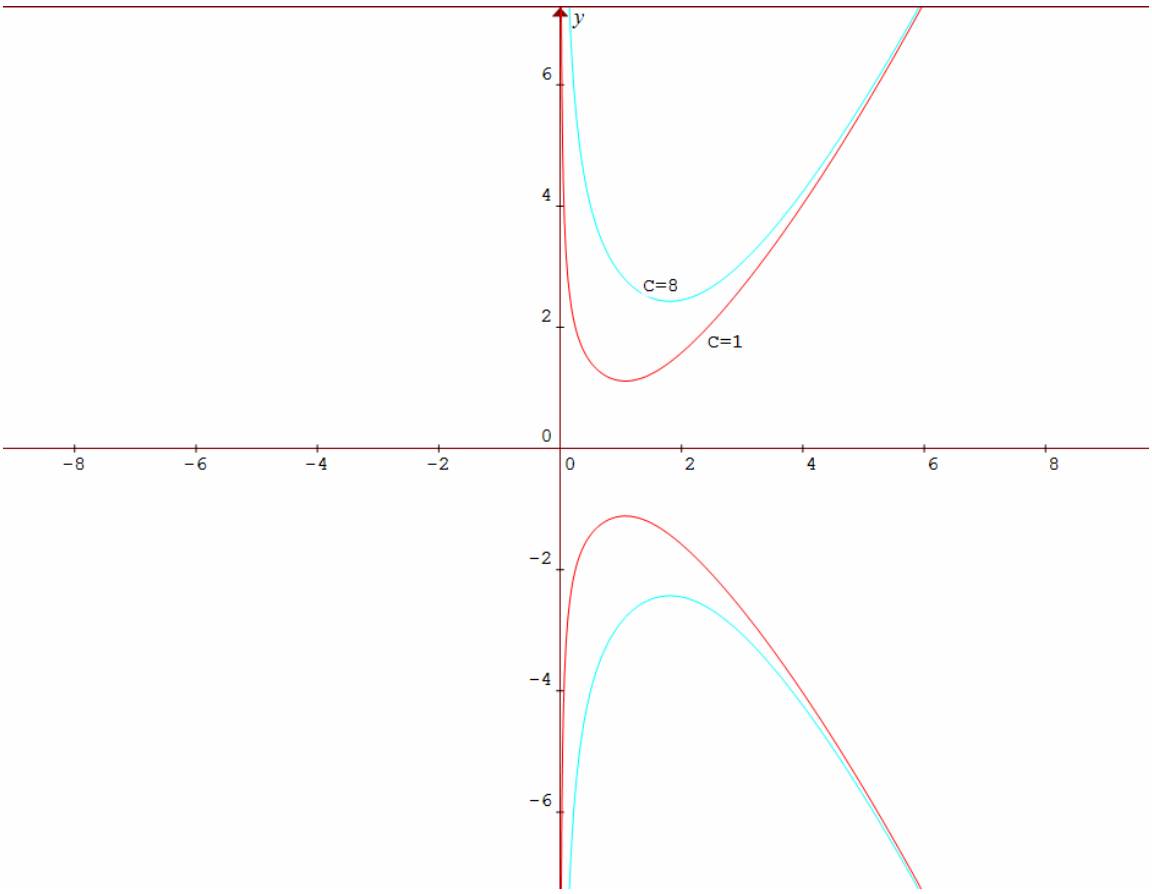
Problema 18.- Resolver

$$2y' + \frac{y}{x} = x^2 y^{-1}$$

Solución

Hacemos $v = y^2$, reemplazamos y obtenemos $v' + \frac{v}{x} = x^2$ cuya solución es

$$v = y^2 = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

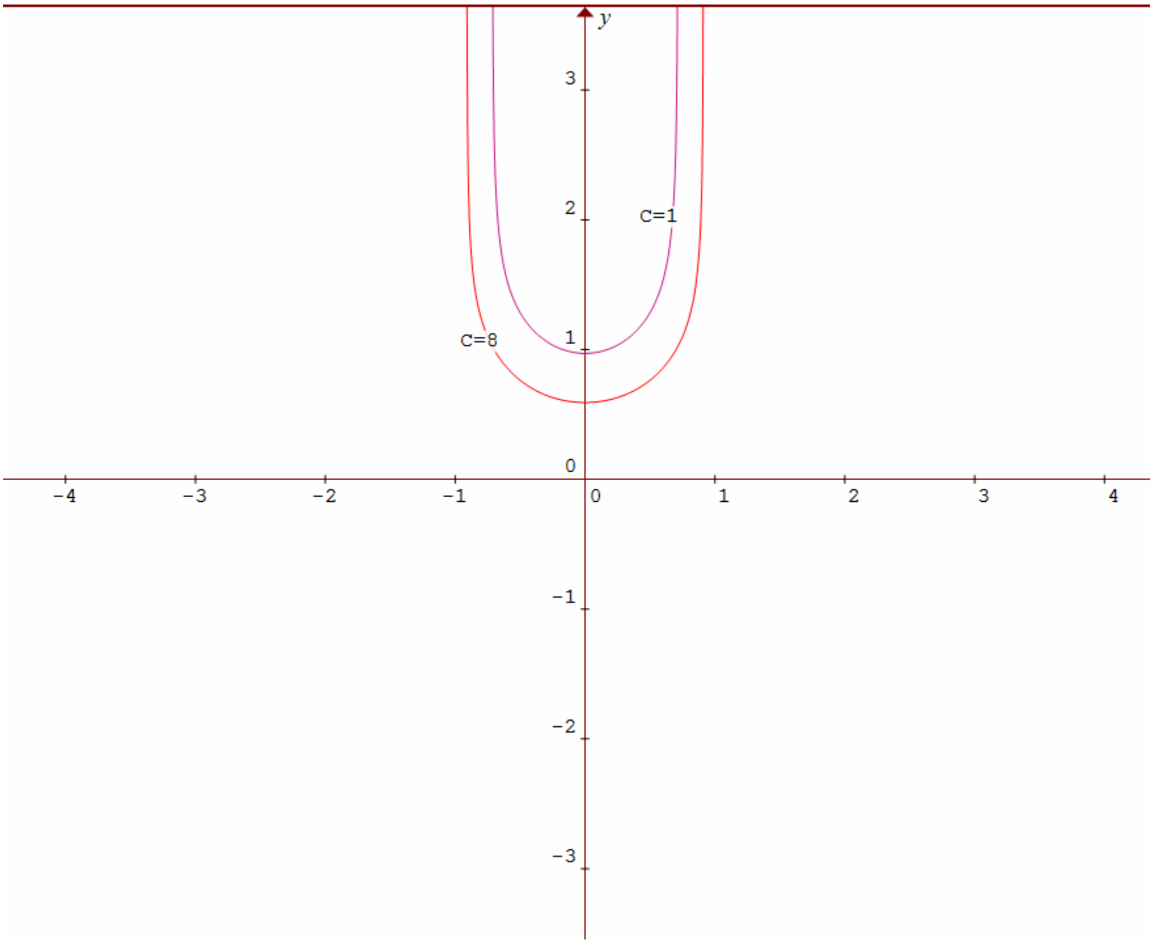


Problema 19.- Resolver

$$y' - 2xy = x^3 y^5$$

Solución

Hacemos $v = y^{-4}$, reemplazamos y obtenemos $v' + 8xv = -4x^3$ cuya solución es $v = y^{-4} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8} + Ce^{-4x^2}$



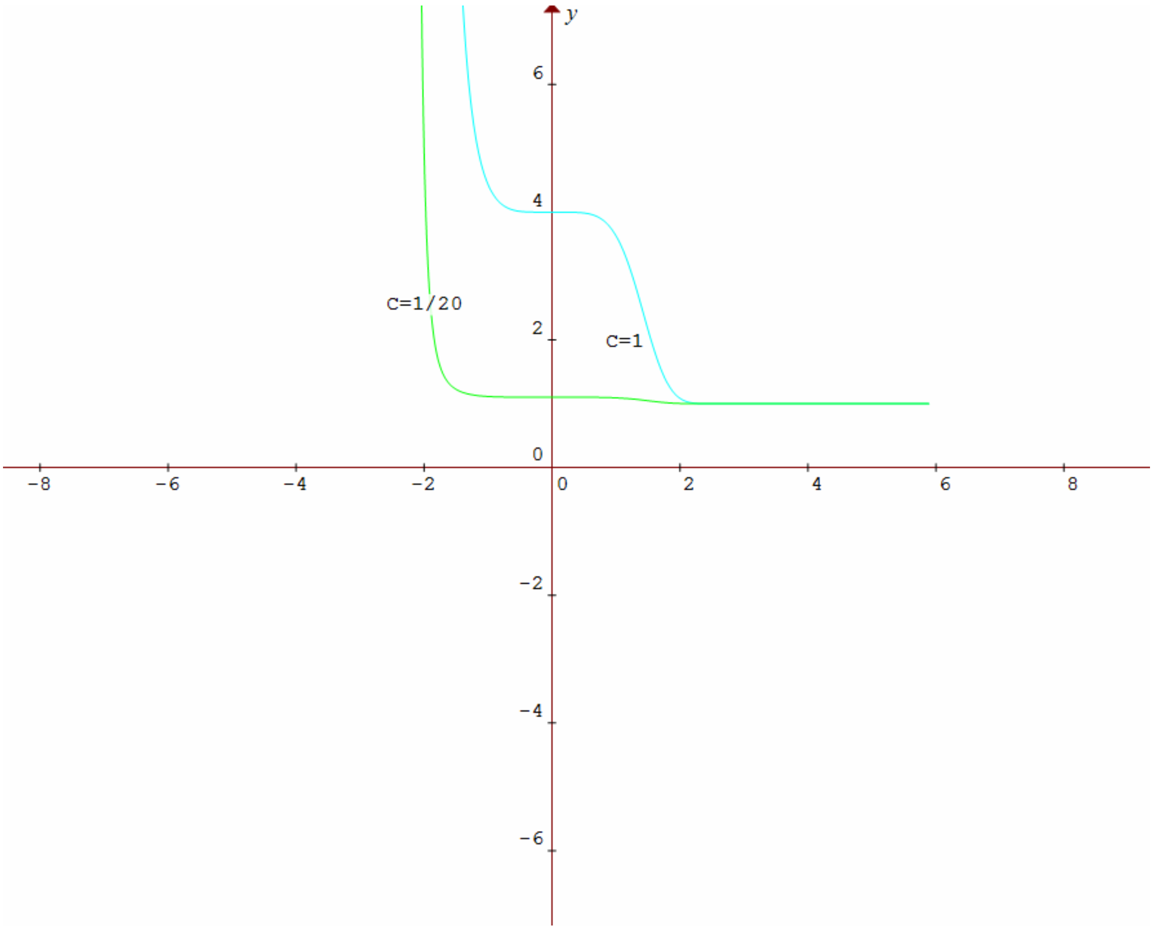
Problema 20.- Resolver

$$xy'+x^5y=x^5y^{\frac{1}{2}}$$

Solución

Hacemos $v=y^{\frac{1}{2}}$, reemplazamos y obtenemos $v'+\frac{x^4v}{2}=\frac{1}{2}x^4$ cuya solución es

$$v=y^{\frac{1}{2}}=1+Ce^{-\frac{x^5}{10}}$$



Ecuaciones De Clairaut

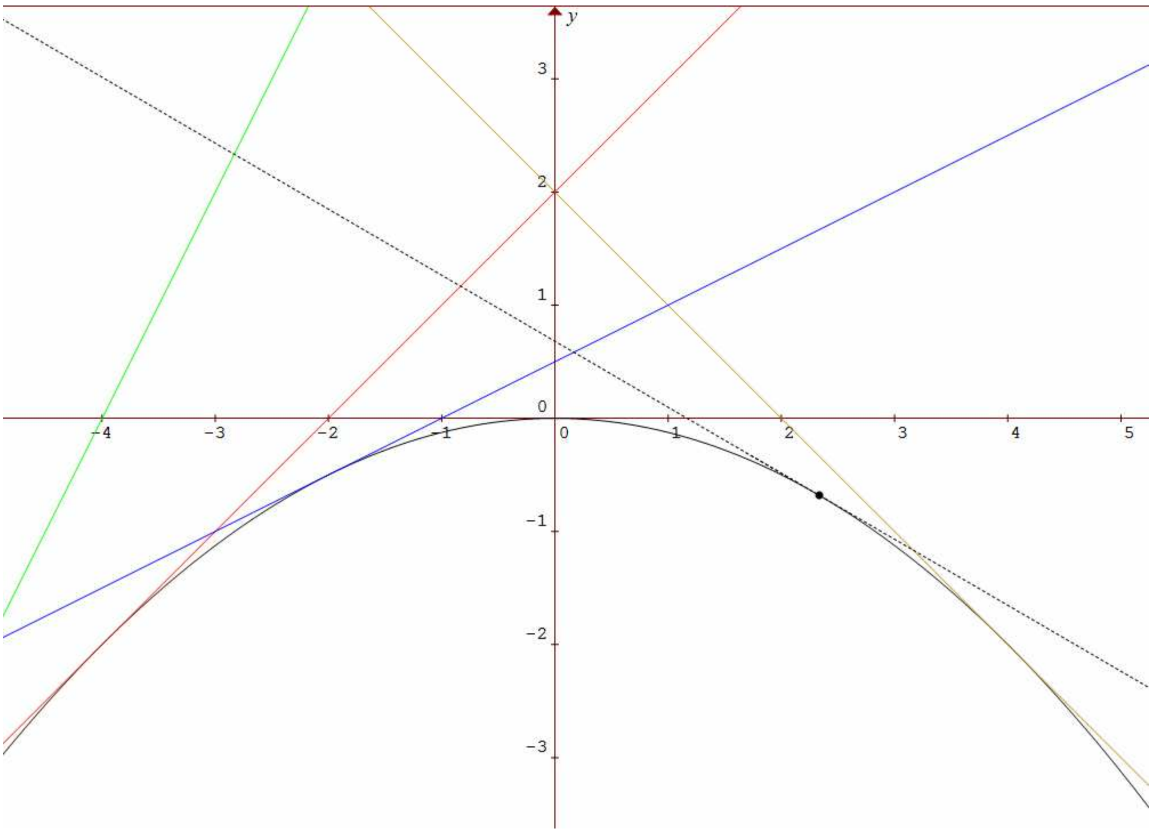
Problema 1.- Resolver

$$y = px + 2p^2 \quad \text{donde} \quad p = y' = \frac{dy}{dx}$$

Solución

Sabemos que la solución general es $y = Cx + 2C^2$ y que la solución singular se obtiene eliminando p del sistema $x = -f'(p)$ ($f(p) = 2p^2$) y la ecuación $y = f(p) - pf'(p)$.

Resolviendo este sistema resulta $y = -\dfrac{x^2}{8}$, que es la solución singular tangente a las rectas de la solución general (envolvente)

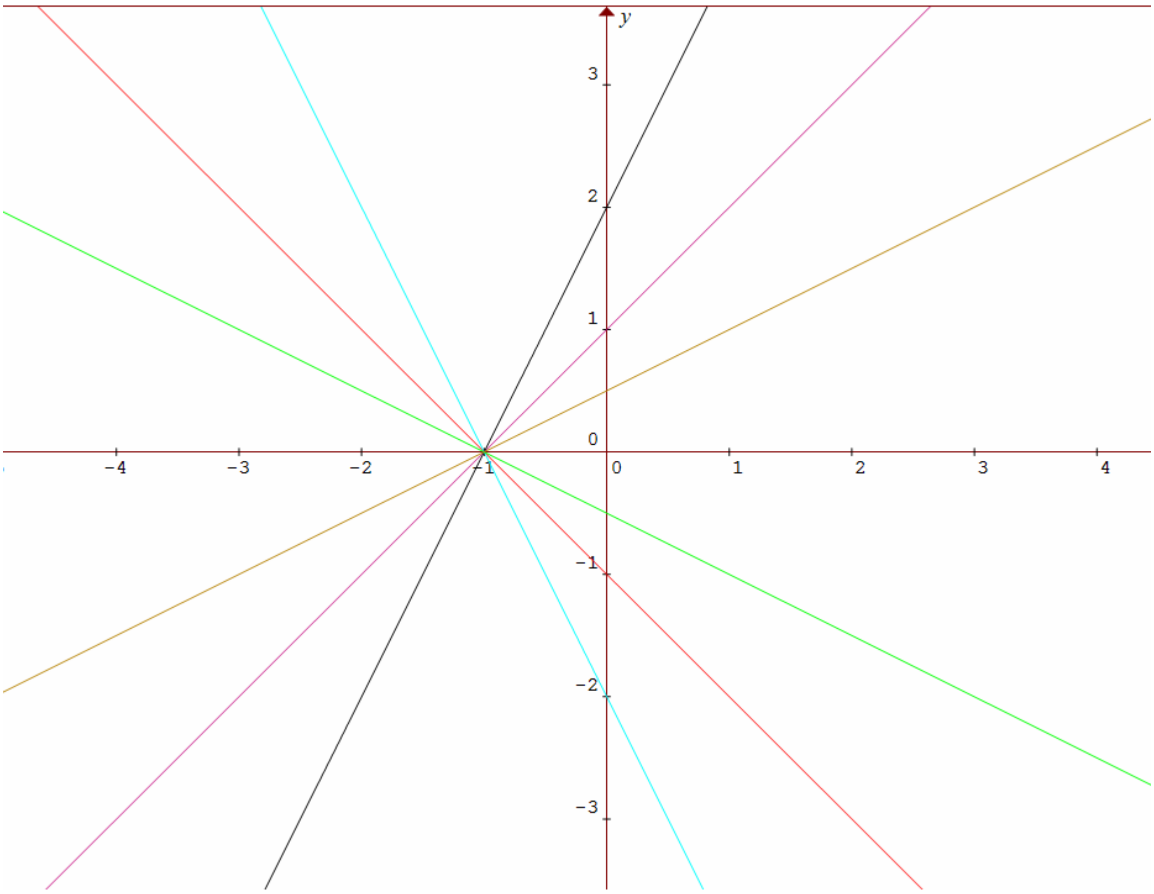


Problema 2.- Resolver

$$y = px + p$$

Solución

La solución general es $y = Cx + C$ .Pero en este caso no hay solución singular ,se trata de una familia de rectas que pasa por el punto (-1,0)

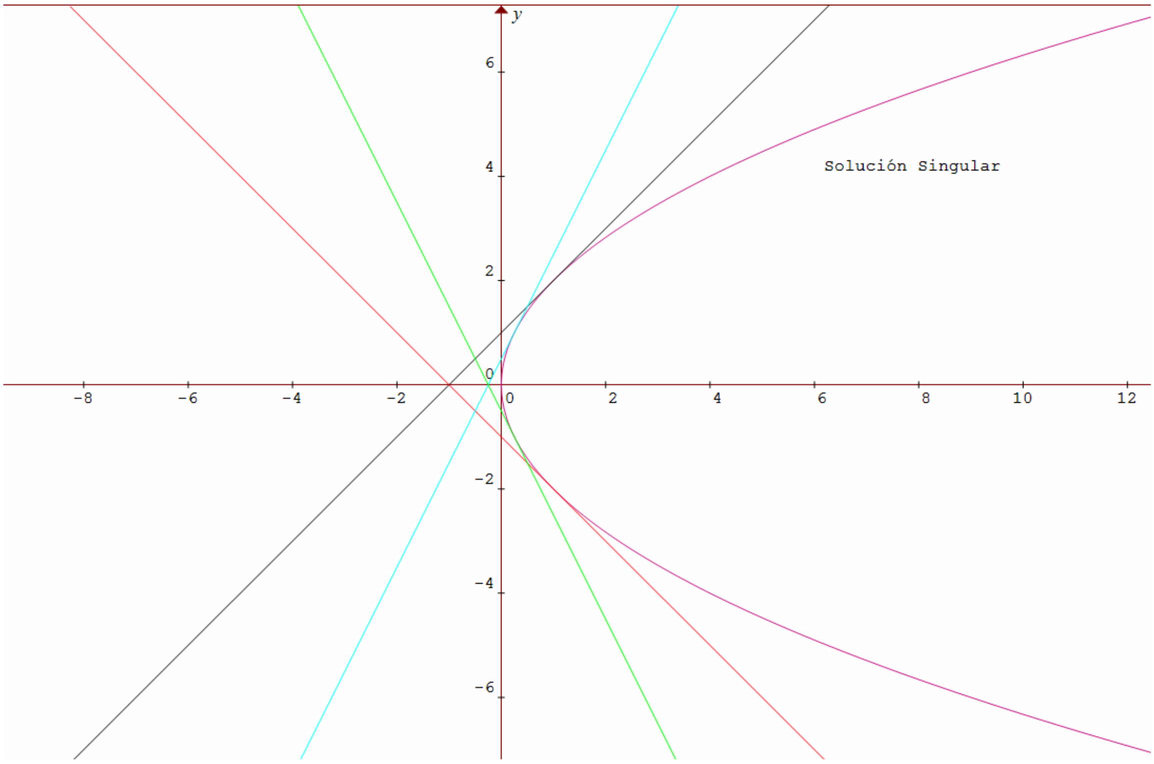


Problema 3.- Resolver

$$y = xp + \frac{1}{p}$$

Solución

La solución general es $y = Cx + \dfrac{1}{C}$, ahora $x = -f(p) = \dfrac{1}{p^2}$ y reemplazando en la ecuación original tenemos $y = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{p} \Rightarrow y^2 = \dfrac{4}{p^2} = 4x$ entonces $y^2 = 4x$ es la solución singular



Problema 4.- Resolver

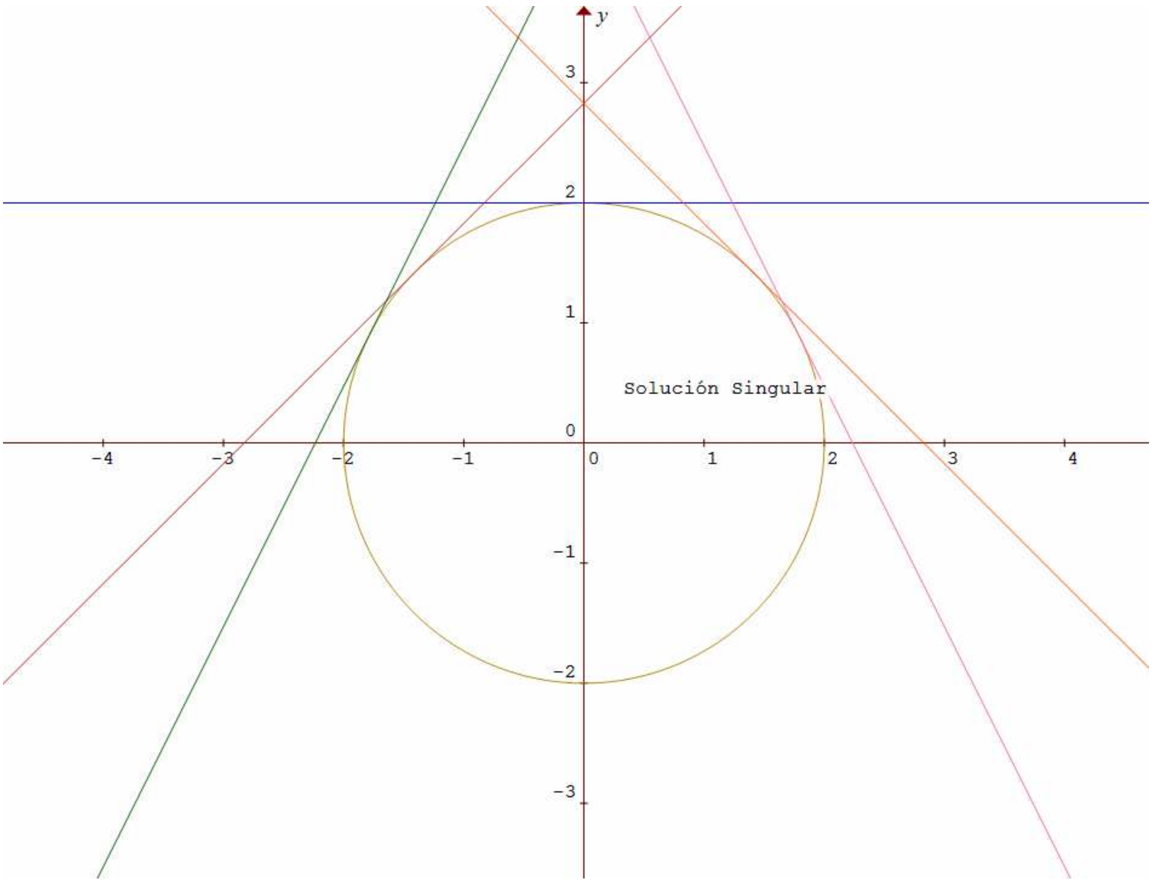
$$y = xp + 2\sqrt{1+p^2}$$

Solución

La solución general es $y = Cx + 2\sqrt{1+C^2}$ y la solución singular es

$$x = -\frac{2p}{\sqrt{1+p^2}},\ y = \frac{2}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{4p^2}{1+p^2} + \frac{4}{1+p^2} = 4$$

una circunferencia de radio 2

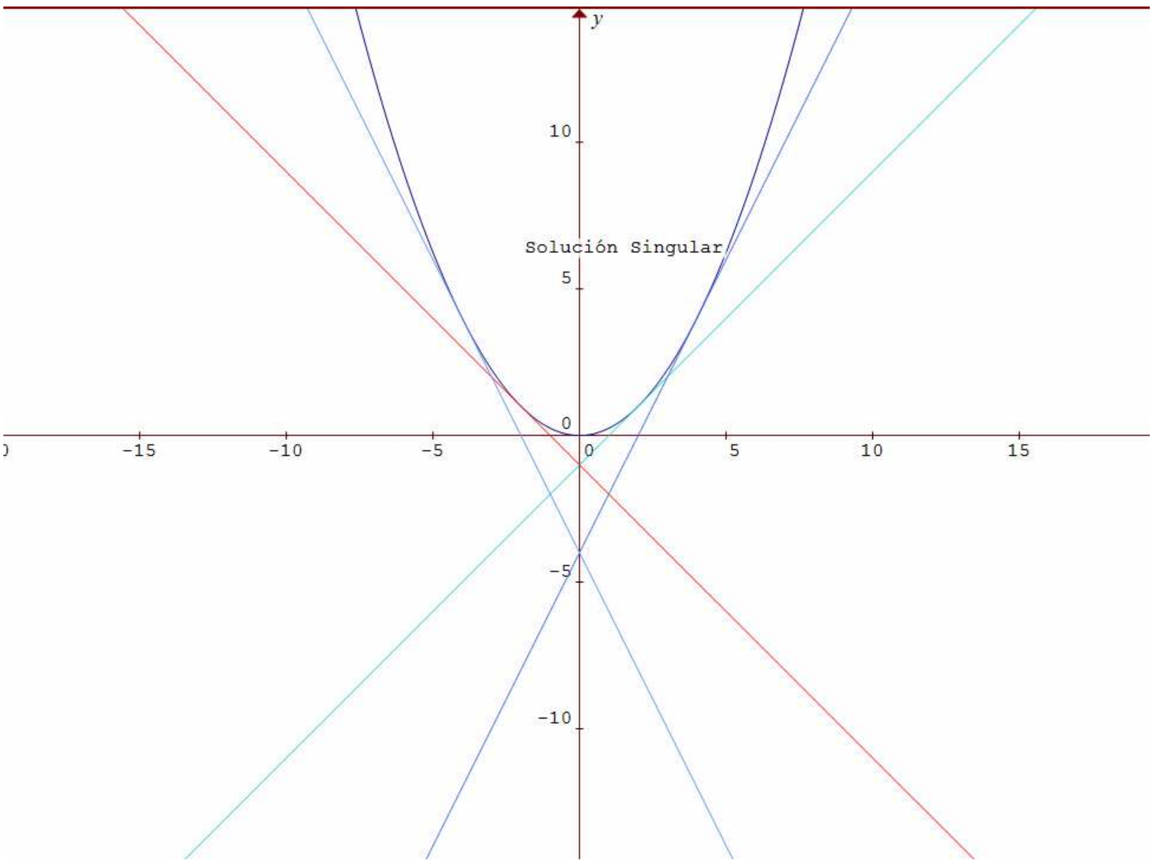


Problema 5.- Resolver

$$y = xp - p^2$$

Solución

La solución general es $y = Cx - C^2$ y la singular es $y = \dfrac{x^2}{4}$ obtenida por el método ya visto

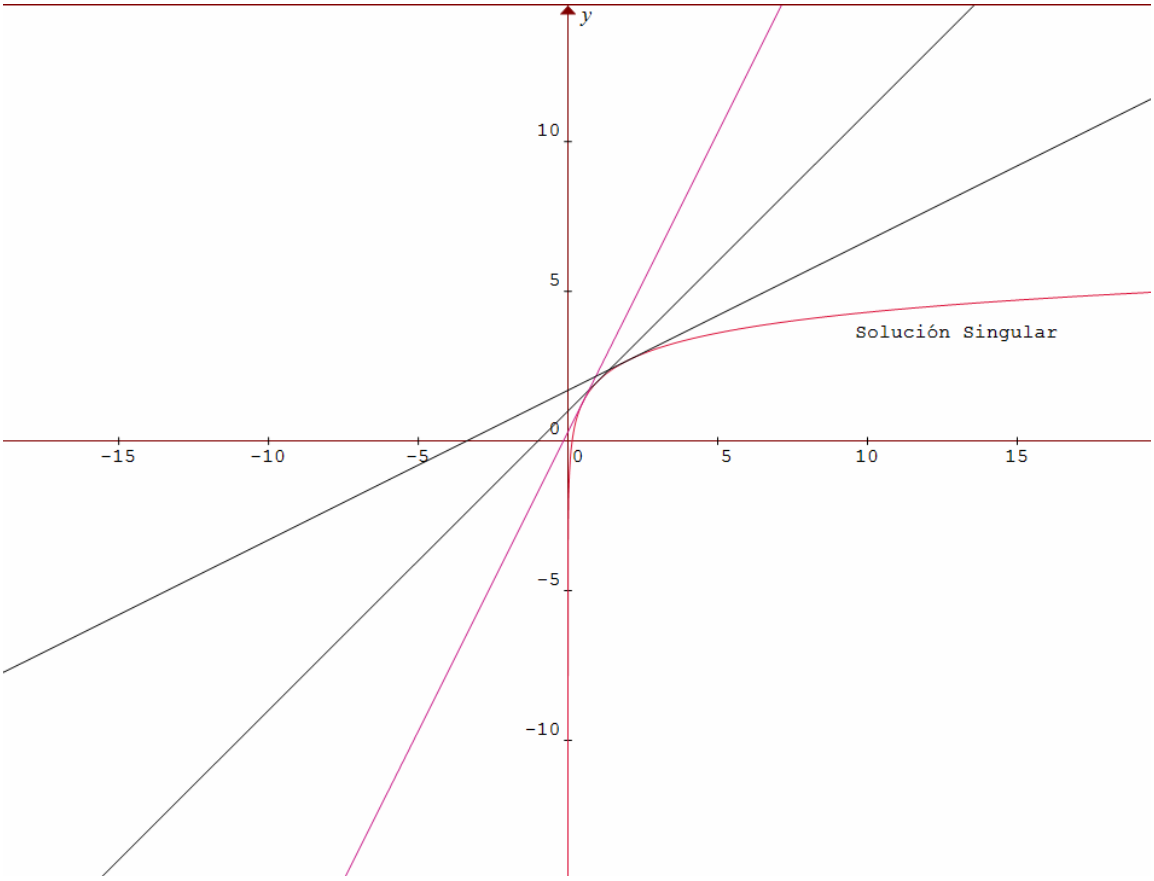


Problema 6.- Resolver

$$y = xp + 1 - \ln p$$

Solución

La solución general es $y = Cx + 1 - \ln C$ y la singular , siguiendo la metodología anterior , es $y = 2 + \ln x$

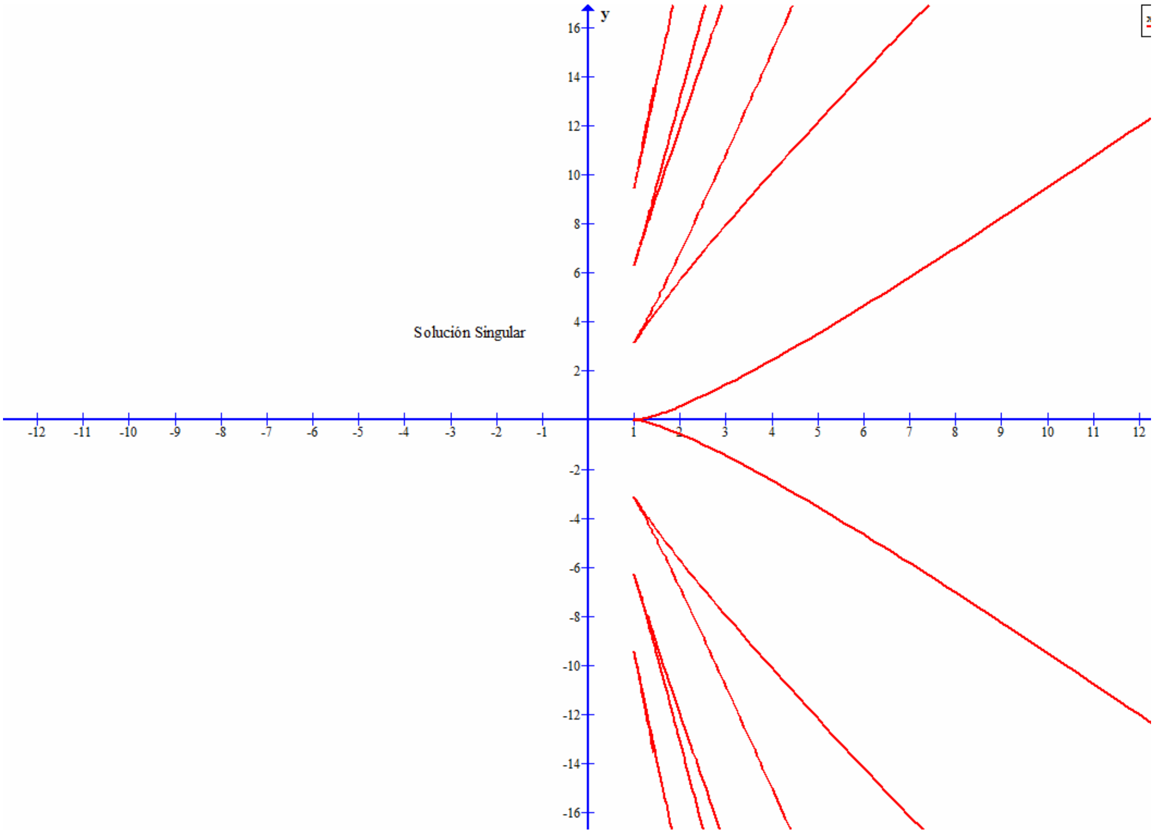


Problema 7.- Resolver

$$y = xp - tgp$$

Solución

La solución general es $y = Cx - tgC$ y la solución singular está dada en este caso por la forma paramétrica $x = \sec^2 p, y = p\sec^2 p - tgp$

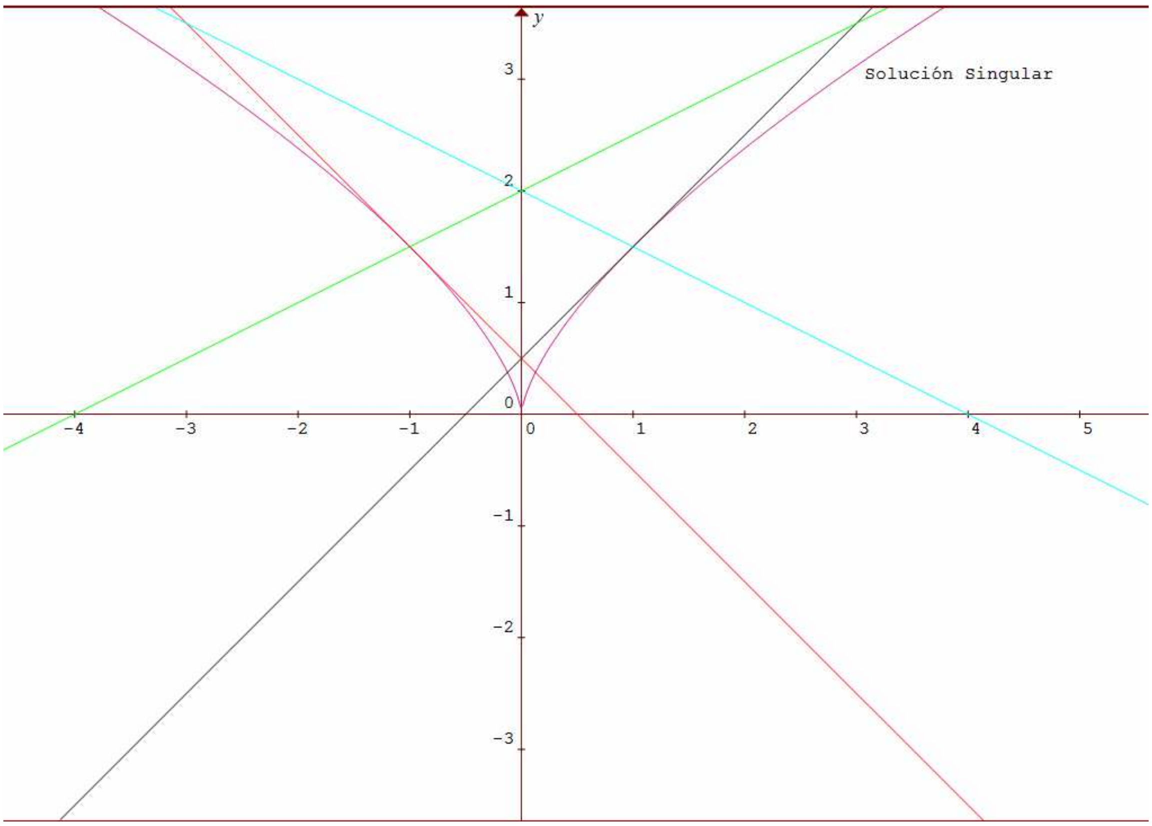


Problema 8.- Resolver

$$y = xp + \frac{1}{2p^2}$$

Solución

La solución general es $y = Cx + \dfrac{1}{2C^2}$ y procediendo como anteriormente , la solución singular es $8y^3 = 27x^2$



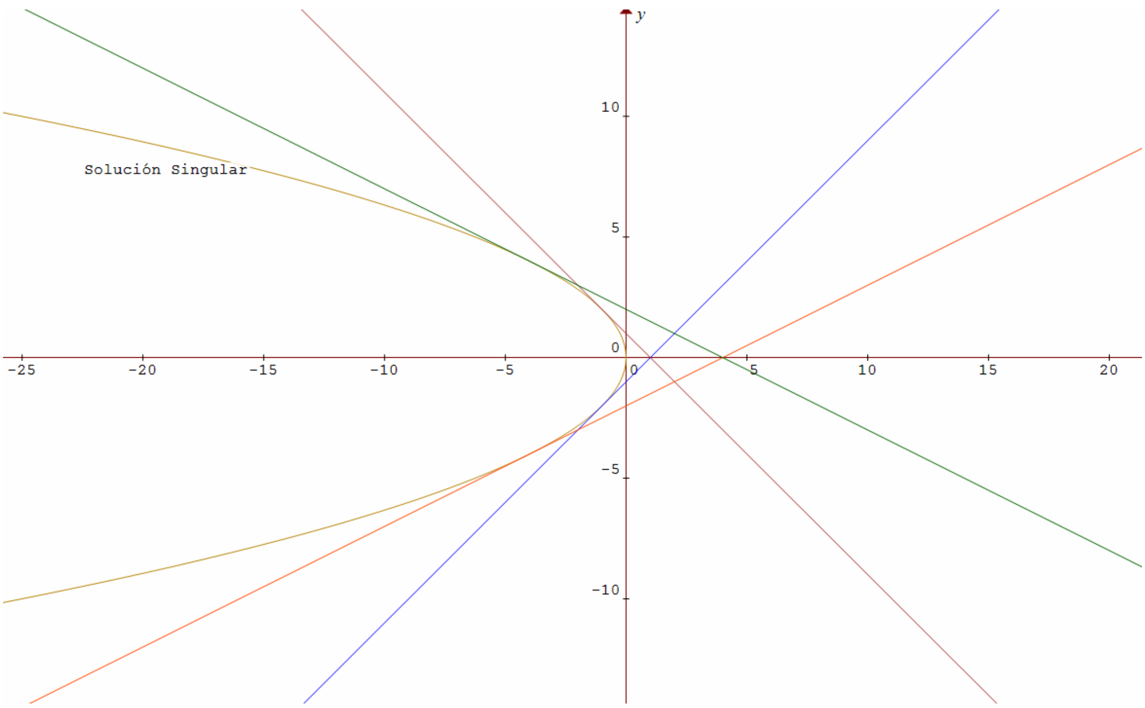
Problema 9.- Resolver

$$y = xy' - \frac{1}{y'}$$

Solución

Procediendo como anteriormente , la solución general es $y = Cx - \dfrac{1}{C}$ y la solución singular es

$y^2 = -4x$

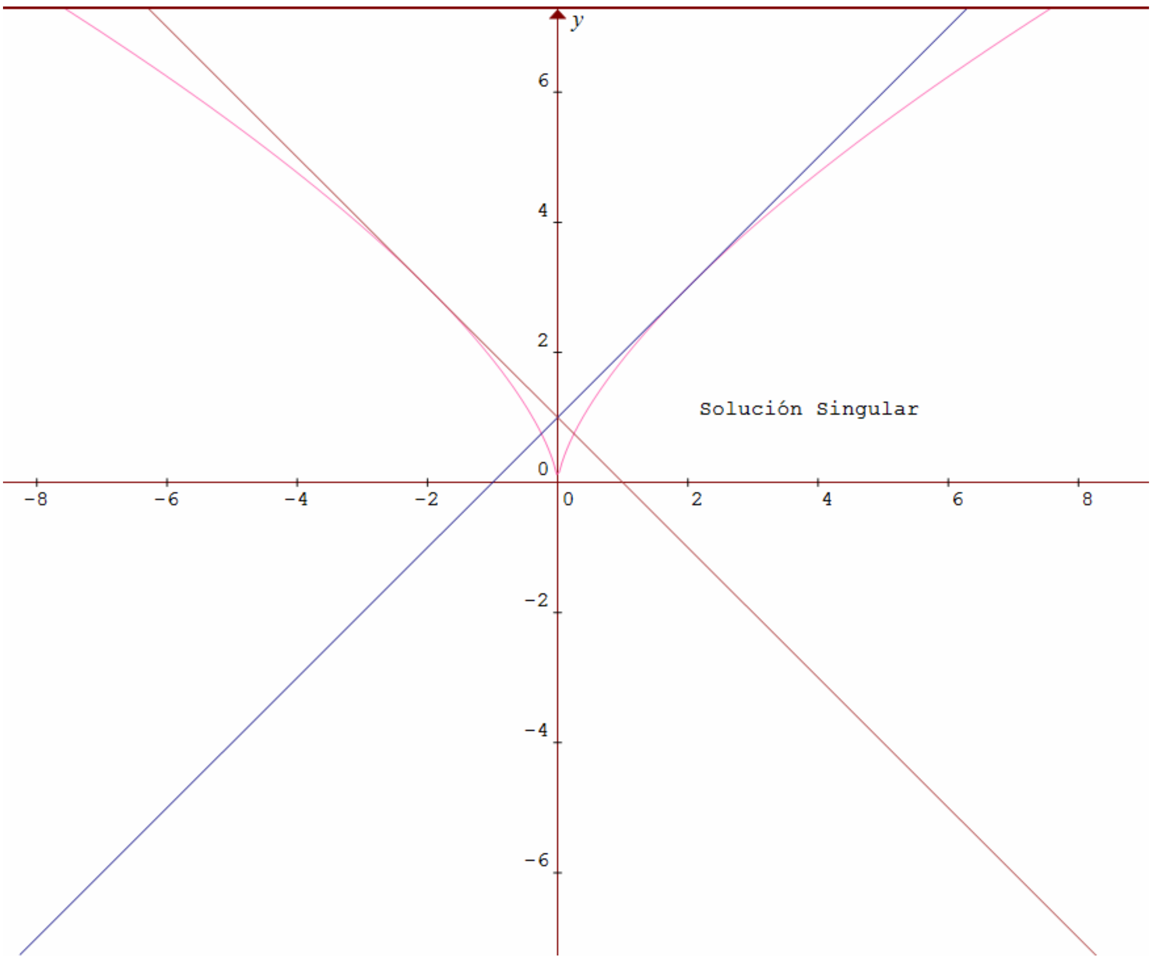


Problema 10.-Resolver

$$y = xy' + \frac{1}{y'^2}$$

Solución

La solución general es $y = Cx + \frac{1}{C^2}$ y la singular es $y = 3(\frac{x^2}{4})^{\frac{1}{3}}$



Factor Integrante y Otros

Problema 1.- Resolver

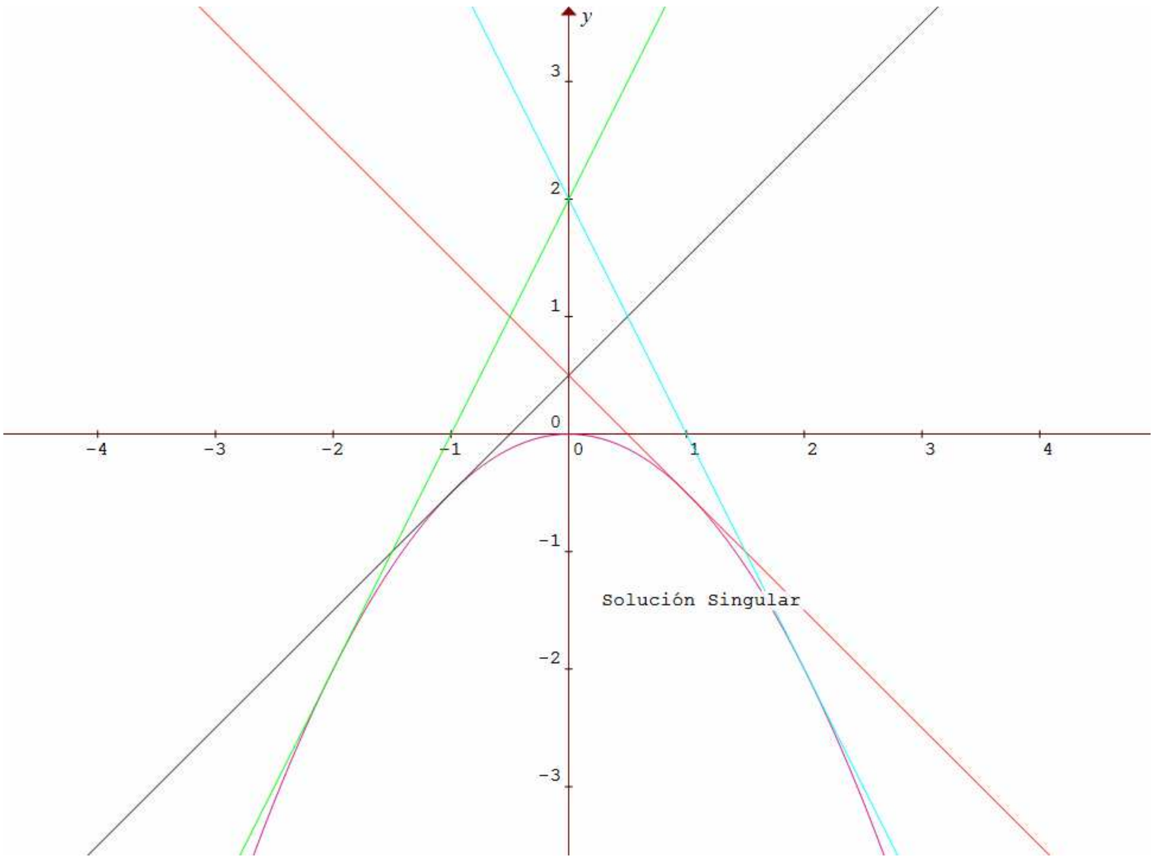
$$p^2 + 2xp - 2y = 0$$

Solución

Despejando y , y derivando se tiene

$$p = pp' + xp' + p \Rightarrow (p + x)p' = 0 \Rightarrow p' = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = \frac{1}{2}C^2 + Cx$$

Además $p + x = 0 \Rightarrow p = -x \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2}$



Problema 2.- Resolver

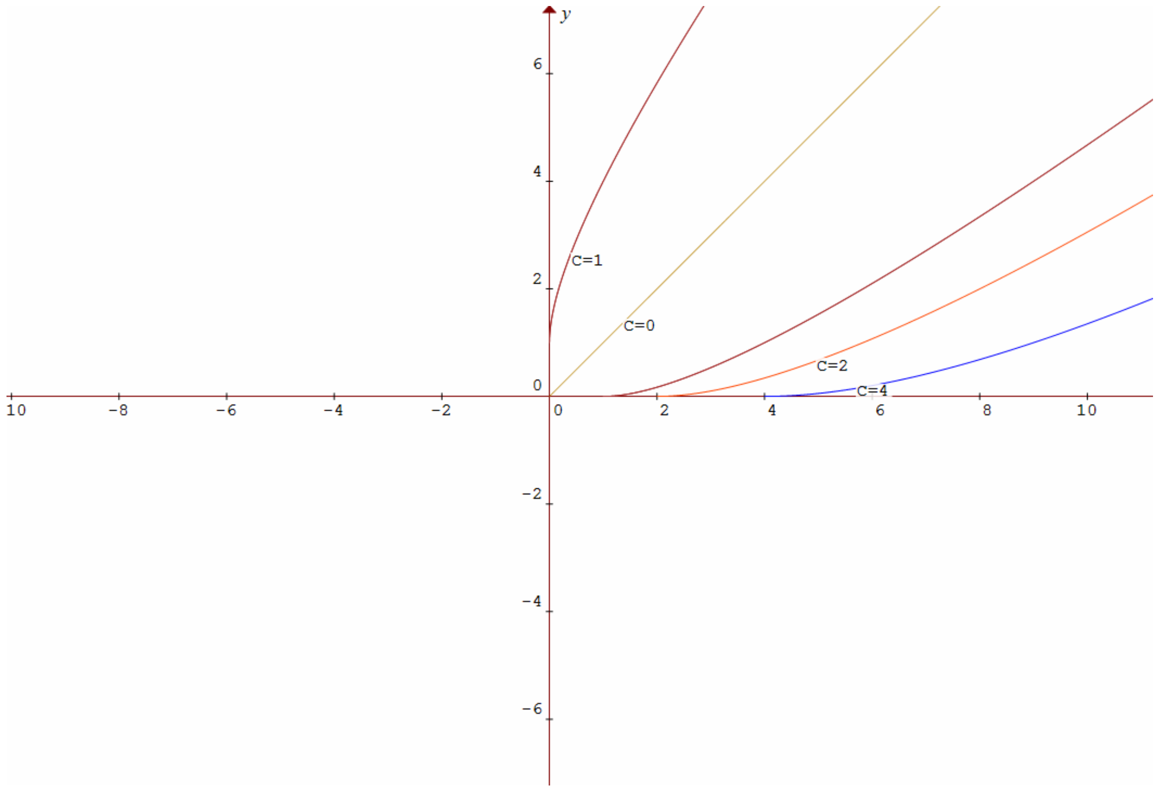
$$p^2x - y = 0$$

Solución

$y = p^2x \Rightarrow p = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$,derivando se tiene

$$p = p^2 + 2pxp' \Rightarrow 1 = p + 2xp' \Rightarrow 0 = (p-1)dx + 2xdp$$

ecuación separable cuya solución es $p^2x - 2px + x = C \Rightarrow y - 2\sqrt{xy} + x = C$



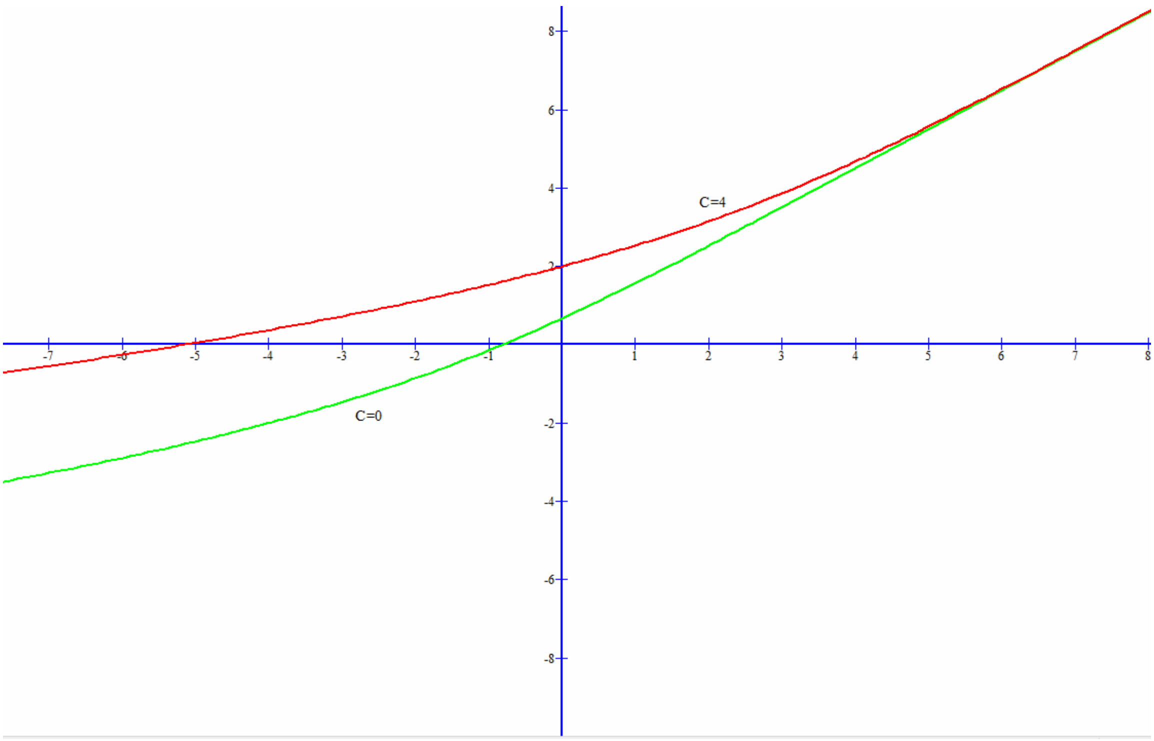
Problema 3.- Resolver

$$p^2 + 2y - 2x = 0$$

Solución

Tenemos $x = \frac{1}{2}(2y + p^2)$, derivando y multiplicando por p se tiene $1 = p + p^2 p' \Rightarrow 0 = (p-1) + p^2 p'$, ecuación separable cuya solución es $\frac{1}{2}p^2 + p + \ln(p-1) + y = C$. La solución queda en forma paramétrica

$$y = C - \frac{1}{2}p^2 - p - \ln(p-1), x = C - p - \ln(p-1)$$



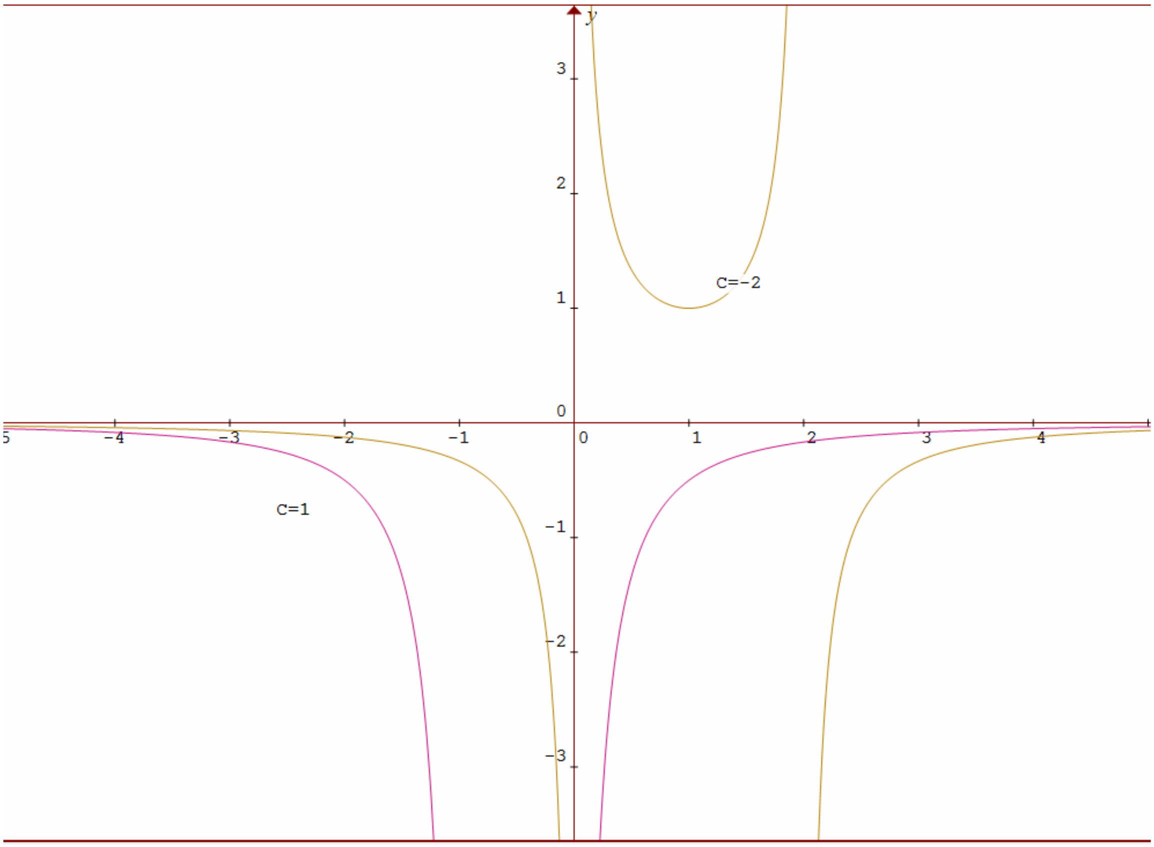
Problema 4.- Resolver

$$xdy + ydx = x^2 y^2 dx$$

Solución

Multiplicamos por el factor integrante $u = x^{-2} y^{-2}$ de donde resulta

$$\frac{xdy + ydx}{x^2 y^2} = dx \Rightarrow d(-\frac{1}{xy}) = dx \Rightarrow -\frac{1}{xy} = x + C \Rightarrow x^2 y + Cxy + 1 = 0$$



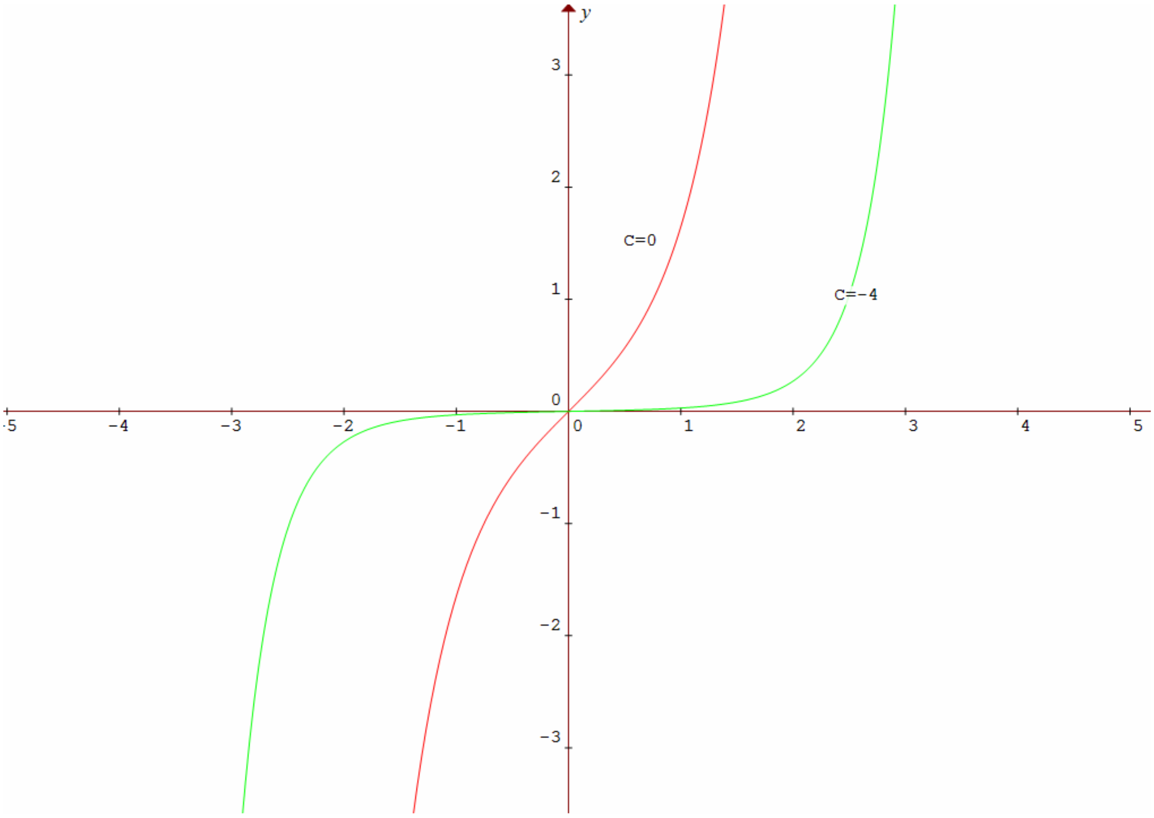
Problema 5.- Resolver

$$xy(xdy - ydx) - x^3y^2dx = 0$$

Solución

Multiplicamos por el factor integrante $u = x^{-2}y^{-2}$, de donde resulta

$$\frac{xdy - ydx}{xy} - xdx = 0 \Rightarrow d(\ln\frac{y}{x}) - xdx = 0 \Rightarrow \ln(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2}x^2 = C$$



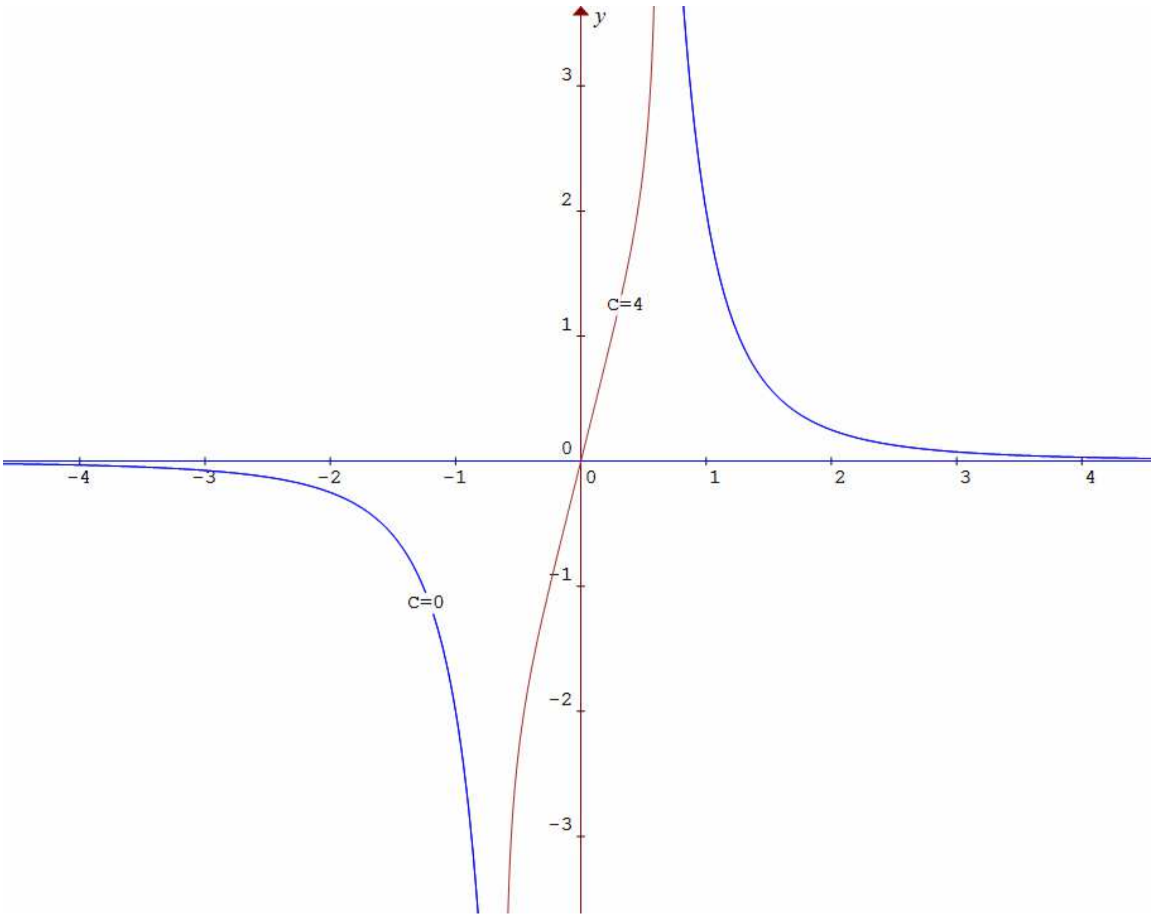
Problema 6.- Resolver

$$xdy - ydx = x^3 y(xdy + ydx)$$

Solución

Multiplicamos por el factor integrante $u = x^{-2}$ de donde resulta

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = xy(xdy + ydx) \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = xyd(xy) \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x^2y^2 + C$$



Problema 7.- Resolver

$$(2y+3x^2y^3)dx+(3x+5x^3y^2)dy=0$$

Solución

Multiplicamos por el factor integrante $u=x^m y^n$, resulta

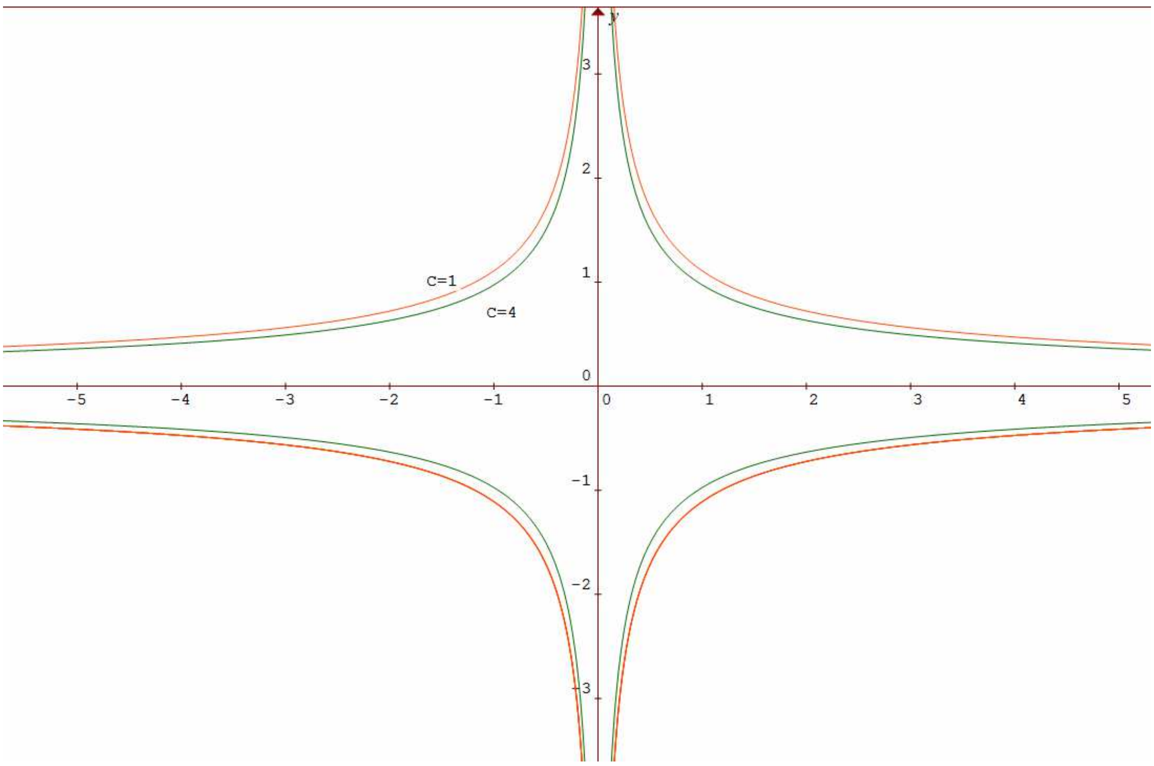
$$(2x^m y^{n+1}+3x^{m+2}y^{n+3})dx+(3x^{m+1}y^n+5x^{m+3}y^{n+2})dy=0$$

Ahora igualando $M_x=N_y$ e identificando los coeficientes de los términos semejantes se obtienen las ecuaciones $2(n+1)=3(m+1), 3(n+3)=5(m+3)$

sistema cuya solución es $m=-9, n=-13$, reemplazando estos valores la ecuación queda

$$(2x^{-9}y^{-12}+3x^{-7}y^{-10})dx+(3x^{-8}y^{-13}+5x^{-6}y^{-11})dy=0$$

ecuación exacta y cuya solución es $2x^2y^2-Cx^8y^{12}+1=0$

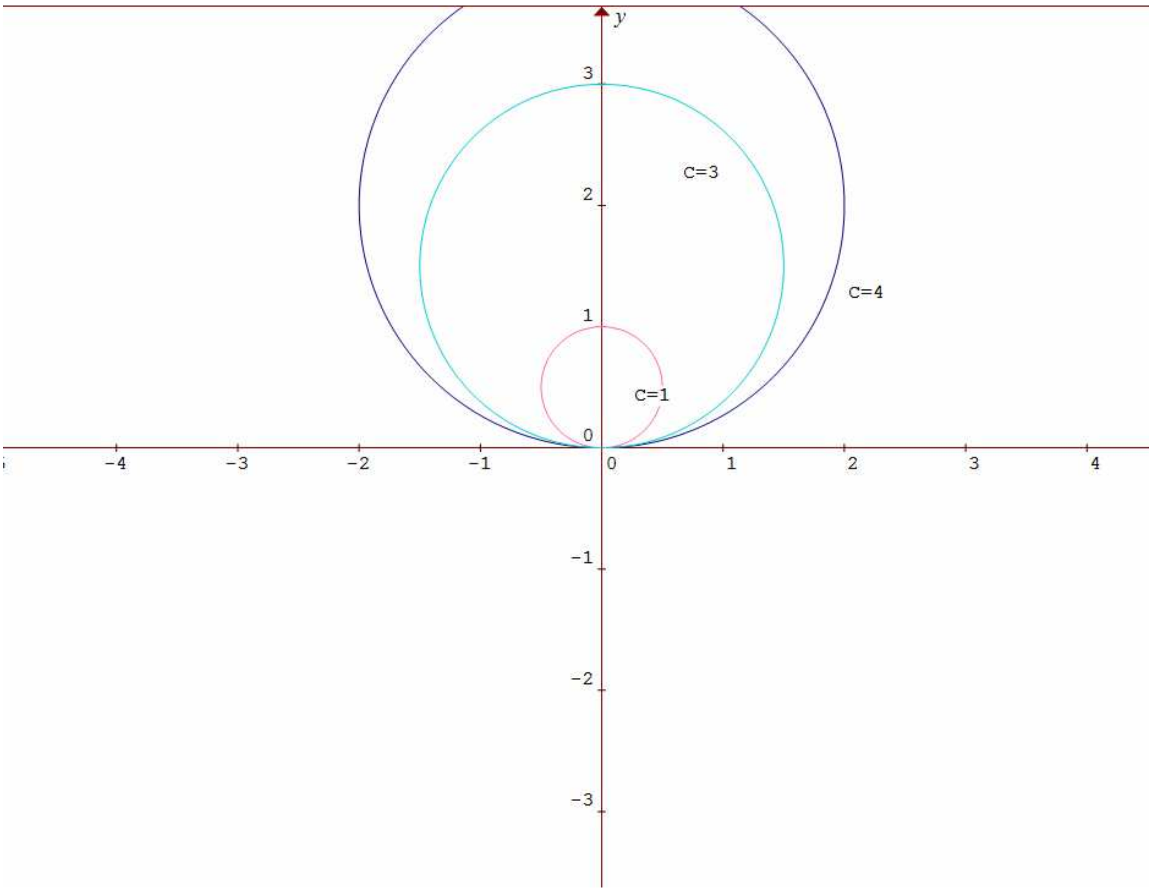


Problema 8.- Resolver

$$(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$$

Solución

Escribimos $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$,ahora $\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{2}{y}$ entonces un factor integrante es $u(y) = \exp(\int (-\frac{2}{y})dy) = \frac{1}{y^2}$, multiplicando la ecuación por este factor se convierte en exacta y su solución es $x^2 + y^2 = Cy$



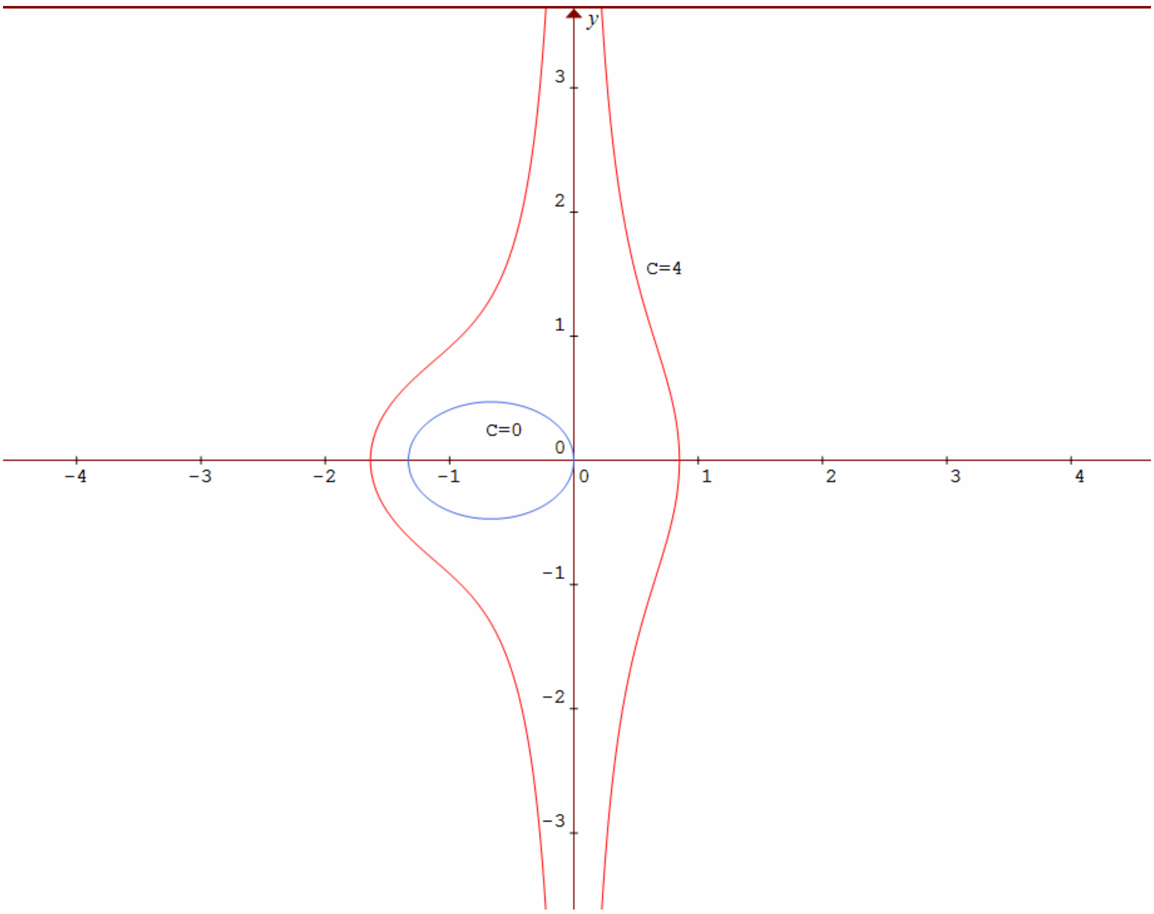
Problema 9.- Resolver

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

Solución

Tenemos $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{1}{x}$ entonces un factor integrante es $u(x) = \exp(\int \frac{dx}{x}) = x$

multiplicando la ecuación por este factor la ecuación se convierte en exacta y su solución es $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$



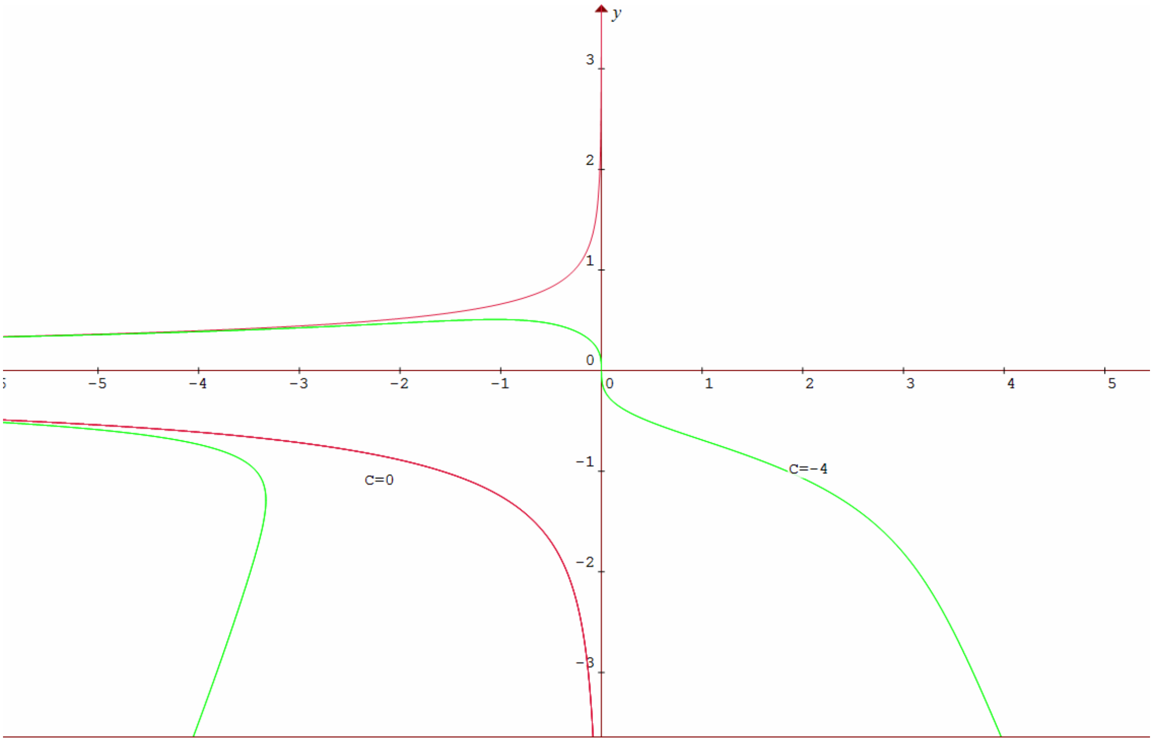
Problema 10.- Resolver

$$(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$$

Solución

Tenemos $\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{4}{y}$,entonces un factor integrante es $u(y)=\exp(\int\frac{4}{y}dy)=\frac{1}{y^4}$, multiplicando la ecuación por este factor la ecuación se convierte en exacta y su solución es

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=C$$



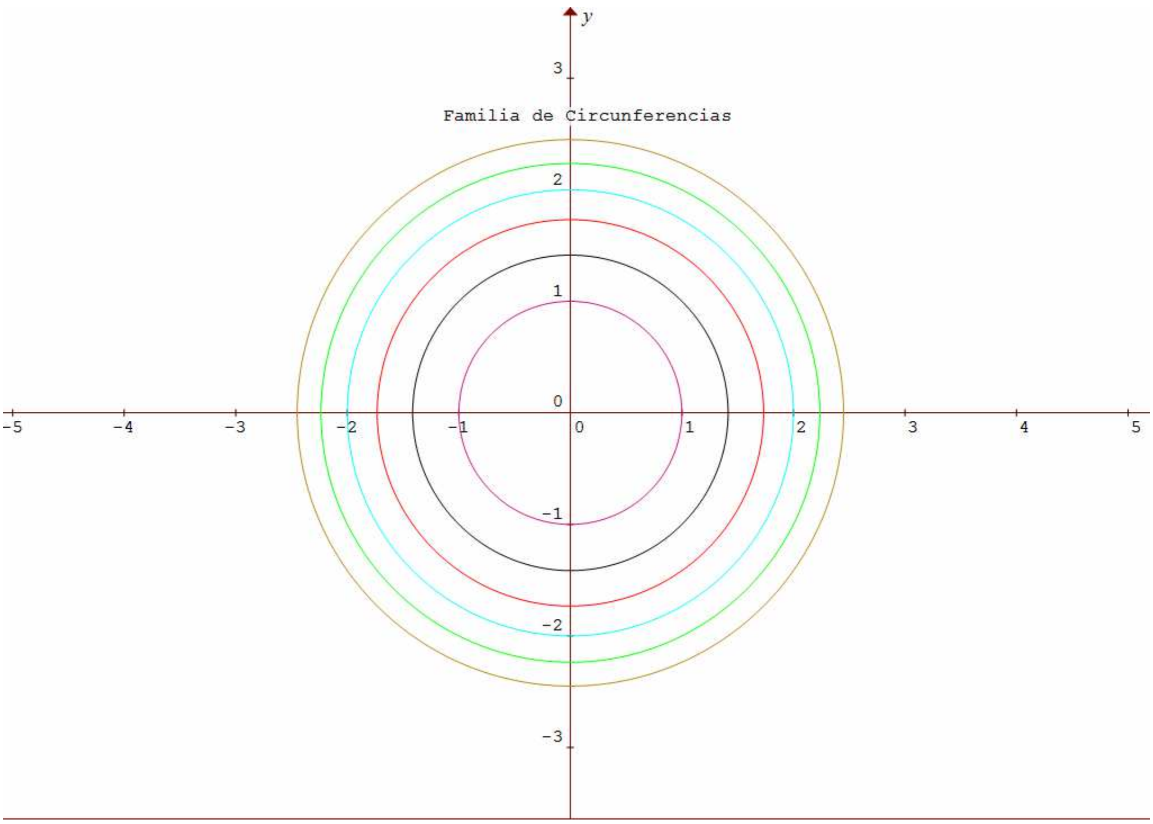
Aplicaciones

Problema 1.- Encuentre la familia de curvas tal que la normal en cualquier punto pasa por el origen

Solución

La normal a las curva $y = y(x)$ tiene la forma $y_0 - y = -\frac{dx}{dy}(x_0 - \mathrm{x})$ en este caso

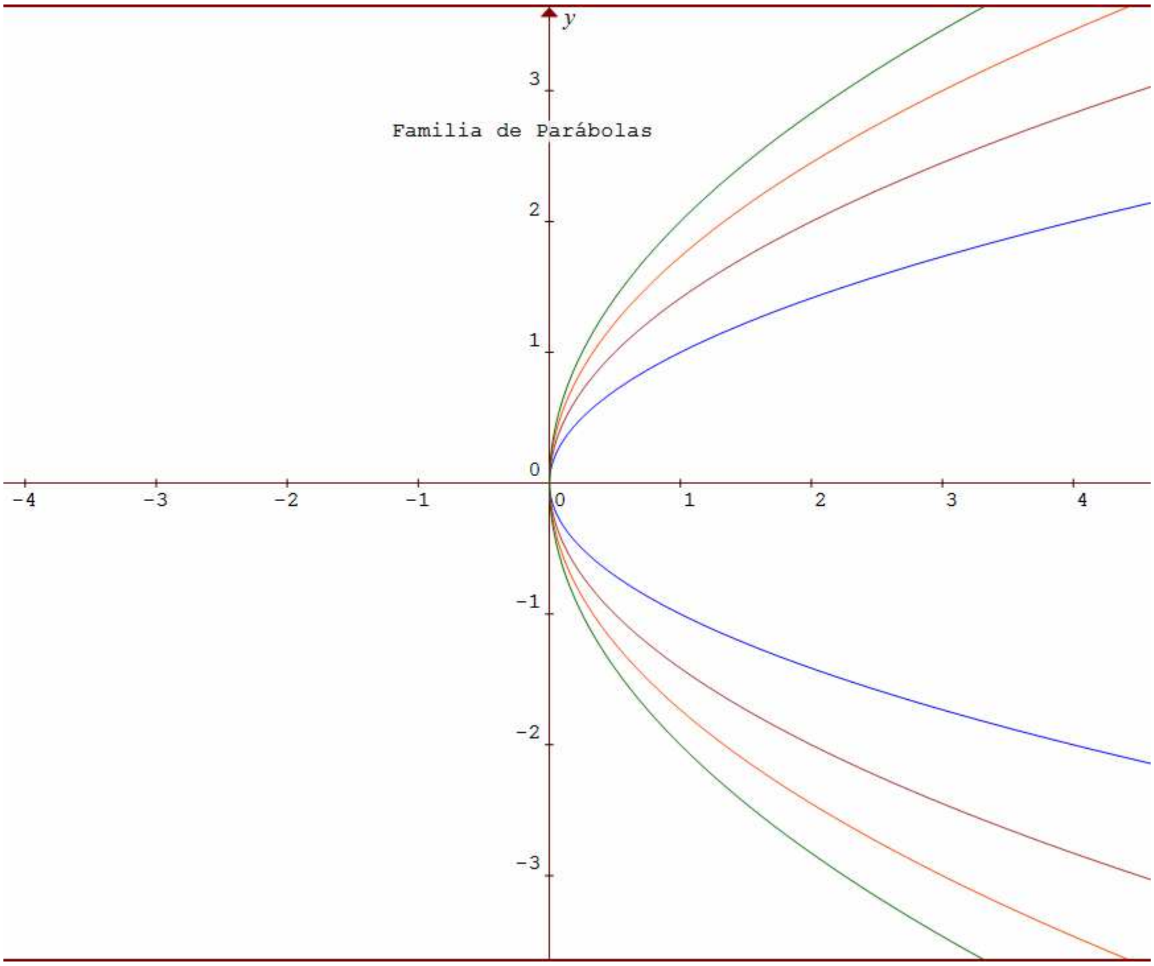
$(x_0, y_0) = (0,0)$ entonces nos queda $-xdy = xdx \Rightarrow x^2 + y^2 = C$



Problema 2.- Encuentre la ecuación de la curva tal que la pendiente de la tangente en cualquier punto es la mitad de la pendiente de la línea que une el origen con el punto.

Solución

Tenemos $y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x} \Rightarrow 2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y^2 = Cx$,familia de parábolas

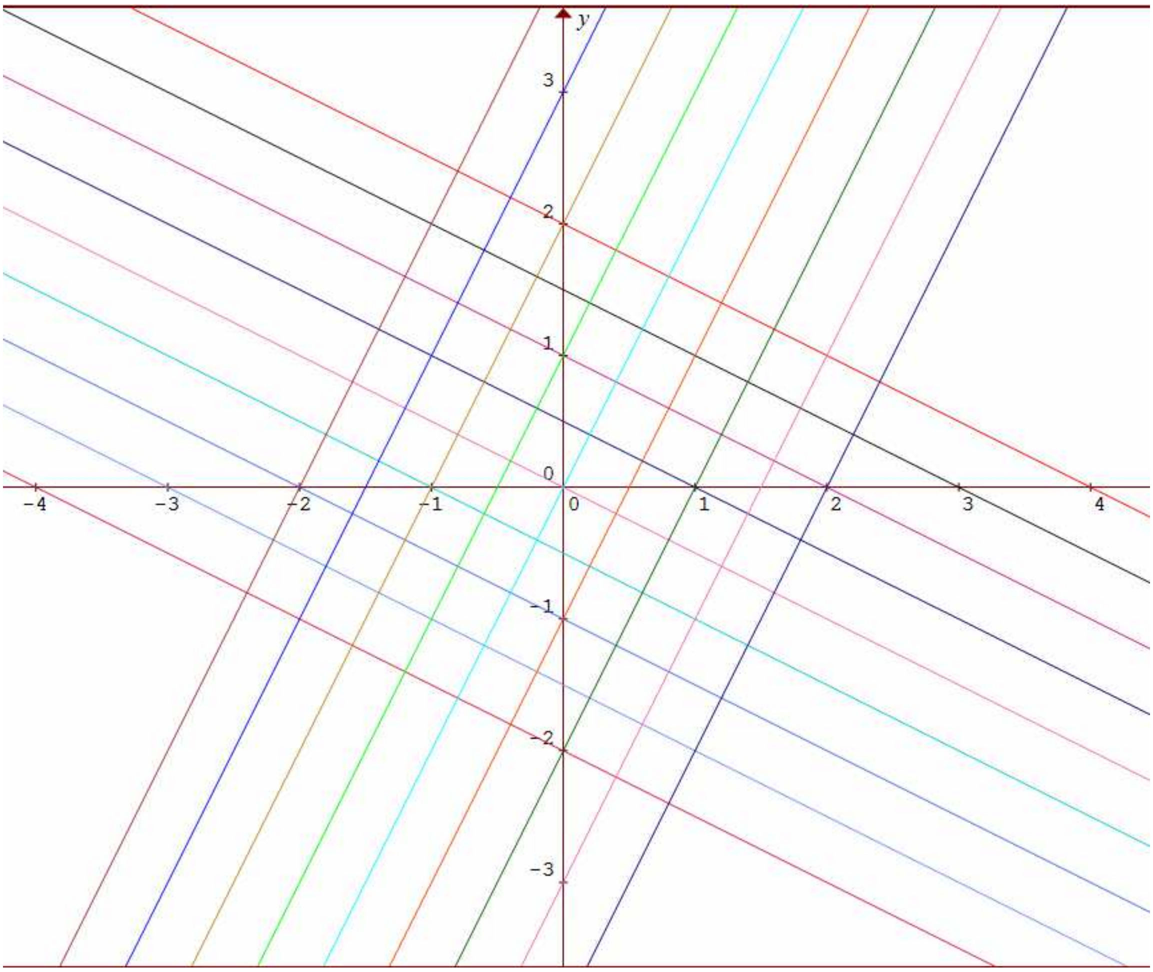


Problema 3.- Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas
$x + 2y = C$

Solución

Tenemos $dx + 2dy = 0 \Rightarrow 1 + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$ luego para las trayectorias ortogonales tenemos

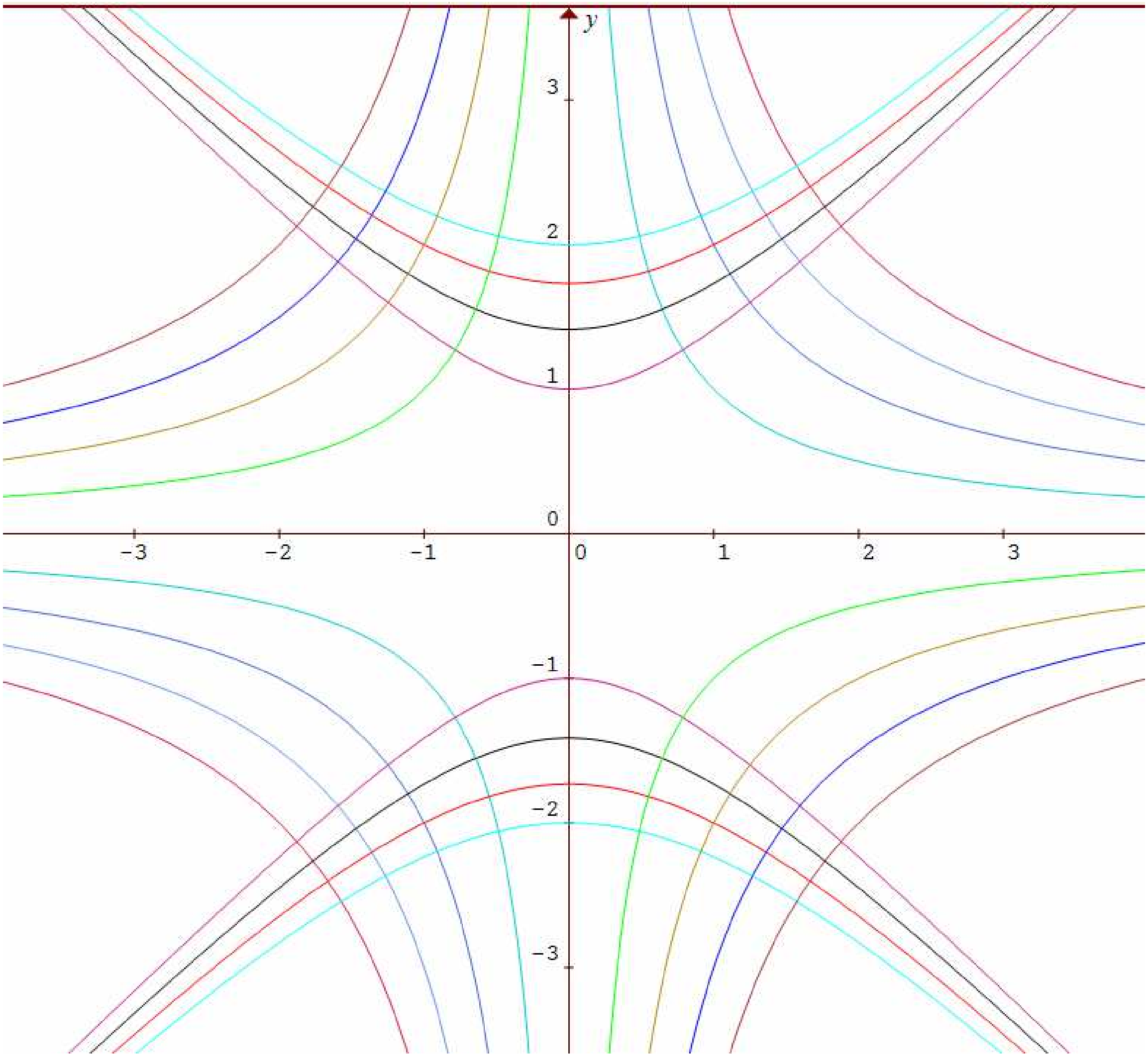
$1 - 2\dfrac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow y - 2x = C$



Problema 4.- Encontrar las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por $xy = C$

Solución

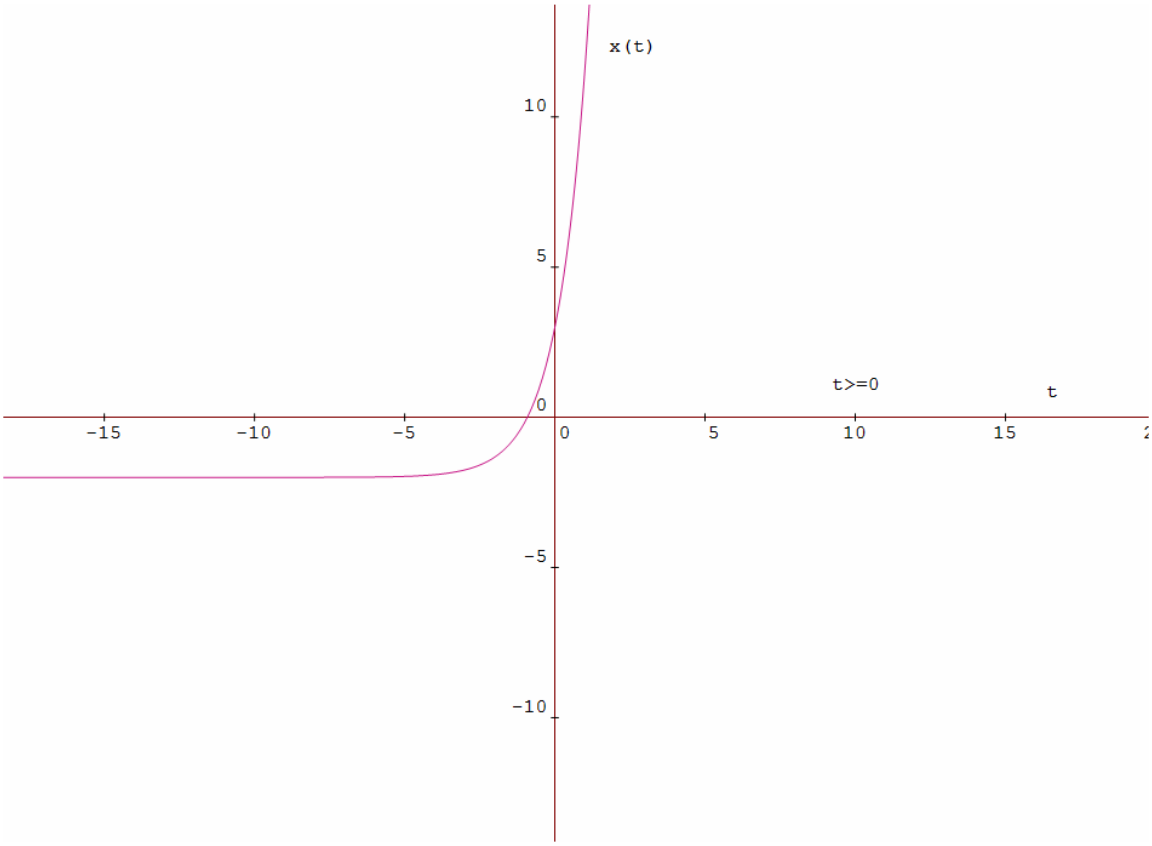
Tenemos $xy = C \Rightarrow ydx + xdy = 0 \Rightarrow y + x\dfrac{dy}{dx} = 0$ luego para las trayectorias ortogonales tenemos $y - x\dfrac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow ydy - xdx = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = C$



Problema 5.- Un cuerpo se mueve en una línea recta de tal manera que su velocidad excede en 2 a su distancia al origen . Si la velocidad inicial es 5 encuentre la ecuación del movimiento

Solución

$v = \dfrac{dx}{dt} = x + 2 \Rightarrow \dfrac{dx}{x+2} = dt \Rightarrow x(t) = Ce^{t} - 2$ pero la condición de velocidad cero para tiempo cero implica C=5 así la ecuación del movimiento es $x(t) = 5e^{t} - 2$

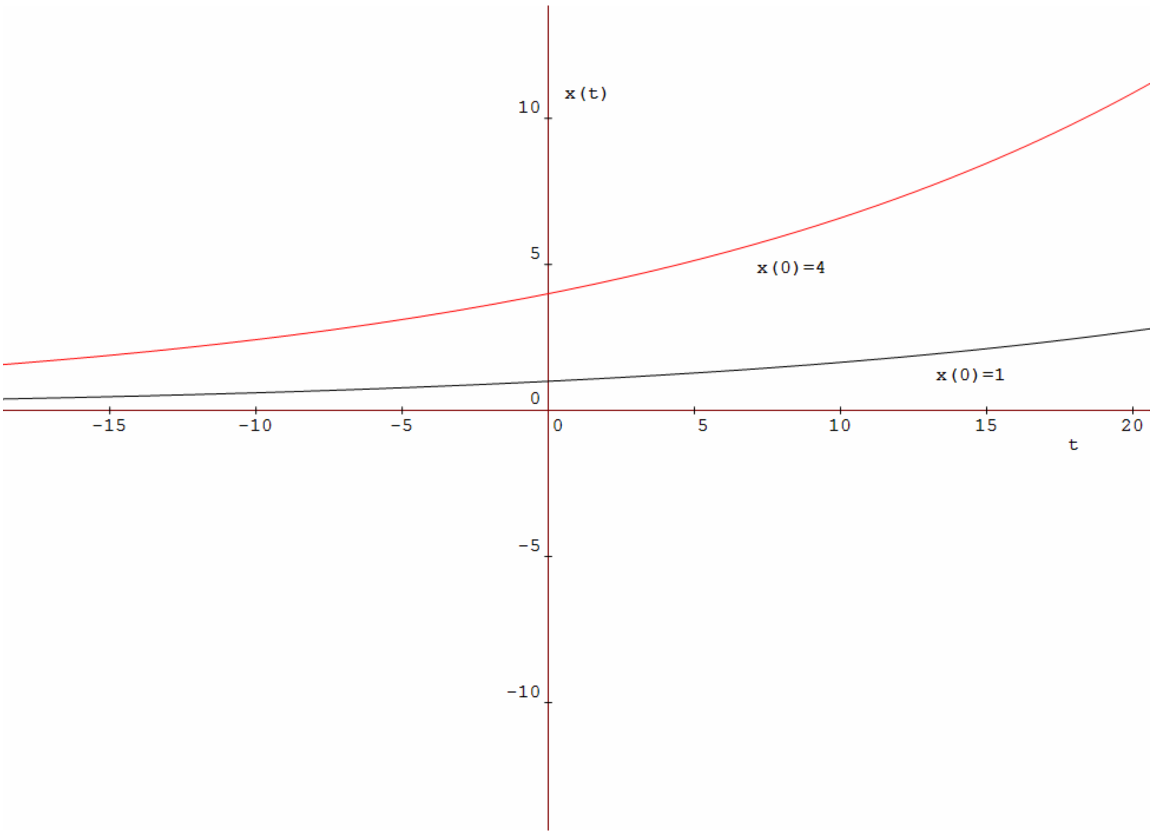


Problema 6.- Encuentre el tiempo requerido para que una cierta cantidad de dinero se duplique a un 5% de interés compuesto anual .

Solución

Sea $x(t)$ la cantidad de dinero en el tiempo t entonces $\frac{dx}{dt} = 0.05x \Rightarrow x = Ce^{0.05t}$

ahora para $t = 0, x = x_0 \Rightarrow x = x_0 e^{0.05t} \Rightarrow 2x_0 = x_0 e^{0.05t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.05} \approx 13.86$ años



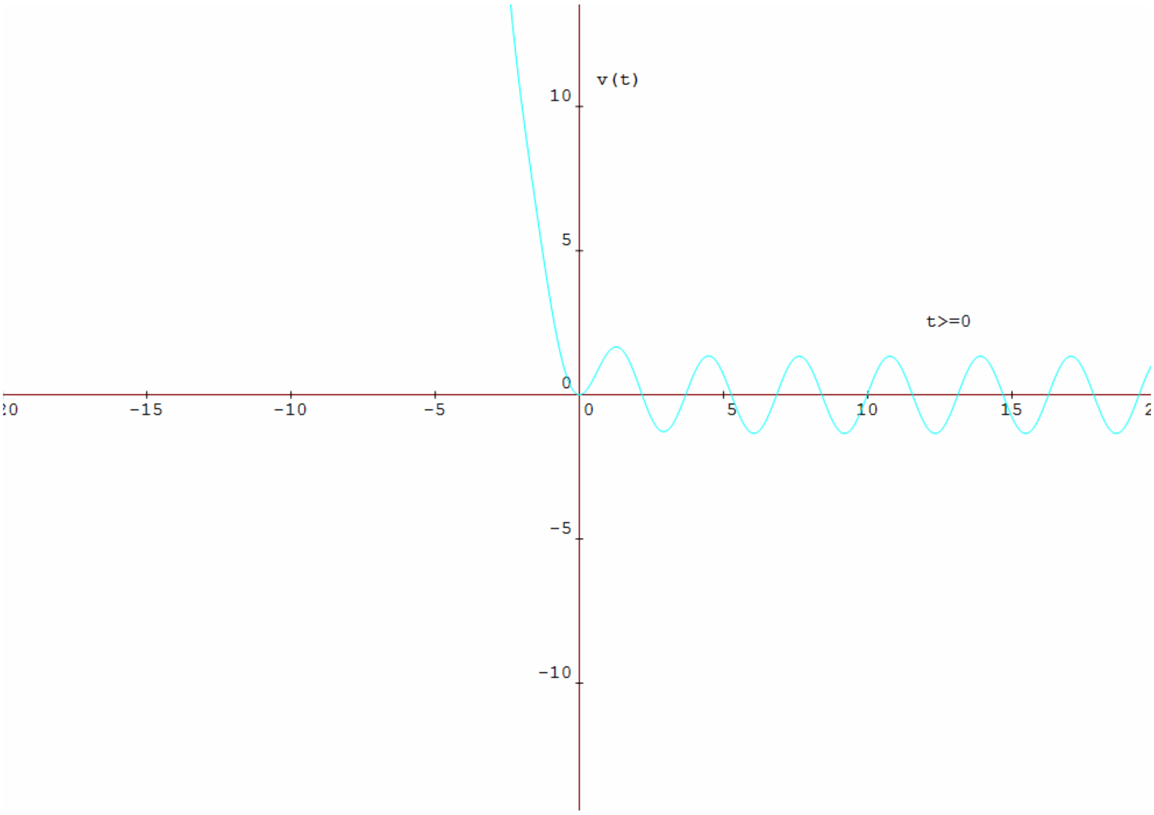
Problema 7.- Una masa de 4 slugs se desliza sobre una tabla . Si la fricción es igual a 4 veces la velocidad y la masa está sometida a una fuerza de 12sen2t
en libras encuentre la velocidad en función del tiempo si la velocidad inicial es cero .

Solución

Por Newton tenemos $4\frac{dv}{dt} = 12sen2t - 4v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + v = 3sen2t$ ecuación lineal cuya solución es

$v(t) = \frac{3}{5}e^{t}(sen2t - 2\cos 2t) + Ce^{-t}$ y aplicando la condición velocidad inicial cero se tiene

$v(t) = \frac{3}{5}(sen2t - 2\cos 2t + 2e^{-t})$

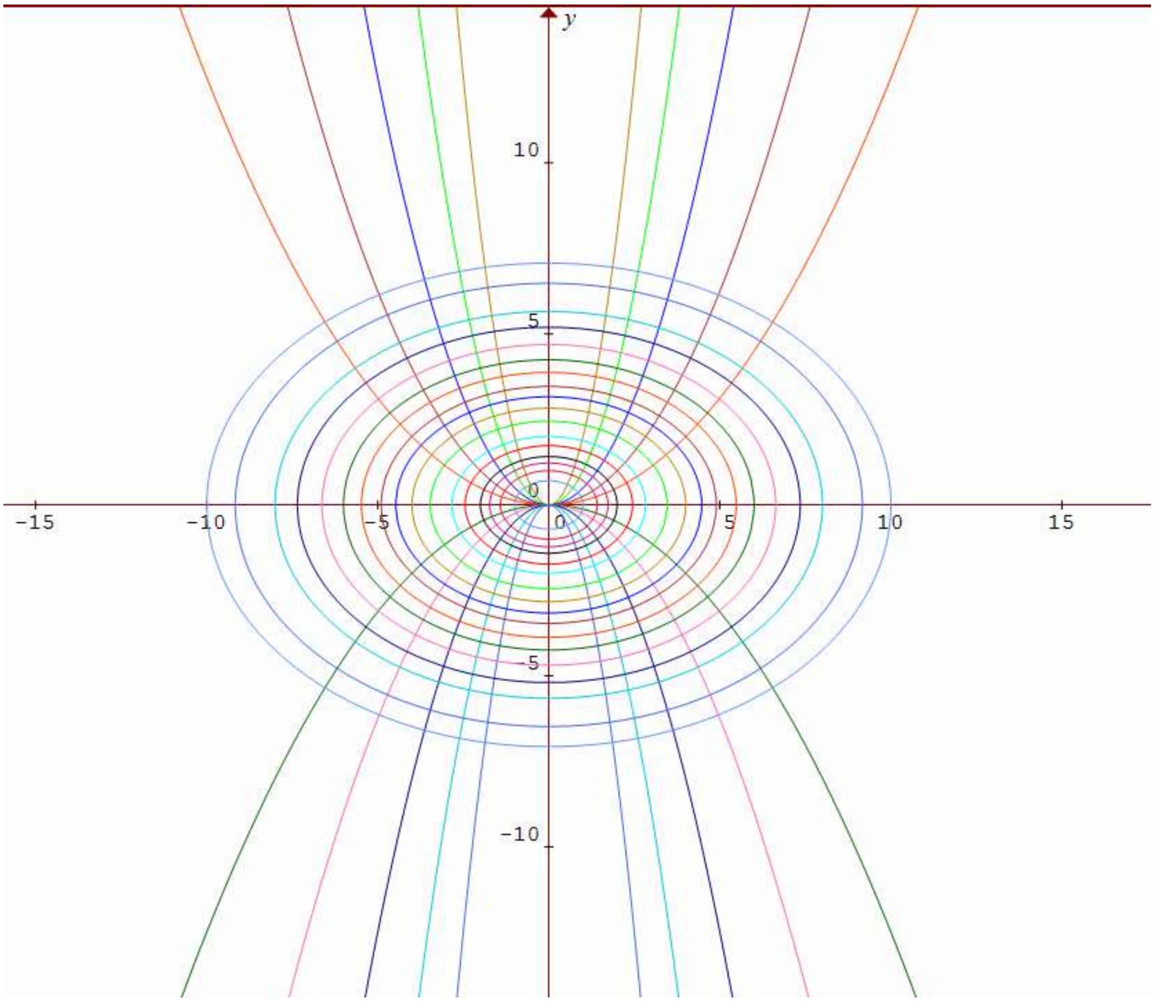


Problema 8.- Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = Cx^2$

Solución

$\dfrac{dy}{dx} = 2Cx, C = \dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x^2}x = \dfrac{2y}{x}$ Ahora reemplazamos $\dfrac{dy}{dx}$ por $-\dfrac{dx}{dy}$

de donde resulta $-\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y}{x} \Rightarrow 2ydy + xdx = 0 \Rightarrow 2y^2 + x^2 = C$



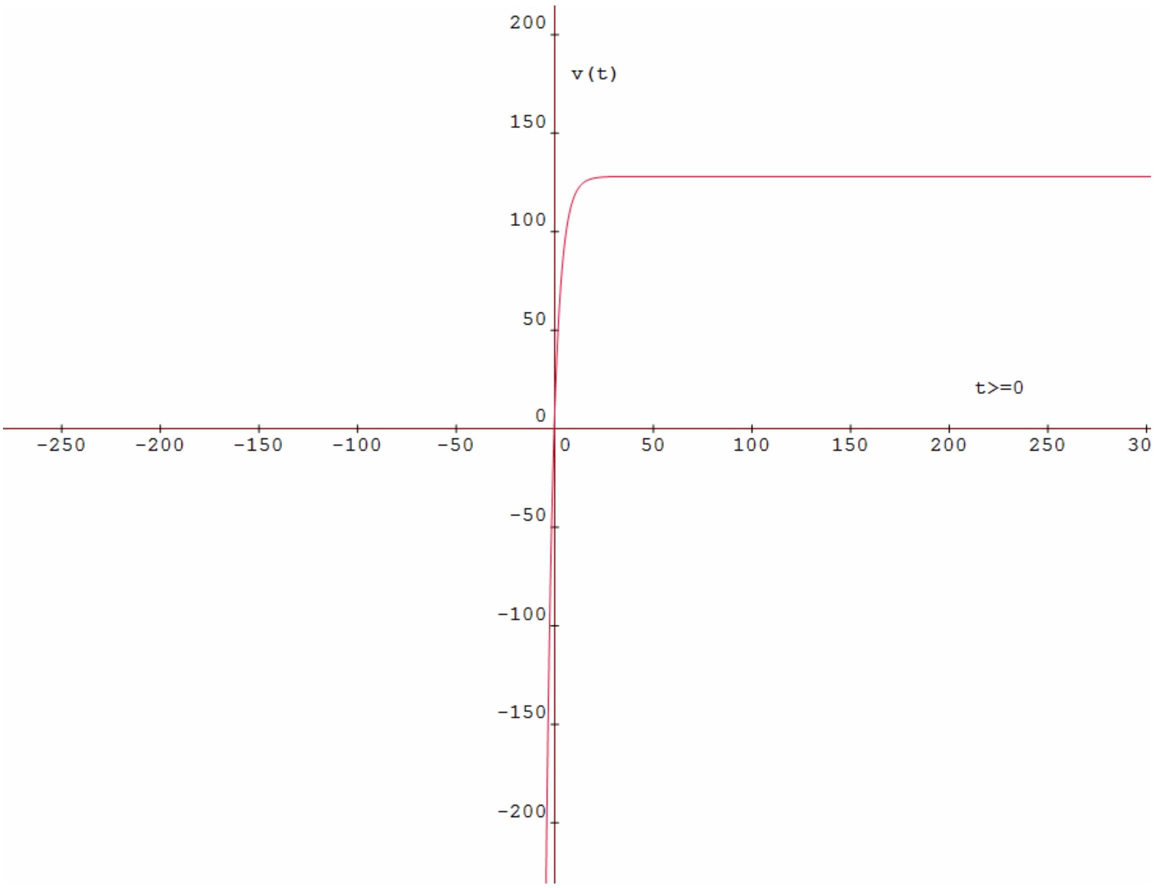
Problema 9.- Un cuerpo pesa 64 libras y se deja caer desde una altura de 100 pies con una velocidad inicial de 10 pie/seg ,si la resistencia del medio es la mitad de la velocidad , encuentre la ecuación del movimiento.

Solución

Por Newton $\frac{64}{32}\frac{dv}{dt}=64-\frac{1}{2}v \Rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{1}{4}v=32$ ecuación lineal cuya solución es

$v(t)=Ce^{-\frac{1}{4}t}+128$ pero aplicando la condición de velocidad inicial 10 se tiene

$v(t)=-118e^{-\frac{1}{4}t}+128$

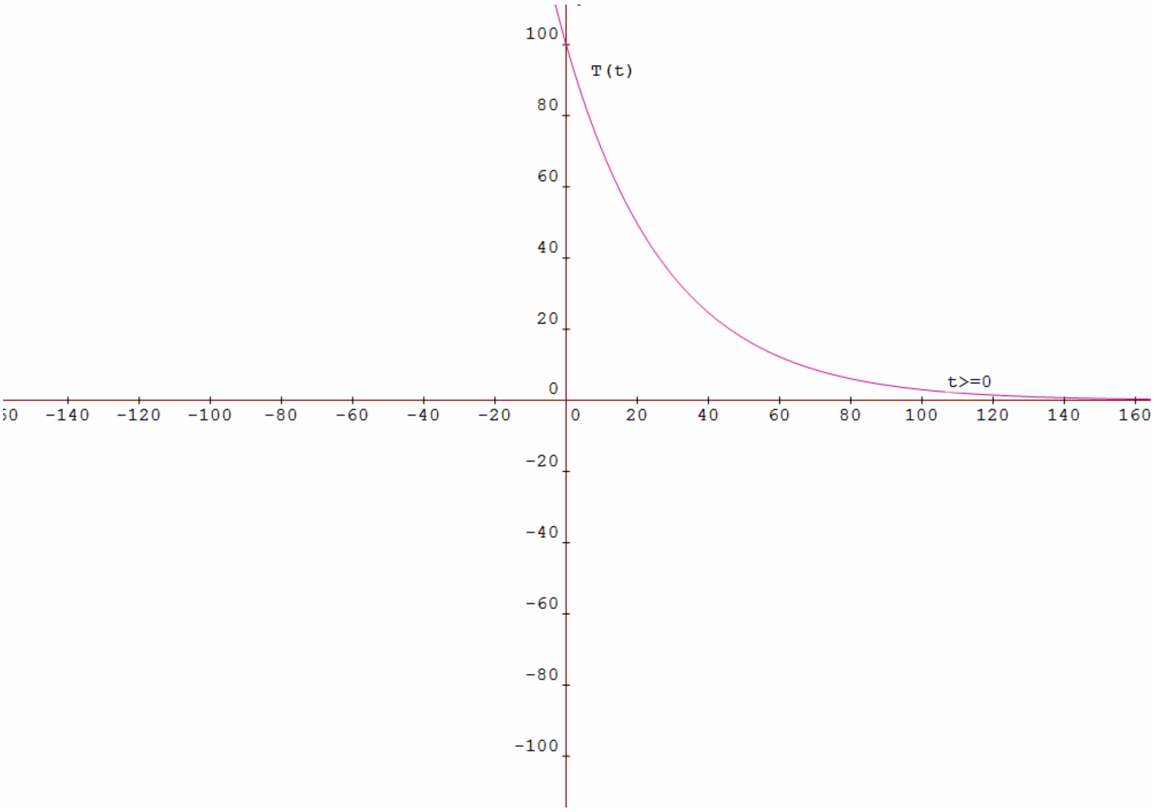


Problema 10.- Cierta pieza de metal a la temperatura de 100 grados F se introduce a un cuarto a la temperatura de 0 grados F .Si transcurridos 20 minutos la temperatura de la pieza es 50 grados F , encuentre el tiempo que se requiere para que la pieza alcance la temperatura de 25 grados F .

Solución

Aplicando la Ley de enfriamiento de Newton se tiene $\frac{dT}{dt}+kt=0 \Rightarrow T=Ce^{-kt}$

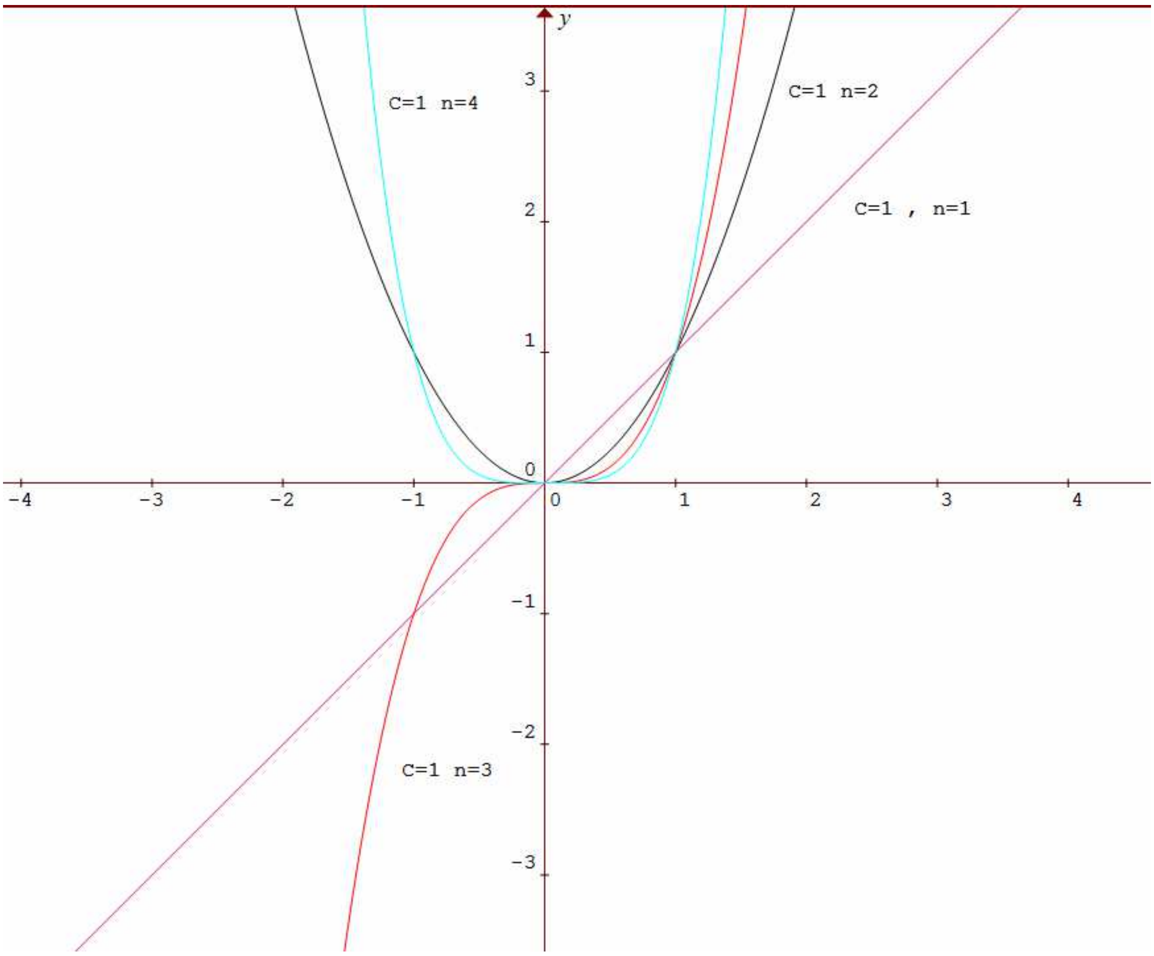
pero aplicando la condición inicial T=100 para t=0 se tiene $T=100e^{-kt}$
y aplicando la condición T=50 para t=20 se tiene k=0.035 , así $T=100e^{-0.035t}$
Ahora si T=25 ,entonces despejando t se tiene t=39.6 minutos



Problemas 11.- Hallar la curva tal que la pendiente de la tangente en cada punto es n veces la pendiente de la recta que une dicho punto con el origen.

Solución

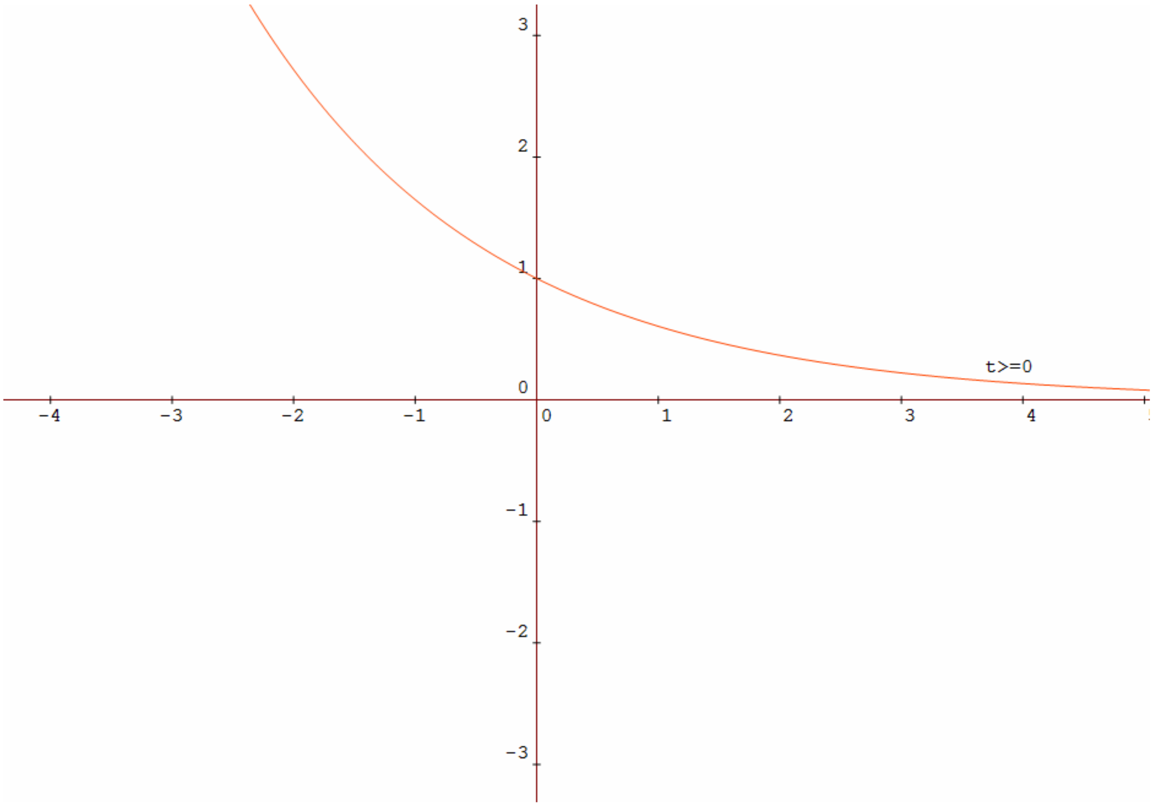
$$\frac{dy}{dx} = n\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x} \Rightarrow y = Cx^n$$



Problema 12.- El 40% de una sustancia ha decaído en 10 años .¿Cuánto de la sustancia permanece después de 15 años ?

Solución

Sea $x(t)$ la cantidad de sustancia en el tiempo t .Sabemos que se rige por la ecuación $\frac{dx}{dt} = -kt$ cuya solución es $x(t) = x_0 e^{-kt}$. Ahora $0.6x_0 = x_0 (e^{-k})^{10} \Rightarrow 0.6 = (e^{-k})^{10} \Rightarrow (0.6)^{\frac{1}{10}} = e^{-k}$ entonces , $x = x_0 ((\frac{3}{5})^{\frac{1}{10}})^{15} = x_0 (\frac{3}{5})^{\frac{15}{10}} \approx 0.465 x_0$ o sea permanece 46.5% aprox. de la sustancia.

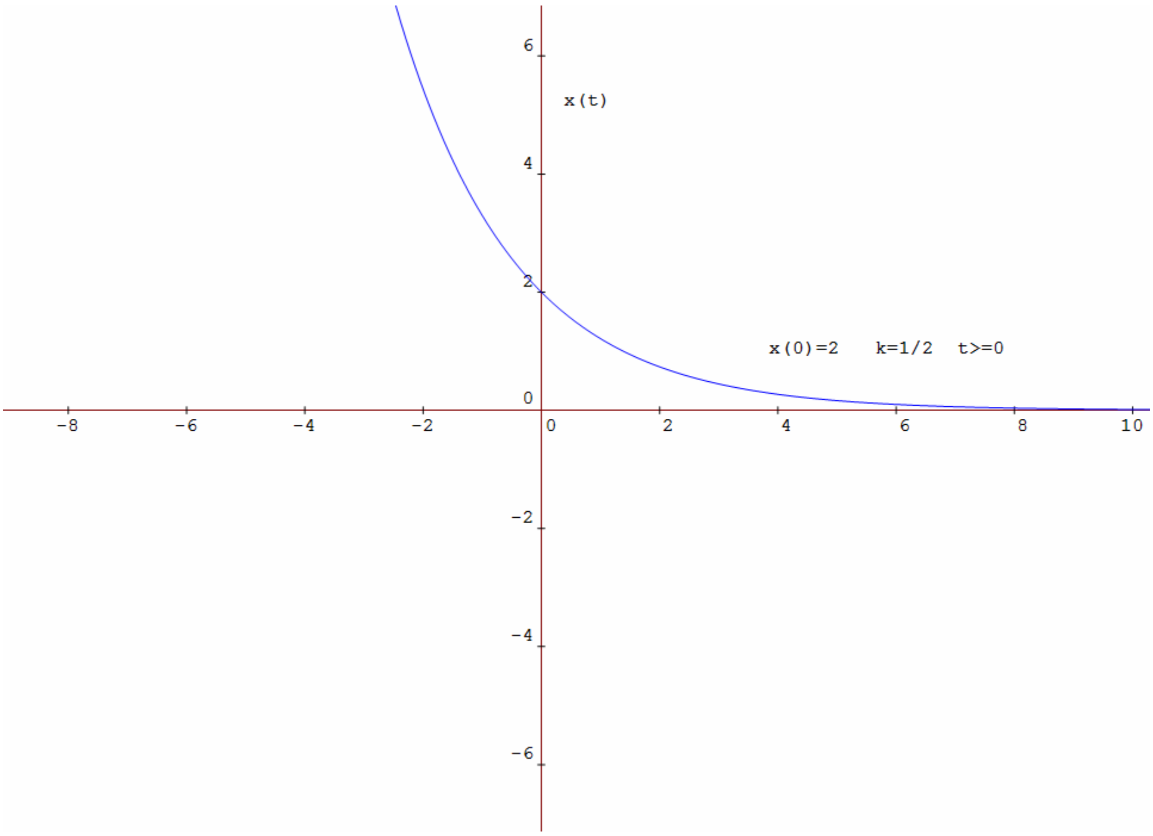


Problema 13.- 80 microgramos de una muestra radioactiva decae a 70 microgramos después de 10 horas ¿Cuándo decaerá a la mitad ?

Solución

Sea x(t) la cantidad de isótopo radioactivo en el tiempo t , la ecuación que rige es
$\frac{dx}{dt} = -kx \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-kt}$ entonces $70 = 80(e^{-k})^{10} \Rightarrow e^{-k} = (\frac{7}{8})^{\frac{1}{10}}$,ahora

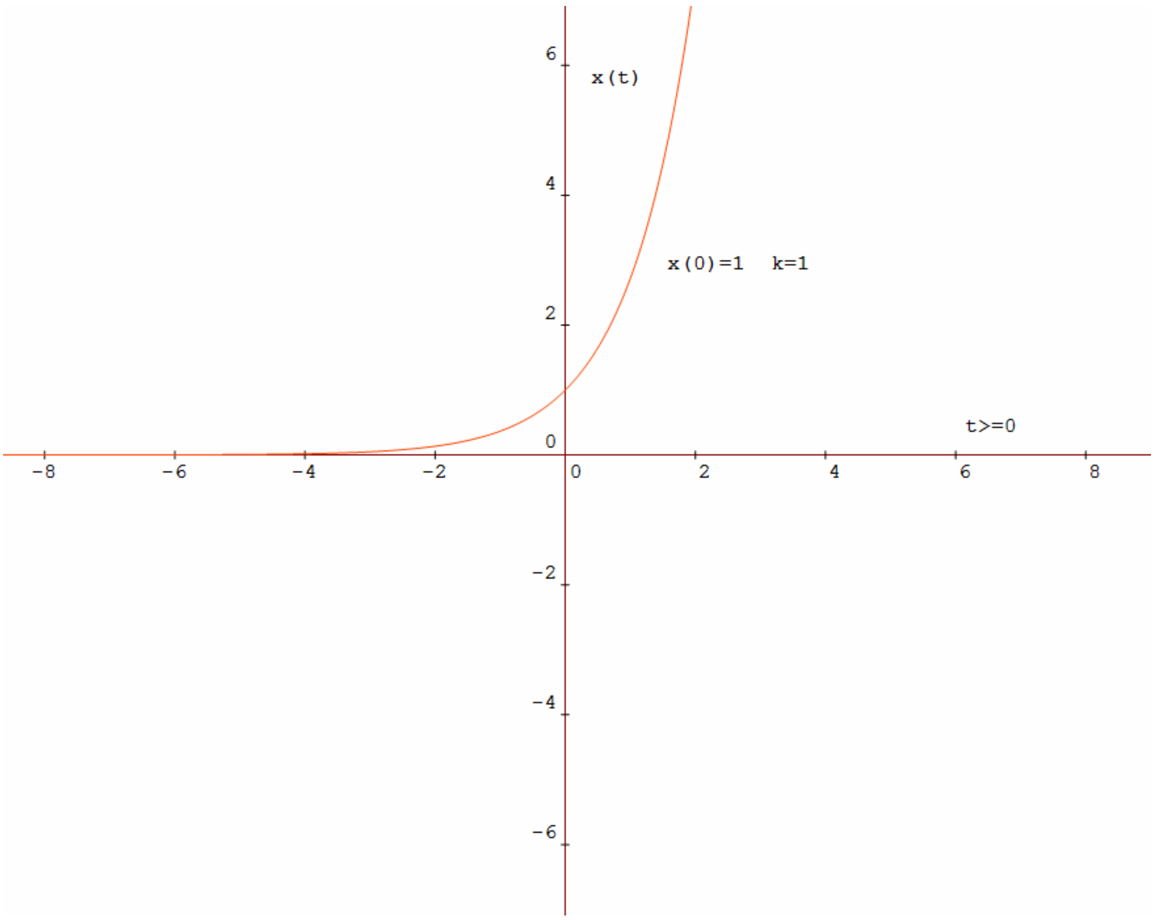
$$40 = 80(e^{-k})^{t} \Rightarrow 0.5 = (\frac{7}{8})^{\frac{1}{10}t} \Rightarrow t = \frac{10 \ln 0.5}{\ln(\frac{7}{8})} \approx 51.9 hrs$$



Problema 14.-La población de una ciudad se ha duplicado en 30 años ¿En cuántos años será el triple ?

Solución

La ecuación que rige es $\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow x(t) = x_0 e^{kt}$ donde x(t) es el número de habitantes en el tiempo t .Ahora $2x_0 = x_0 e^{30k} \Rightarrow 2^{\frac{1}{30}} = e^k, 3x_0 = x_0 (2^{\frac{1}{30}})^t \Rightarrow t = 30\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 47.5 años$

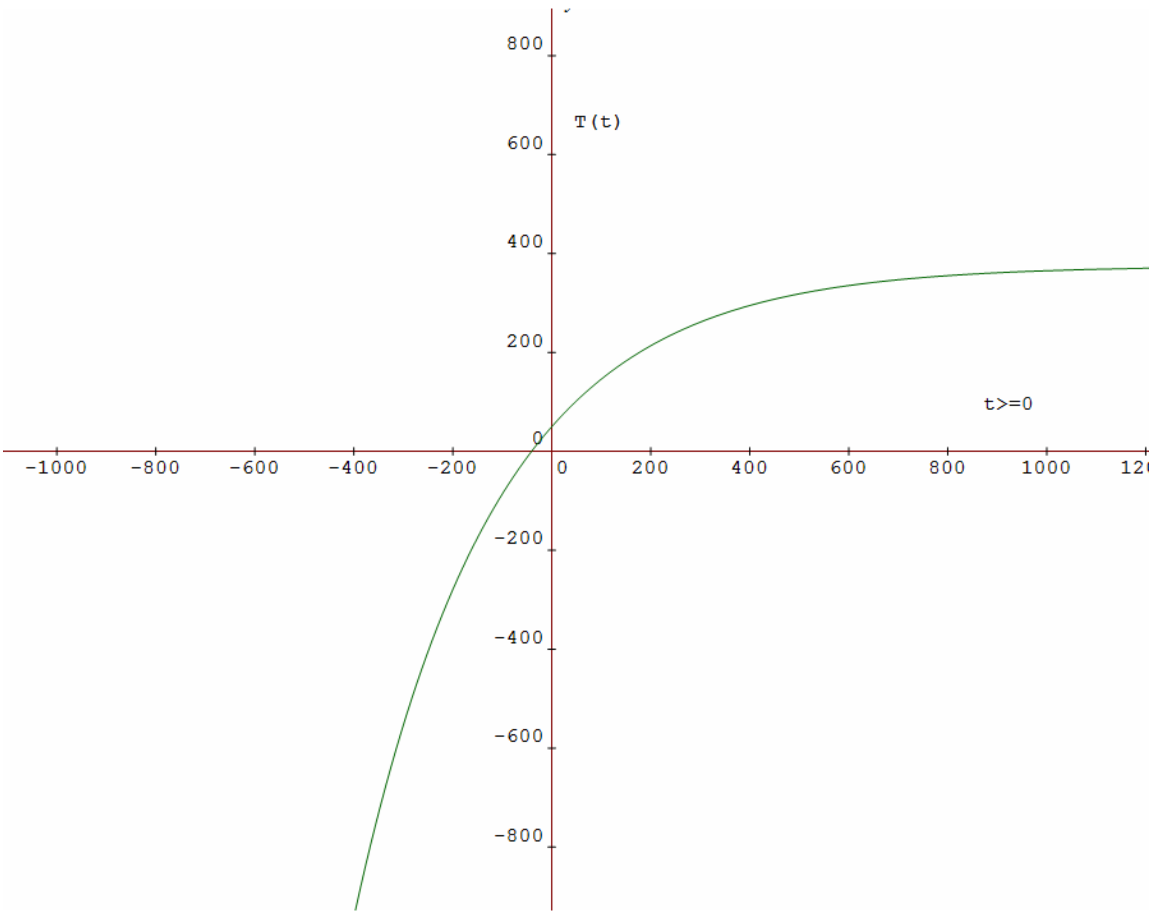


Problema 15.- un objeto que tiene 50 grados F se coloca a las 10:00 horas en un horno que se mantiene a 375 grados F a las 11:15 horas su temperatura era 125 grados F ¿A qué hora estará el objeto a 150 grados F ?

Solución

Aplicamos la ley de enfriamiento de Newton $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$ donde T es la temperatura del objeto en el tiempo t y T_a es la temperatura del ambiente . se trata de una ecuación de variable separable cuya solución es

$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 375 + Ce^{kt}$ .Las condiciones T(0)=50 , T(75)=125 nos permiten calcular C y k , obtenemos $T(t) = 375 - 325e^{-0.0035t}$. Para T=150 nos da un tiempo de 105.06 minutos , lo que corresponde a la hora 11.45 aprox.



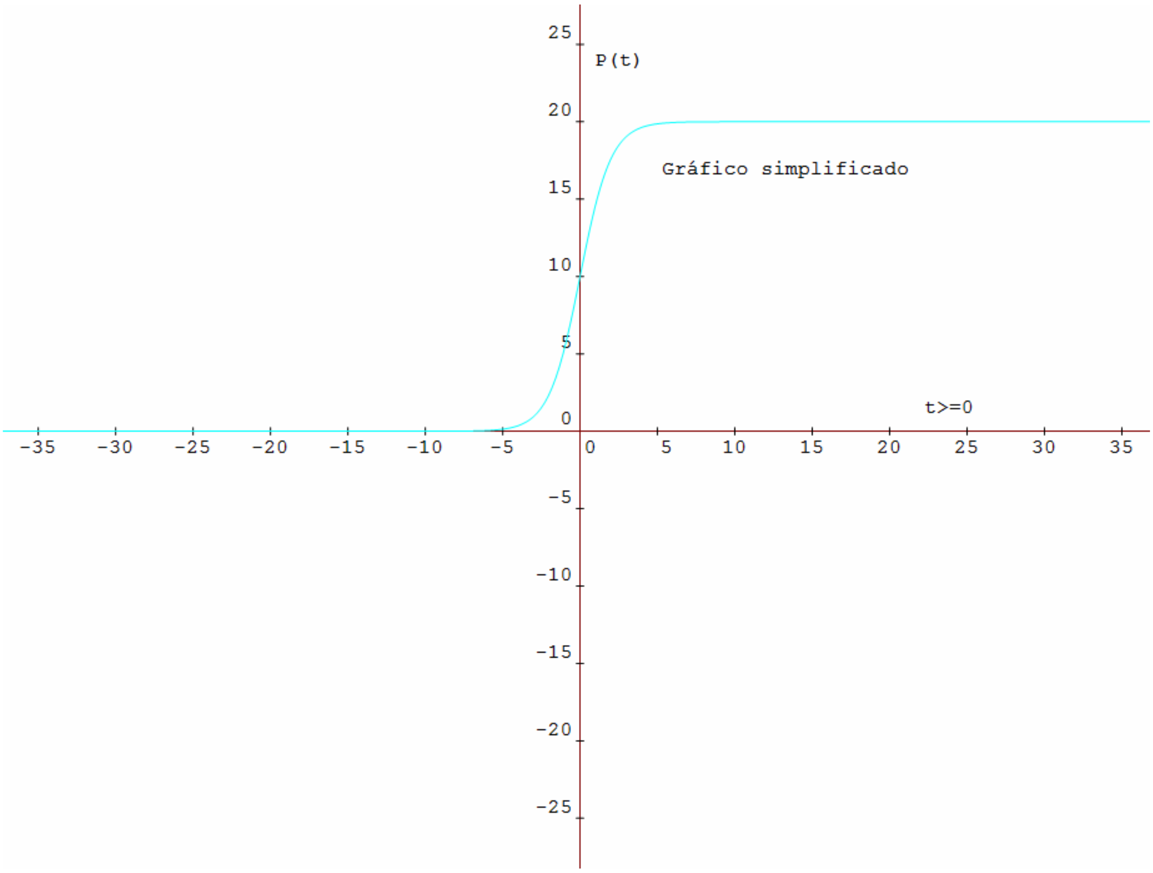
Problema 16.- En una población de 5000 habitantes ,10 de ellos tienen una enfermedad contagiosa . La velocidad a la que se propaga la enfermedad es proporcional al producto de personas contagiadas por las no contagiadas con una constante de proporcionalidad de 0.2 .encuentre la ecuación que rige este proceso .

Solución

Sea P(t) la población contagiada en el tiempo t , con P(0)=10 , entonces

$$\frac{dP}{dt} = 0.2P(5000 - P) \Rightarrow \frac{dP}{p(5000 - P} = 0.2dt \Rightarrow P(t) = \frac{5000e^{1000t}}{e^{1000t} + C}$$

la condición P(0)=10 nos permite calcular C =499 . Así $P(t) = \dfrac{5000e^{1000t}}{e^{1000t} + 499}$



Problema 17.- Un cuerpo de masa m slugs cae del reposo en un medio cuya resistencia en libras es proporcional al cuadrado de la velocidad (pie/seg)
Encuentre la velocidad para t=2 seg si la velocidad terminal es 150 (pie/seg).

Solución

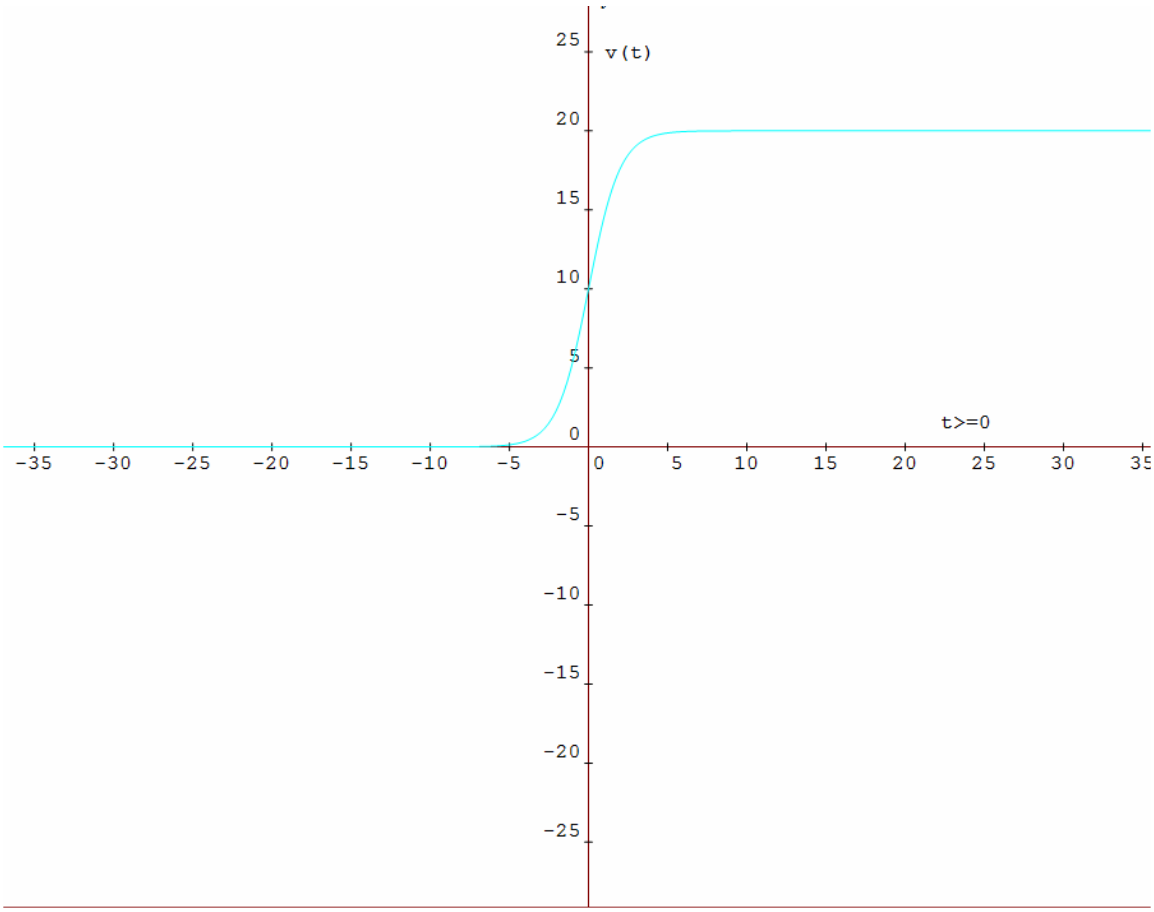
$m\frac{dv}{dt} = mg - Kv^2$,haciendo $K = mk^2$ se tiene $\frac{dv}{dt} = 2(16 - k^2v^2), (g = 32)$

$\frac{dv}{dt} = 2(16 - k^2v^2) \Rightarrow \frac{dv}{k^2v^2 - 16} = -2dt$ integrando se obtiene $\frac{kv-4}{kv+4} = Ce^{-16kt}$

para t=0 , v=0 tenemos C=-1 y $\frac{kv-4}{kv+4} = -e^{-16kt}$ y cuando t tiende a infinito

v=150 entonces $-e^{-16kt} \to 0, k = \frac{2}{75}$ así $\frac{v-150}{v+150} = -e^{-0.43t}$ y para t=2 se tiene

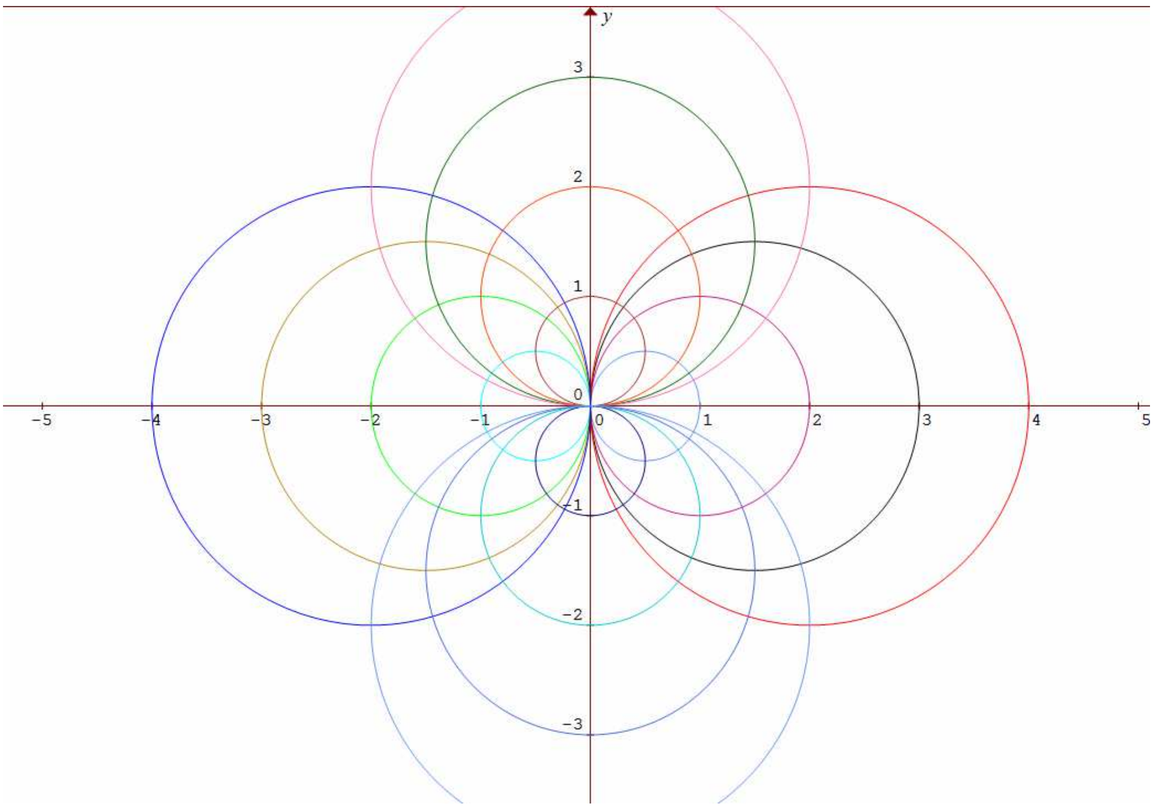
v=61(pie/seg).



Problema 18.- Obtenga la familia ortogonal a la familia de curvas $x^2+y^2=Cx$

Solución

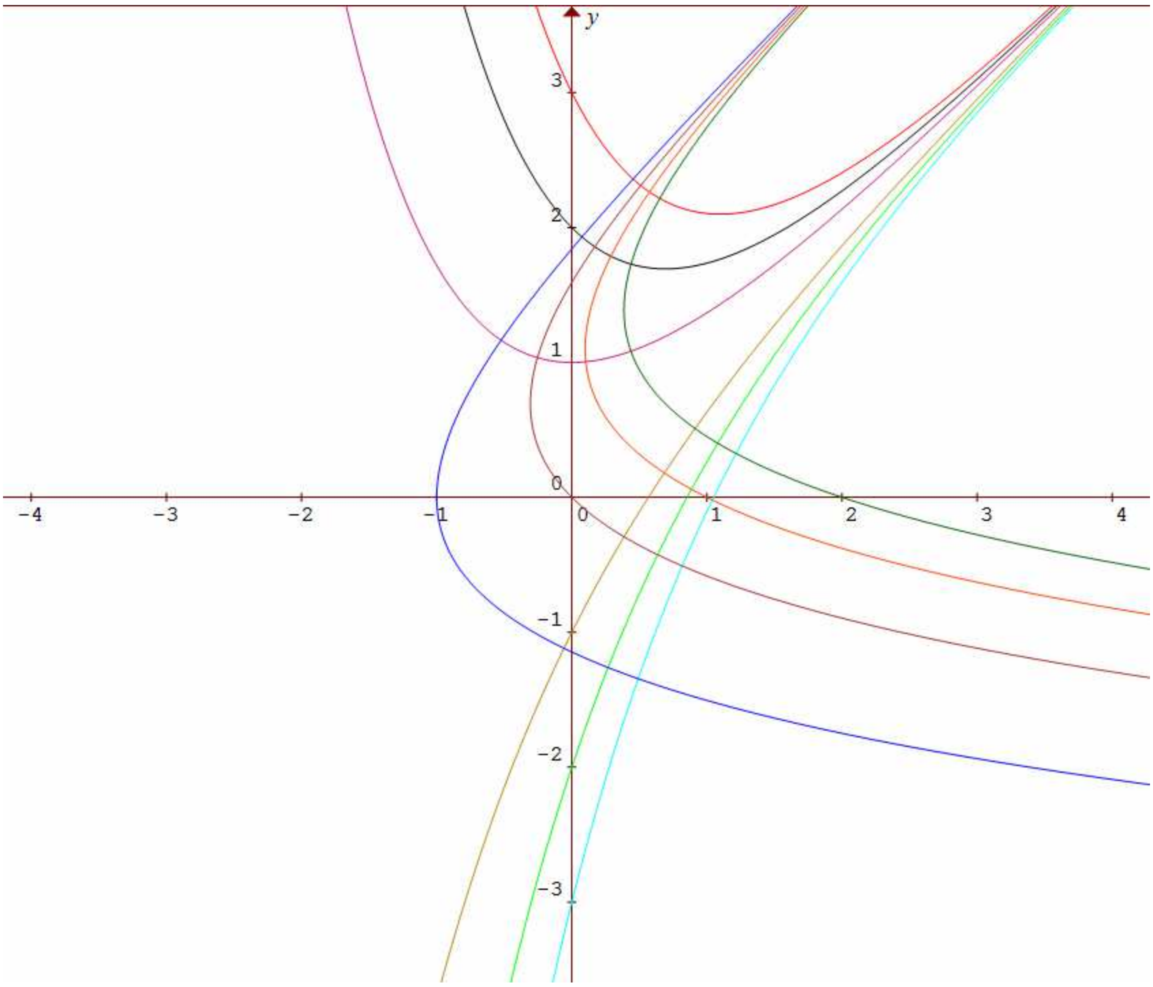
$$C=\frac{x^2+y^2}{x}\Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}\Rightarrow 2xydy=(y^2-x^2)dx\Rightarrow x^2+y^2=Cy$$



Problema 19.- Obtenga la familia ortogonal a la familia de curvas $y = x + Ce^{-x}$

Solución

$y' = 1 - Ce^{-x}$ y eliminando C de estas ecuaciones se tiene $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x-y}$ donde se reemplazo y' por -1/y' ,integrando se obtiene $xe^{y} - e^{y}(y-2) = C$



Bibliografía

-Boyce Di Prima -Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la Frontera -Limusa 1980

-Bronson -Ecuaciones Diferenciales -McGraw-Hill -1976

-Zill, Dennis- Afirst Course in Differential Equations -PWS Wadsworth-1982

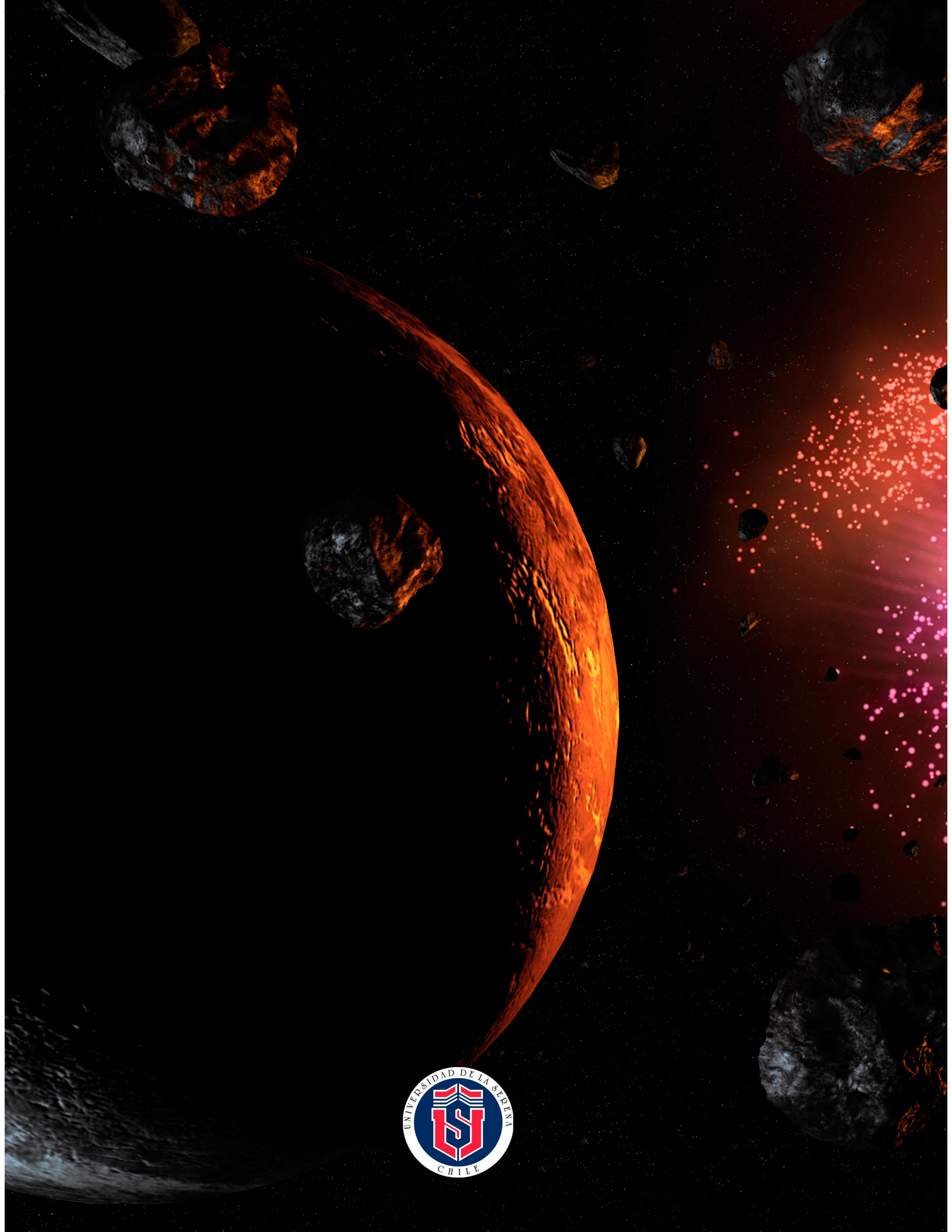
-Piskunov-Cálculo Diferencial e Integral-MIR-1980

-Kreider -Kuller-Ecuaciones diferenciales-Fondo Educativo Interamericano-1973

-Kreyszig-Advanced Engineering Mathematics-Wiley&Sons-1979

-Edwards-Penney-Ecuaciones Diferenciales-Prentice Hall -2001

-Acero-López-Ecuaciones Diferenciales- Alfa Omega-1999


UNIVERSIDAD DE LA SERENA
CHILE